

М.Д. Подскребко

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Утверждено

Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебника для студентов учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования
по техническим специальностям



Минск
«Вышэйшая школа»
2007

УДК 621.7.014(075.8)

ББК 30.121я73

П 44

Рецензенты: доктор технических наук, профессор кафедры инженерной графики и механики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники *В.М. Сурин*; заведующий кафедрой сопротивления материалов машиностроительного профиля Белорусского национального технического университета доктор физико-математических наук, профессор *Ю.В. Василевич*; кафедра сопротивления материалов, строительной механики и металлических конструкций Полоцкого государственного университета (кандидат технических наук, доцент *Л.В. Перицкий*)

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

Подскребко, М. Д.

П 44 **Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. — Минск : Выш. шк., 2007. — 797 с. : ил.
ISBN 978-985-06-1293-9.**

В учебнике, охватывающем все основные темы курса «Сопротивление материалов», подробно рассматриваются основы напряженного и деформированного состояний, механические характеристики материалов и композитов, критерии прочности, сдвиг, кручение, изгиб, колебания упругих систем, вероятностные методы оценки прочности и надежности элементов конструкций и т. д.

Каждая тема содержит большое количество примеров с подробным решением. В приложении приводятся все необходимые для расчетов справочные материалы.

Для студентов инженерных специальностей вузов. Будет полезен преподавателям вузов и колледжей, инженерам-механикам и всем желающим повысить свои знания в области расчетов элементов конструкций на прочность.

УДК 621.7.014(075.8)

ББК 30.121я73

© Подскребко М.Д., 2007

© Издательство «Вышэйшая школа», 2007

ISBN 978-985-06-1293-9

Предисловие

Учебник написан в соответствии с программой по сопротивлению материалов для инженерных специальностей высших технических учебных заведений. Представленный материал подходит для любого варианта рабочей программы. Глава «Сдвиг» излагается с учетом новейших рекомендаций в области сварки; добавлены темы: расчет гибких нитей и биметаллических проводов; механические характеристики композитов; концентрация напряжений; вариационные методы расчета конструкций; малоцикловая усталость; энергетический метод (метод Ритца) для определения критической силы; вероятностные методы оценки прочности и надежности элементов инженерных конструкций. Дополнительные вопросы должны способствовать развитию инженерного мышления и расширению кругозора студента.

Учитывая существующую тенденцию сокращения аудиторных часов и передачу отдельных тем на самостоятельное изучение, в каждой теме приводятся большое количество примеров с подробным решением и необходимые для расчетов справочные материалы.

Автор ставил своей целью дать в доступной форме необходимые знания в области механики деформируемого твердого тела и показать их применение к решению практических задач, подготовить будущего инженера к самостоятельному изучению специальной литературы по частным вопросам, которые могут встретиться в практической работе.

Выражаю искреннюю благодарность рецензентам: доктору технических наук, профессору В.М. Сурину, доктору физико-математических наук, профессору Ю.В. Василевичу и кандидату технических наук, доценту Л.В. Первицкому, сделавшим ряд ценных замечаний и предложений, которые способствовали улучшению содержания учебника. Также выражаю благодарность В.С. Алисионок за помощь при подготовке рукописи к печати.

Автор

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Основные понятия

Все окружающие человека предметы, как и большинство продуктов его труда, представляют различного рода *конструкции*. Под конструкцией будем понимать *любое материальное образование, способное воспринимать механические нагрузки без разрушения*. Создавая всякую конструкцию (стул, трактор, мост, здание и т. д.), мы прежде всего ставим задачу, чтобы она обладала достаточной надежностью при минимальной материалоемкости.

Под действием внешних нагрузок, как известно, твердое тело изменяет свою форму и размеры – деформируется. Благодаря деформации тело создает внутренние силы, противодействующие внешним нагрузкам. Стержень под действием нагрузки удлиняется. В результате удлинения создается противоположно направленная сила упругости (противодействия), которая и уравнивает приложенную нагрузку.

Рассмотрим механизм **возникновения сил упругости**. Все металлы в отличие от неметаллических материалов имеют поликристаллическую структуру, состоящую из мелких хаотически расположенных кристаллов (зерен). В объеме кристаллов атомы располагаются в определенном порядке, образуя геометрически правильную кристаллическую решетку, различную у разных металлов. Между атомами кристаллической решетки существуют силы взаимодействия. При отсутствии внешних нагрузок атомы колеблются относительно равновесных положений в узлах решетки. Под действием внешних сил атомы смещаются из положения равновесия и силы взаимодействия между ними изменяются.

Сила взаимодействия между двумя соседними атомами складывается из сил притяжения (кривая 1) и сил отталкивания между атомами (кривая 2). Равнодействующая сила (кривая 3) изменяется в зависимости от расстояния между атомами и равняется нулю на некотором расстоянии a_0 , которое определяет равновесное положение атомов в узлах кристаллической решетки (рис. 1.1).

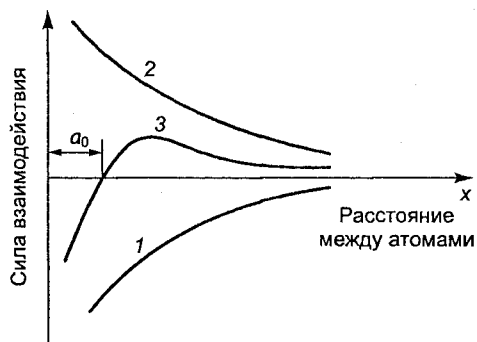


Рис. 1.1

Суммарные силы взаимодействия атомов в кристаллической решетке, складываясь по разным направлениям для множества хаотически расположенных кристаллов, образуют **внутреннюю силу упругости**, уравнивающую действие внешних растягивающих или сжимающих сил. После удаления внешних сил атомы возвращаются на свои места, при этом тело полностью восстанавливает первоначальные размеры. Таким образом, наличие перемещений в материалах и конструкциях при деформации под действием нагрузок представляет собой важнейшее свойство, без которого ни материал, ни конструкция не могли бы работать. На практике величины перемещений изменяются в широких пределах: от долей микрона до величин, легко наблюдаемых невооруженным глазом. Конечным результатом деформации может быть разрушение элементов конструкции или недопустимое искажение их формы. Избежать этого можно только выбором соответствующего материала и правильным расчетом поперечных размеров элементов конструкции. Таким образом, для создания совершенных конструкций машин и инженерных сооружений необходимы современные методы расчета на прочность и глубокие знания природы и свойств материала.

Вопросами практических расчетов всевозможных сооружений занимается наука «Сопrotивление материалов». Она является основой технического образования инженера любой специальности. В качестве самостоятельной дисциплины сопротивление материалов окончательно сформировалось в первой половине XIX в.* Первое систематическое изложение этой на-

* Начало ее развития связано с именами Галилео Галилея и Роберта Гука.

уки было предложено французским ученым и инженером А. Навье в 1825 г. под названием «Курс лекций по сопротивлению материалов». В России аналогичный курс был выпущен Н.Ф. Ястржемским в 1837 г. под названием «Курс практической механики». Огромный вклад в развитие данной науки внесли Л. Эйлер, О. Коши, С. Пуассон, А.Н. Крылов, В.Л. Кирпичев, С.П. Тимошенко, Сен-Венан и др.

Основные положения сопротивления материалов опираются на законы и теоремы общей механики и прежде всего на законы статики. В отличие от теоретической механики сопротивление материалов рассматривает задачи, в которых главное значение имеют свойства материала. Поэтому теоретический курс обязательно опирается на экспериментальные исследования механических свойств материалов.

1.2. Основные критерии работоспособности элементов конструкций

Любая конструкция состоит из деталей. Требования, предъявляемые к детали, без выполнения которых ее нормальная работа невозможна, называются **основными критериями работоспособности**. К ним относятся: *прочность, жесткость, устойчивость, износостойкость, виброустойчивость, теплостойкость* и др. Для конкретной детали значение критерия определяется условиями ее работы. Так, для стержней болтов главным критерием является ее прочность; для валов коробок передач, редукторов – жесткость; для стоек, колонн – устойчивость; для ходовых винтов – износостойкость и т. д. Следовательно, работоспособность деталей машин и элементов инженерных сооружений обеспечивается выбором материала и расчетом их размеров по соответствующим критериям работоспособности. Для деталей общего машиностроения основными критериями работоспособности являются прочность, жесткость и устойчивость.

Прочностью называется способность деталей и элементов инженерных сооружений воспринимать внешние нагрузки без разрушения. В расчетах оценка прочности производится путем сравнения наибольших расчетных напряжений σ_{\max} , рабочих нагрузок F_p с их допускаемыми значениями $[\sigma]$, $[F]$:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad F_p \leq [F]. \quad (1.1)$$

Условимся все допускаемые величины записывать в квадратных скобках.

Жесткостью называется способность деталей и элементов инженерных сооружений сопротивляться изменению первоначальных размеров и формы, вызываемых действием внешних нагрузок. В расчетах оценка жесткости производится путем сопоставления расчетных деформаций (прогибов u , углов поворота Θ , углов закручивания φ°) с допускаемыми:

$$u \leq [u]; \Theta \leq [\Theta]; \varphi^\circ \leq [\varphi^\circ]. \quad (1.2)$$

Допускаемые значения устанавливаются на основе практики эксплуатации однотипных изделий.

Устойчивость характеризует способность конструкции сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия. При расчетах на устойчивость действующая нагрузка не должна превышать величины допускаемой критической нагрузки:

$$F \leq [F_{кр}], \quad (1.3)$$

где $[F_{кр}] = F_{кр}/n_y$, $F_{кр}$ - критическая нагрузка, принимаемая для конструкции предельной; n_y - коэффициент безопасности по устойчивости.

Необходимо отметить, что прочность и жесткость - понятия различные. Прочность определяется напряжением, вызывающим разрушение материала, жесткость - способностью тела изменять форму и размеры. Поэтому утверждать, что если тело прочнее, то оно и жестче, нельзя. Часто наблюдается обратная картина. Например, капроновая нить по своей прочности при одинаковых размерах превосходит алюминиевую проволоку, но по жесткости значительно ей уступает; прочность каната при различной длине одинакова, жесткость же с увеличением длины уменьшается; если прочность коленчатого вала будет обеспечена, а жесткость его будет недостаточной, то это приведет к быстрому разрушению двигателя или сделает его работу невозможной. Таким образом, обеспечение достаточной прочности деталей конструкции не гарантирует качества изделия, важно еще, чтобы была обеспечена требуемая жесткость каждой детали. На практике под термином «расчет на прочность» понимается гарантия от разрушения, а под термином «расчет на жесткость» - ограничение деформации.

Расчет элементов инженерных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость составляет содержание курса «Сопротивление материалов».

Таким образом, сопротивление материалов – это наука, занимающаяся разработкой методов расчета деталей и элементов инженерных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

1.3. Расчетная модель

Сопротивление материалов – прикладная дисциплина, существенно отличающаяся от других математических дисциплин. Сущность этих отличий удобно показать на элементарной практической задаче. Пусть требуется определить площадь фигуры, изображенной на рис. 1.1а. Так как внешне фигура напоминает круг, то можно, измерив ее в разных направлениях, найти средний диаметр, по которому затем вычислить площадь. В этом случае на точность результата кроме погрешностей измерения будет влиять погрешность, связанная с выбором геометрической формы фигуры. Мы могли выбрать другую геометрическую форму, например эллипс или многоугольник, тогда получили бы другое, но близкое значение площади. Значит, при решении практических задач ответ зависит от того, какой метод, какая геометрическая модель будут взяты за основу. Поэтому в сопротивлении материалов расчет любого реального объекта начинается с выбора расчетной модели или с выбора расчетной схемы, для чего нужно произвести схематизацию объекта, т. е. установить, что для исследуемого объекта является существенным, основным, и какие факторы являются несущественными, не влияющими заметно на работу конструкции. Например, при расчете каната грузоподъемной машины существенными будут вес груза и ускорение, с которым он поднимается; несущественными – сопротивление воздуха, изменение температуры и т. д.

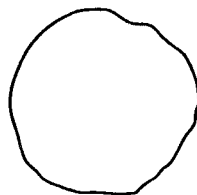


Рис. 1.1а

Реальный объект, освобожденный от несущественных факторов, называется **расчетной моделью** или **расчетной схемой**.

Расчетная модель (рис. 1.2) включает модель материала, модель формы и модель нагружения.

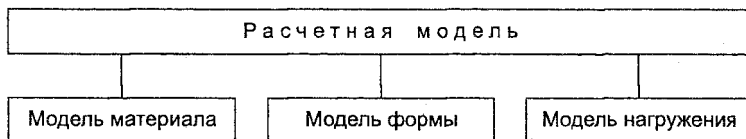


Рис. 1.2

Она должна, с одной стороны, как можно ближе отражать действительную работу объекта, а с другой - быть доступной для практического расчета.

В сопротивлении материалов в отличие от физики производится схематизация свойств материала. Материал рассматривается как сплошная среда, заполняющая весь объем тела без пустот и разрывов. Среда принимается идеально линейно-упругой, однородной и изотропной, имеющей с реальным материалом одинаковые свойства. Под однородностью понимается независимость свойств среды от размеров выделенной частицы. Изотропность - одинаковость свойств по всем направлениям. Понятие сплошной среды позволяет при решении задач использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

Детали машин и элементы инженерных конструкций имеют разнообразную форму. Поэтому при расчете их геометрическую форму приводят к простейшей схеме *бруса*, *оболочки* и *пластины*, т. е. производится *схематизация геометрии реального объекта*.

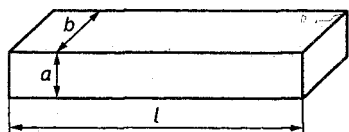


Рис. 1.3

Брусом называется тело, у которого один размер (длина) много больше двух других (рис. 1.3).

В зависимости от формы геометрической оси бруса делятся на прямые и кривые.

Брус с прямолинейной осью называется **стержнем**. Брус, работающий на изгиб, называется **балкой***. Брусья могут иметь разные поперечные сечения: в виде квадрата, круга, прямоугольника, двутавра, швеллера и т. д.

Под **оболочкой** понимается тело, ограниченное криволинейной поверхностью, у которого один размер (толщина) меньше

* Слово «балка» на староанглийском языке означает деревянный брус, часто даже целый ствол дерева. В настоящее время балки преимущественно делают из стали и железобетона.

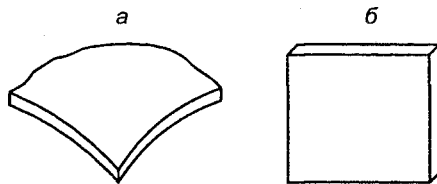


Рис. 1.4

двух других (рис. 1.4, *а*). Плоская оболочка называется **пластиной** (рис. 1.4, *б*).

Внешние нагрузки, действующие на тело, делятся на *поверхностные* и *объемные*.

Поверхностные силы распределяются по поверхности или линии. Они характеризуются интенсивностью и имеют размерность силы на площадь или силы на длину. Если размеры площади, на которую действуют поверхностные силы, малы по сравнению с размерами тела, то поверхностные силы заменяют одной силой, которую называют **сосредоточенной** и считают приложенной к точке.

Объемные силы приложены к каждой частице тела. Это силы тяжести, силы инерции.

При построении модели нагружения необходимо учитывать кроме величины и характер изменения внешних сил во времени, определяемый условиями работы конструкции.

При решении практических задач расчета деталей машин и элементов инженерных сооружений на прочность в сопротивлении материалов наряду с необходимыми упрощениями, связанными с выбором расчетной схемы, используются еще несколько общих предпосылок, или принципов. Под **принципом** понимается *основополагающее и недоказуемое в общем виде утверждение или положение, лежащее в основе подхода к решению и анализу задачи*. Такими принципами являются: принцип суперпозиции, или принцип независимости действия сил; принцип начальных размеров и принцип Сен-Венана¹.

Принцип независимости действия сил указывает, что общий результат (эффект) от действия нескольких сил равен сумме результатов (эффектов) от действия каждой силы, взятой в отдельности. При этом общий результат действия сил не зависит от порядка их приложения. В соответствии с данным принципом напряжения и перемещения, возникающие в теле от действия

нескольких сил, можно определять как их сумму от действия каждой отдельной силы. *Принцип независимости действия сил применим только для линейных систем; если система нелинейная, то к ней применять этот принцип нельзя.*

Принцип начальных размеров следует из того очевидного положения, что при нагружении твердого тела его геометрические размеры и форма изменяются незначительно. Согласно этому принципу, при составлении уравнений равновесия деформированного тела можно пренебречь его деформацией и рассматривать тело как жесткое, недеформированное, имеющее те же размеры, какие оно имело до нагружения. Принцип начальных размеров не применим к мгновенно изменяемым системам, которые в некотором положении допускают перемещение элементов, не сопровождающиеся деформациями.

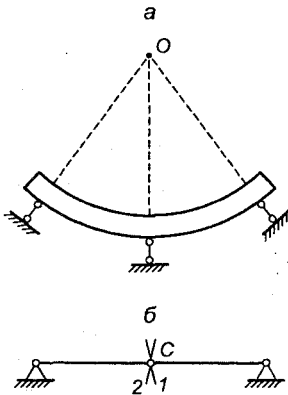


Рис. 1.5

Мгновенно изменяемая система получается тогда, когда направления всех связей пересекаются в одной точке (рис. 1.5, а) или когда стержневая система имеет три шарнира, расположенных на одной прямой (рис. 1.5, б).

Плоский блок (см. рис. 1.5, а) обладает мгновенной подвижностью, так как допускает в первый момент приложения нагрузки небольшой поворот относительно точки O . Стержневая система (см. рис. 1.5, б) имеет в точке C общую касательную к окружностям 1 и 2, по которым перемещаются концы стержней. Таким образом, шарнир в точке C допускает бесконечно малое перемещение общей точки C без изменения длины соединенных элементов. В системе, изображенной на рис. 1.6, стержни расположены так, что общая касательная в шарнире C отсутствует. Поэтому бесконечно малое перемещение общей точки C невозможно.

При действии нагрузок мгновенно изменяемые системы не находятся в равновесии. Уравнения равновесия для них не удовлетворяются. Опорные реакции и усилия в элементах таких систем имеют бесконечно большие значения или становятся неопределимыми. Например, система стержней, изображен-

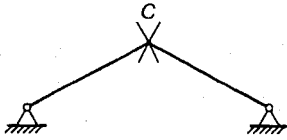


Рис. 1.6

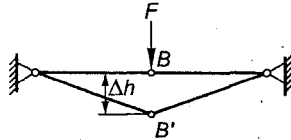


Рис. 1.7

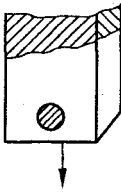


Рис. 1.8

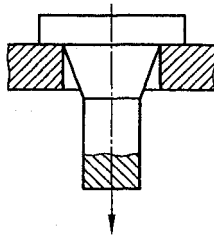


Рис. 1.9

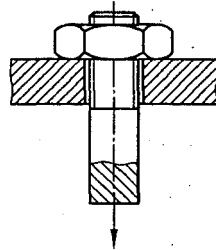


Рис. 1.10

ная на рис. 1.7, при любой малой силе F в начальном состоянии, когда три шарнира располагаются на одной прямой, не находится в равновесии, а обладает мгновенной подвижностью, в результате чего шарнир B переместится на некоторую величину Δh .

Мгновенно изменяемые, а также близкие к ним системы не должны использоваться в качестве инженерных конструкций.

Принцип Сен-Венана утверждает, что особенности приложения внешних сил к телу проявляются в малом объеме тела вокруг нагруженного участка на расстояниях, не превышающих линейных размеров поперечного сечения тела. Теоретического доказательства принципа Сен-Венана не имеет, но его справедливость подтверждается многочисленными экспериментальными исследованиями. Согласно принципу Сен-Венана, для всех случаев нагружения, представленных на рис. 1.8, 1.9, 1.10, напряженное состояние будет различным только в незаштрихованной части.

Напряженное состояние в заштрихованной части стержня будет во всех случаях одним и тем же - состоянием простого растяжения.

Принцип Сен-Венана имеет большое практическое значение, так как позволяет исключить область местных напряжений и значительно упростить решения прочностных задач.

1.4. Метод сечений. Определение внутренних силовых факторов через внешние силы

Целостность твердого тела обуславливается наличием сил взаимодействия между его частицами. При деформации тела данные силы изменяются. Разрушение означает преодоление внутренних связей между частями тела. При проведении расчетов на прочность необходимо знать внутренние силы, возникающие в элементе конструкции при нагружении, для чего их необходимо перевести в категорию внешних сил. Единственным методом решения этой задачи является **метод сечений**.

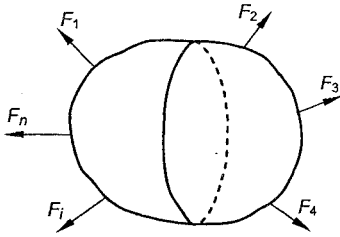


Рис. 1.11

Рассмотрим твердое тело, на которое действует произвольная система внешних сил F_1, F_2, \dots, F_n (рис. 1.11), удовлетворяющая условиям равновесия. Мысленно разрежем тело плоскостью на две части.

Отбросим одну часть, например правую, и рассмотрим равновесие оставшейся левой части. Чтобы она находилась в равновесии, необходимо действие отброшенной части на оставшуюся заменить в сечении силами. Данные силы являются внутренними. В другом сечении они будут другими. По принципу действия и противодействия внутренние силы взаимны. Правая часть действует на левую так же, как левая на правую. Внутренние силы считаются поверхностными, т. е. принимается, что частицы, расположенные за сечением, во взаимодействии не участвуют.

Таким образом, метод сечений позволяет обнаруживать внутренние силы и рассматривать их как внешние по отношению к оставшейся части тела.

Используя правила статики, систему внутренних сил можно привести к любой точке сечения. В сопротивлении материалов принято систему внутренних сил приводить к центру тяжести сечения (рис. 1.12). Выберем декартову систему координат с началом в центре тяжести сечения. Ось x направим перпендикулярно к сечению, а оси y и z расположим в плоскости сечения. В результате приведения получим главный вектор \bar{F}_c и

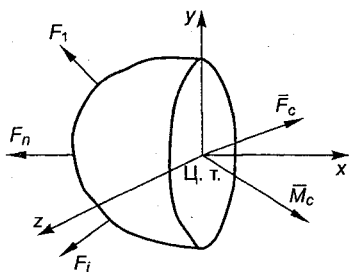


Рис. 1.12

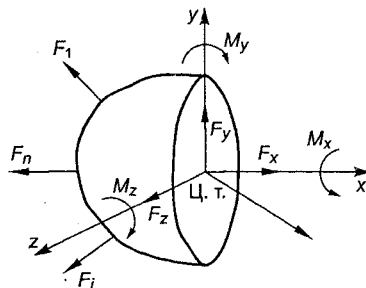


Рис. 1.13

главный момент \bar{M}_c . Разложив главный вектор и главный момент по осям координат, получим три силы и три момента F_x , F_y , F_z , M_x , M_y , M_z (рис. 1.13). Эти составляющие, представляющие скалярные проекции векторов, обозначаются специальными буквами и называются **внутренними силовыми факторами**. $F_x = N$ называется **продольной** или **нормальной силой**; $F_y = Q_y$ и $F_z = Q_z$ называются **поперечными силами**; $M_x = T$ называется **крутящим моментом**; M_y и M_z называются **изгибающими моментами** относительно осей y и z .

Так как оставшаяся часть находится в равновесии, то для нее в общем случае можно составить шесть уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} - N = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} - Q_y = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} - Q_z = 0; \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^n m_x(F_i) - T = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_y(F_i) - M_y = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_z(F_i) - M_z = 0.$$

Из уравнений (1.4) следует, что

$$N = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad Q_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad Q_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}; \quad T = \sum_{i=1}^n m_x(F_i);$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_y(F_i); \quad M_z = \sum_{i=1}^n m_z(F_i).$$

Таким образом, нормальная сила N в поперечном сечении равна алгебраической сумме проекций на ось x всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела; поперечные силы

Q_y и Q_z в сечении соответственно равны алгебраической сумме проекций на оси y и z , расположенные в рассматриваемом сечении, всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела; крутящий момент T в поперечном сечении равен алгебраической сумме моментов относительно оси x всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела; изгибающие моменты M_y и M_z в сечении соответственно равны алгебраической сумме моментов относительно осей y и z рассматриваемого сечения всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела. Естественно, результаты будут одинаковыми независимо от того, какая часть рассеченного тела рассматривается.

Знаки внутренних силовых факторов принято определять направлением данных факторов относительно поперечного сечения, к которому они приложены, что соответствует характеру деформаций и действующим в сечении элементарным силам.

Нормальная сила, направленная от сечения, вызывает в нем растяжение материала и считается *положительной*, а направленная к сечению – вызывает сжатие материала и считается *отрицательной*.

Поперечная сила считается *положительной*, если внешние силы стремятся вращать отсеченную часть бруса (рамы) относительно проведенного сечения по часовой стрелке; если внешние силы стремятся вращать отсеченную часть против часовой стрелки, то поперечная сила считается *отрицательной*.

Изгибающий момент в сечении от внешних сил, вызывающих сжатие верхних волокон балки или сжатие наружных волокон рамы, считается *положительным*, а изгибающий момент в сечении от внешних сил, вызывающих сжатие нижних волокон балки или внутренних волокон рамы, – *отрицательным*. Для стержней, расположенных внутри рамы, знаки изгибающим моментам не присваиваются, а эпюры строятся на сжатых волокнах стержней. Правило знаков для N , Q и M показано на рис. 1.14.

Из него следует, что положительная нормальная сила вызывает растяжение элемента; положительная поперечная сила

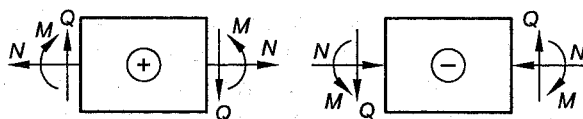


Рис. 1.14

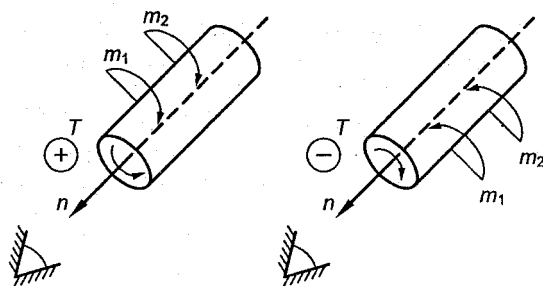


Рис. 1.15

стремится вращать элемент по часовой стрелке; положительный изгибающий момент вызывает сжатие верхних волокон элемента.

Крутящий момент в сечении считается *положительным*, когда скручивающие моменты от внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса, направлены по часовой стрелке, если смотреть на сечение со стороны внешней нормали; если скручивающие моменты направлены против часовой стрелки, то крутящий момент в сечении считается *отрицательным* (рис. 1.15).

Если внешние силы, включая опорные реакции, известны, то уравнения (1.4) определяют все внутренние силовые факторы в сечении.

В соответствии с наименованием силовых факторов производится классификация видов нагружения. Нагружение называется **простым**, если в поперечных сечениях элемента конструкции возникает только один внутренний силовой фактор. Простыми видами нагружения являются: *растяжение* (сжатие) – в поперечных сечениях элемента возникает только нормальная (продольная) сила; *кручение* – в поперечных сечениях элемента возникает только крутящий момент; *чистый изгиб* – в поперечных сечениях элемента возникает только изгибающий момент; *сдвиг* – в поперечных сечениях элемента возникает только поперечная сила.

Нагружение называется **сложным** (комбинированным), если в поперечных сечениях элемента одновременно возникают несколько силовых факторов. Комбинированными видами нагружения будут: *поперечный изгиб* – в поперечных сечениях одновременно с изгибающим моментом возникает еще попереч-

ная сила; *изгиб с кручением* – в поперечных сечениях наряду с изгибающим моментом возникает крутящий момент и т. д.

Если в поперечных сечениях элемента одновременно действуют все внутренние силовые факторы, то считают, что имеет место **общий случай нагружения**.

Введение внутренних силовых факторов позволяет все разнообразие действующих внешних нагрузок и геометрических форм элементов конструкций привести к сравнительно небольшому количеству видов нагружения. Чтобы определить вид нагружения элемента конструкции или отдельного участка, необходимо, используя метод сечений, установить, какие внутренние силовые факторы возникают в его поперечных сечениях.

1.5. Эпюры внутренних силовых факторов

Внутренние силовые факторы при переходе от сечения к сечению, как правило, изменяют свою величину. Для проведения расчетов на прочность необходимо знать сечения, в которых внутренние силовые факторы достигают максимального значения. Такие сечения называются **опасными**. Отыскать опасные сечения, установить действующие максимальные значения внутренних сил и моментов помогает построение **эпюр**. Эпюрами называются графики, построенные по уравнениям (1.4) и показывающие как изменяются внутренние силовые факторы в сечениях по длине бруса (балки).

Построение эпюр начинается с определения опорных реакций, которые характеризуют взаимодействие рассматриваемого тела с другими телами и являются внешними силами. В задачах, связанных с расчетом на прочность, правильное определение величин и направлений реакций опор имеет первостепенное значение и должно подвергаться обязательной проверке. Величины опорных реакций находятся из условия равновесия конструкции как свободного тела. Составляющие (проекции) неизвестных реакций опор в общем случае удобно направлять по положительным направлениям осей координат. Если в результате решения составляющая окажется отрицательной, это значит, что сила в действительности направлена в другую сторону и ее направление необходимо заменить на обратное. При составлении уравнений равновесия стремятся, чтобы каждая неизвестная составляющая реакций определялась независимо от других из одного уравнения. Например, при определении опорных реакций балок со свободно опертыми концами целе-

сообразно составлять два уравнения моментов относительно опорных шарниров и уравнение проекций на горизонтальную ось x . В этом случае каждая неизвестная составляющая реакций определяется независимо. Проверка правильности определения опорных реакций производится с использованием уравнения проекций сил на вертикальную ось. Заметим, что для консольных балок определение опорных реакций необязательно, начинать строить эпюры Q и M следует со свободного конца балки. Внутренние силовые факторы в поперечных сечениях плоских кривых брусьев определяются по тем же правилам, что и для рам. Когда ось кривого бруса представляет собой дугу окружности, положение поперечного сечения удобно определять при помощи **полярной системы координат**. При действии на кривой брус равномерно распределенной нагрузки следует отдельно рассматривать проекции нагрузки на направление касательной и нормали к оси бруса в данном сечении.

При построении эпюр внутренних силовых факторов их ординаты откладываются перпендикулярно геометрической оси бруса, при этом у балок положительные ординаты эпюр изгибающих моментов и поперечных сил откладываются вверх от оси балки, отрицательные – вниз; у рам положительные ординаты эпюр изгибающих моментов и поперечных сил откладываются с наружной стороны, отрицательные – с внутренней стороны элементов рамы. Таким образом, эпюра изгибающих моментов всегда строится со стороны сжатых волокон. Для стержней, расположенных внутри рамы, ординаты эпюр изгибающих моментов откладываются со стороны сжатых волокон, при этом знаки на эпюре не проставляются; положительные ординаты эпюры поперечных сил откладываются с левой стороны, а отрицательные – с правой стороны стержней.

Ординаты эпюр нормальных сил откладываются симметрично по обе стороны элементов рамы с указанием знака.

1.6. Соотношение между нагрузкой, нормальной и поперечной силами, изгибающим моментом при растяжении стержней, изгибе балок и криволинейных брусьев

Рассмотрим элемент балки длиной dx при действии на него распределенной нагрузки (рис. 1.16, *a*), сосредоточенной силы (рис. 1.16, *b*) и момента пары сил (рис. 1.16, *в*).

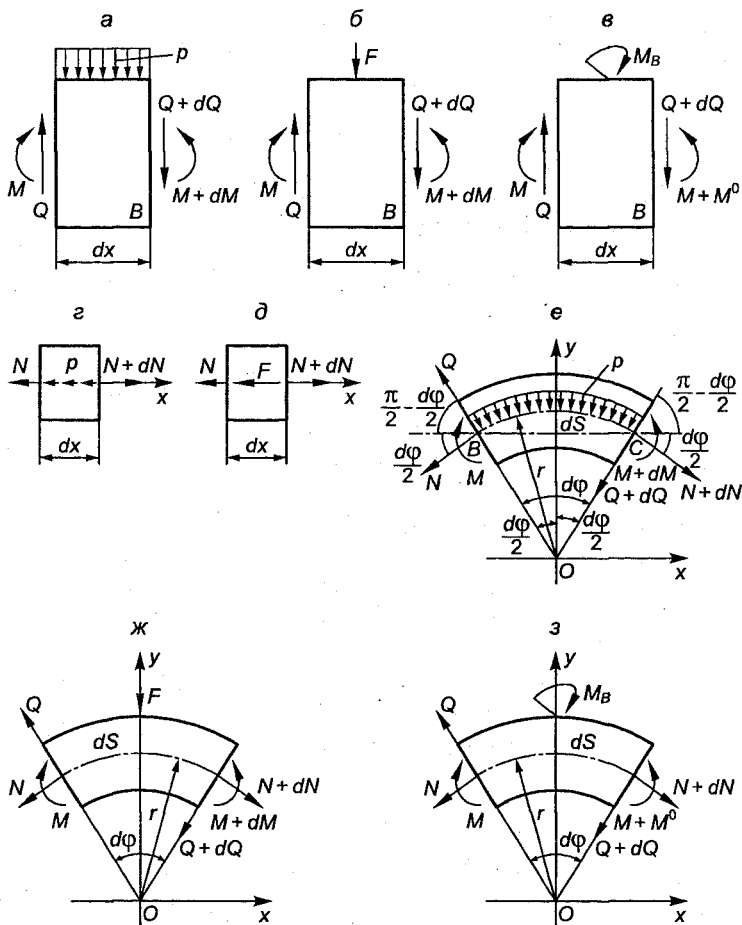


Рис. 1.16

На длине dx нагрузку можно считать равномерно распределенной интенсивностью p (см. рис. 1.16, а), также считаем, что в сечениях действуют положительные поперечные силы и изгибающие моменты. Так как в общем случае поперечная сила и изгибающий момент зависят от координаты x , то на правой грани элемента как поперечная сила, так и изгибающий момент получают приращение dQ и dM . Поскольку элемент находится в равновесии, то, приравнявая сумму проекций всех сил

на вертикальную ось и сумму моментов сил относительно точки B нулю, получим

$$Q - p dx - Q - dQ = 0; M + Q dx - p \frac{dx^2}{2} - M - dM = 0.$$

Откуда, после упрощений и отбрасывания величин второго порядка малости, будем иметь

$$dQ/dx = -p; \quad (1.5)$$

$$dM/dx = Q. \quad (1.6)$$

Таким образом, производная от поперечной силы по длине бруса равна интенсивности внешней распределенной нагрузки, а производная от изгибающего момента по длине бруса равна поперечной силе. Из уравнений (1.5) и (1.6) следует, что если на участке $p = 0$, то поперечная сила Q постоянна, если на участке поперечная сила Q равна нулю, то изгибающий момент M постоянен.

Пусть теперь на элемент бруса действует сосредоточенная нагрузка (см. рис. 1.16, б). Приравнивая нулю сумму проекций всех сил на вертикальную ось и сумму моментов сил, считая F приложенной в середине элемента относительно точки B , найдем

$$Q - F - Q - dQ = 0; M + Q dx - F \frac{dx}{2} - M - dM = 0.$$

Откуда

$$dQ = -F; \quad (1.7)$$

$$dM/dx = Q - F/2. \quad (1.8)$$

Из уравнений (1.7), (1.8) следует, что поперечная сила при прохождении через сечение, в котором приложена сосредоточенная сила, скачкообразно изменяется на величину, равную этой силе, а изгибающий момент делает излом (наблюдается разрыв производной функции).

Рассмотрим элемент бруса, когда на него действует сосредоточенный момент M_B (см. рис. 1.16, в). Из уравнения проекций на вертикальную ось получим

$$dQ = 0. \quad (1.9)$$

Сумма моментов всех сил относительно точки B равна

$$M + M_B + Qdx - M - M^0 = 0.$$

Откуда, пренебрегая членом Qdx как малой величиной высшего порядка, найдем

$$M^0 = M_B. \quad (1.10)$$

Уравнения (1.9), (1.10) указывают, что поперечная сила при переходе через сечение, в котором приложен сосредоточенный момент, остается постоянной, а изгибающий момент скачкообразно изменяется на величину, равную приложенному моменту.

Пусть на элемент по оси действует распределенная нагрузка $P(x)$, интенсивность которой на длине dx можно принять постоянной, равной p (рис. 1.16, z). Считаем, что в поперечных сечениях действуют положительные нормальные силы N и $N+dN$.

Запишем уравнение равновесия элемента в виде суммы проекций сил на ось x :

$$\sum X = -N + N + dN - p dx = 0.$$

Откуда

$$dN/dx = p. \quad (1.11)$$

Производная нормальной силы по длине стержня равна интенсивности приложенной нагрузки. Из уравнения (1.11) следует, что если на участке стержня распределенная нагрузка отсутствует, то нормальная сила будет постоянной.

Теперь рассмотрим равновесие элемента, когда к нему приложена сосредоточенная сила F (рис. 1.16, δ).

Сумма проекций сил на ось x будет равна

$$-N + N + dN - F = 0.$$

Из уравнения получим

$$dN = F. \quad (1.12)$$

Таким образом, в сечении, в котором приложена сосредоточенная сила, эпюра нормальных сил делает скачок, по величине равный этой силе.

Выделим двумя радиальными сечениями, расположенными под углом $d\varphi$, элемент криволинейного бруса длиной dS . Пусть на него действует распределенная по оси бруса нагрузка интенсивностью p . На длине dS нагрузку будем считать равномерно

распределенной интенсивностью p , а радиус кривизны бруса r постоянным (рис. 1.16, e).

Пусть в поперечных сечениях действуют положительные внутренние силовые факторы N , Q , M , тогда в правом сечении элемента внутренние силовые факторы получают соответствующие приращения dN , dQ , dM . Составим уравнения равновесия элемента в виде суммы проекций сил на горизонтальную ось x и вертикальную ось y и суммы моментов сил относительно точки O .

$$\begin{aligned} \sum X = & -Q \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{d\varphi}{2}\right) - N \cos\frac{d\varphi}{2} - (Q + dQ) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{d\varphi}{2}\right) + \\ & + (N + dN) \cos\frac{d\varphi}{2} = 0, \end{aligned}$$

или

$$Q \sin\frac{d\varphi}{2} + N \cos\frac{d\varphi}{2} + (Q + dQ) \sin\frac{d\varphi}{2} - (N + dN) \cos\frac{d\varphi}{2} = 0. \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \sum Y = & Q \cos\frac{d\varphi}{2} - N \sin\frac{d\varphi}{2} - (Q + dQ) \cos\frac{d\varphi}{2} - \\ & - (N + dN) \sin\frac{d\varphi}{2} - pBC = 0; \end{aligned} \quad (б)$$

$$\sum m_O = -Nr + M - M - dM + Nr + dNr = 0. \quad (в)$$

Так как угол $d\varphi$ мал, то можно принять

$$\sin\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}; \quad \cos\frac{d\varphi}{2} = 1.$$

Длина BC вычисляется следующим образом:

$$BC = 2r \sin\frac{d\varphi}{2} = rd\varphi. \quad (г)$$

Подставляя в уравнения (а), (б), (в) принятые значения тригонометрических функций и пренебрегая величинами второго порядка малости, после преобразования получим

$$Qd\varphi - dN = 0; \quad (д)$$

$$dQ + (N + pr)d\varphi = 0; \quad (е)$$

$$dM - rdN = 0. \quad (ж)$$

Подставляя в (ж) значение dN из (д), найдем

$$dM - Qrd\varphi = 0. \quad (3)$$

Из уравнений (д), (е), (з) получим следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dN}{d\varphi} = Q; \quad (1.13)$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} = -(N + pr); \quad (1.14)$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = Qr, \text{ или } \frac{dM}{dS} = Q. \quad (1.15)$$

Таким образом, если на участке $Q = 0$, то нормальная сила N и изгибающий момент M будут постоянными. Из (1.15) также следует, что связь поперечной силы с углом между касательными, проведенными в сечении к эпюре изгибающих моментов и к оси бруса, отсутствует.

Пусть на элемент кривого бруса действует сосредоточенная нагрузка F , приложенная в середине элемента (рис. 1.16, ж). Рассматривая уравнения равновесия (д), (е), (ж), видим, что внешняя нагрузка вошла только в уравнение проекций на вертикальную ось y . Следовательно, в рассматриваемом случае достаточно составить уравнение проекций на вертикальную ось, так как остальные уравнения (д) и (ж) будут аналогичными.

$$\sum Y = Q \cos \frac{d\varphi}{2} - N \sin \frac{d\varphi}{2} - F - (Q + dQ) \cos \frac{d\varphi}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

После преобразования будем иметь

$$dQ = -F - Nd\varphi. \quad (1.16)$$

Так как в любом поперечном сечении сила N перпендикулярна Q , то приращение поперечной силы dQ будет определяться в сечении только силой F , т. е. поперечная сила в сечении, в котором приложена сосредоточенная сила F , скачкообразно изменяется на величину, равную этой силе.

Рассмотрим элемент кривого бруса, когда на него действует сосредоточенный момент M_B (рис. 1.16, з).

В данном случае достаточно составить уравнение моментов сил относительно точки O , так как уравнение (д) будет аналогичным, а уравнение (е) примет вид

$$dQ + Nd\varphi = 0,$$

или

$$\frac{dQ}{d\varphi} = -N. \quad (1.17)$$

$$\sum m_0 = -Nr + M + M_B + (N + dN)r - M - M^0 = 0.$$

После преобразований получим

$$M^0 = M_B. \quad (1.18)$$

Из уравнения (1.17) следует, что когда нормальная сила N на участке равна нулю, то поперечная сила будет постоянной. Уравнение (1.18) показывает, что изгибающий момент в сечении, в котором приложен сосредоточенный момент, скачкообразно изменяется на величину, равную приложенному внешнему моменту M_B .

Из соотношений (1.5) - (1.18) вытекают следующие **общие выводы о характере эпюра**, позволяющие производить проверку правильности их построения для стержней, балок, прямолинейных элементов рам и криволинейных брусьев.

Для стержней при растяжении и сжатии:

- 1) на участках, где отсутствует распределенная нагрузка, эпюра нормальных сил имеет постоянную величину;
- 2) на участках, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой постоянной интенсивности, эпюра нормальных сил будет линейной функцией;
- 3) в любом сечении интенсивность распределенной нагрузки численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к эпюре нормальных сил в этом сечении;
- 4) в сечении, в котором приложена внешняя нормальная сосредоточенная сила, на эпюре нормальных сил возникает скачок, равный по величине этой силе.

Для балок и прямолинейных элементов рам при изгибе:

- 1) на участках, где отсутствует распределенная нагрузка, эпюра поперечных сил имеет постоянную величину, а эпюра изгибающих моментов будет линейной функцией длины;
- 2) на участках, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой постоянной интенсивности, эпюра поперечных сил будет линейной функцией, а эпюра изгибающих моментов - квадратичной функцией длины;

3) на участках, где поперечная сила отсутствует, эпюра изгибающих моментов имеет постоянную величину;

4) на участках, имеющих положительную поперечную силу, при движении слева направо изгибающий момент алгебраически возрастает, а на участках, имеющих отрицательную поперечную силу, – алгебраически убывает;

5) в любом сечении ордината эпюры поперечных сил численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к эпюре изгибающих моментов в этом сечении, а интенсивность распределенной нагрузки – тангенсу угла наклона касательной, проведенной к эпюре поперечных сил. Следовательно, изгибающий момент будет иметь экстремальное значение в том сечении, где эпюра поперечных сил пересекает продольную ось; при этом, если эпюра поперечных сил меняет знак с плюса на минус, изгибающий момент имеет алгебраический максимум, если с минуса на плюс – алгебраический минимум;

6) в сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре поперечных сил возникает скачок, равный по величине приложенной силе, а на эпюре изгибающих моментов получается излом;

7) в сечениях, где приложена внешняя пара сил (сосредоточенный момент), на эпюре изгибающих моментов возникает скачок, равный по величине моменту приложенной пары.

Для криволинейных брусьев при изгибе:

1) пересечение эпюрой поперечных сил оси бруса не определяет сечений, в которых изгибающий момент имеет экстремальное значение;

2) в сечениях, где приложена пара сил (сосредоточенный момент), эпюра изгибающих моментов делает скачок, равный по величине моменту приложенной пары;

3) в сечениях, где сосредоточенная сила приложена нормально к оси кривого бруса, эпюра поперечных сил делает скачок на величину данной силы;

4) если в сечении сосредоточенная сила направлена по касательной к оси бруса, то эпюра нормальных сил делает скачок на величину этой силы;

5) на участках, где поперечная сила при отсчете углов по ходу часовой стрелки положительна, изгибающий момент алгебраически возрастает; там, где поперечная сила отрицательна, – изгибающий момент убывает.

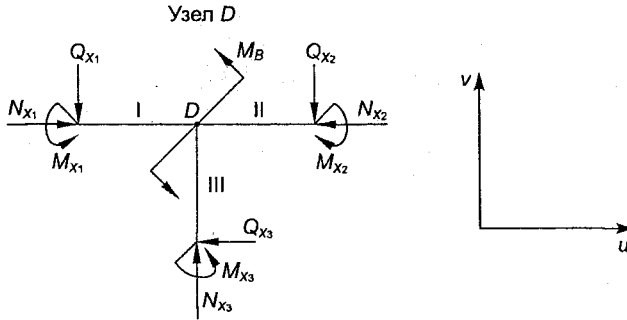


Рис. 1.17

Для рам дополнительно производится проверка выполнения уравнений равновесия, составленных для каждого узла, вырезанного из нагруженной рамы (рис. 1.17), называемая **статической проверкой**.

На рис. 1.17 Q_{x_1} , Q_{x_2} , Q_{x_3} , N_{x_1} , N_{x_2} , N_{x_3} , M_{x_1} , M_{x_2} , M_{x_3} представляют усилия и моменты, заменяющие действие на узел отброшенных стержней, принимаемые с учетом знаков, из построенных эпюр; M_B – внешний момент, приложенный к узлу. Уравнения равновесия для сил, действующих на рассматриваемый узел, запишем, проектируя все силы на оси v и u и составив уравнение моментов относительно точки D .

$$\begin{aligned} \sum v &= N_{x_3} - Q_{x_1} - Q_{x_2} = 0; \quad \sum u = N_{x_1} - N_{x_2} - Q_{x_3} = 0; \\ \sum m_D &= M_{x_2} - M_{x_3} - M_{x_1} - M_B = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Считается, что поперечные силы Q_{x_1} , Q_{x_2} , Q_{x_3} проходят через узел D и их плечи относительно точки D равны нулю, поэтому они не входят в уравнения моментов. Если к рассматриваемому узлу приложены внешние сосредоточенные силы или моменты, то они должны включаться в уравнения равновесия. Так как алгебраическая сумма моментов, действующих в каждом узле, согласно (1.19), равняется нулю, то изгибающий момент при переходе через узел, соединяющий два стержня, когда в узле не приложена внешняя пара сил (сосредоточенный момент), должен оставаться неизменным как по величине, так и по знаку.

Рассмотрим примеры построения эпюр внутренних силовых факторов для стержней, балок и рам.

Пример 1.1. Проверить справедливость уравнений (1.5), (1.6) для консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p (рис. 1.18).

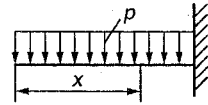


Рис. 1.18

Решение. Используя уравнение (1.4), найдем поперечную силу Q_x и изгибающий момент M_x в сечении, расположенном на расстоянии x от свободного конца балки:

$$Q_x = -px; M_x = -px^2/2.$$

Взяв производные от Q_x и M_x по x , получим

$$dQ_x/dx = -p; dM_x/dx = -px.$$

Следовательно, уравнения (1.5), (1.6) удовлетворяются.

Пример 1.2. Построить эпюру нормальных сил для стержня (рис. 1.19), нагруженного силами $F_1 = 40$ кН, $F_2 = 80$ кН, $F_3 = 50$ кН. Собственным весом стержня пренебречь.

Решение. Обозначим реакцию в защемлении через B_x . На стержень действует уравновешенная система сил, направленных по одной прямой - геометрической оси стержня. Для определения B_x составим уравнение равновесия:

$$\sum F_x = B_x + F_1 - F_2 + F_3 = 0, B_x = F_2 - F_1 - F_3 = 80 - 40 - 50 = -10 \text{ кН}.$$

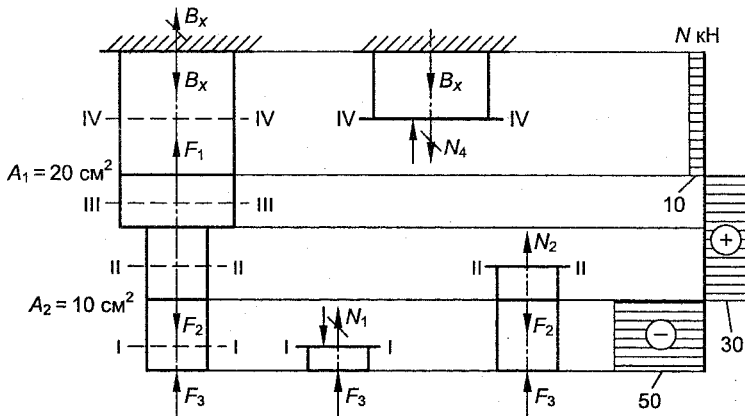


Рис. 1.19

Реакция B_x получилась отрицательной. Это значит, что в действительности она направлена вниз и на схеме ее направление необходимо изменить на обратное $B_x = 10$ кН.

Стержень имеет четыре участка, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы и изменяются размеры поперечных сечений.

Рассечем стержень мысленно сечением I-I в пределах первого участка. Отбрасывая верхнюю часть стержня и заменяя ее действие на нижнюю неизвестной нормальной силой N_1 , из уравнения равновесия получим

$$\sum F_x = N_1 + F_3 = 0, N_1 = -F_3 = -50 \text{ кН.}$$

Нормальная сила N_1 получилась отрицательной, поэтому ее направление необходимо изменить на обратное. Таким образом, сила N_1 является сжимающей, вызывает в сечении I-I сжатие материала и при построении эпюры считается отрицательной.

Аналогично поступаем относительно второго участка:

$$\sum F_x = N_2 - F_2 + F_3 = 0, N_2 = F_2 - F_3 = 80 - 50 = 30 \text{ кН.}$$

Второй участок испытывает растяжение (сила N_2 направлена от сечения и считается положительной).

На третьем участке, предполагая в сечении III-III нормальную силу N_3 положительной, найдем ее величину и действительное направление, проектируя на ось x с учетом знаков все внешние силы, приложенные к нижней части стержня:

$$\sum F_x = N_3 - F_2 + F_3 = 0, N_3 = F_2 - F_3 = 80 - 50 = 30 \text{ кН.}$$

Такой результат можно было предвидеть, так как площади сечений не входят в уравнение равновесия.

Нормальную силу N_4 в сечении IV-IV четвертого участка найдем, рассматривая равновесие верхней части стержня:

$$\sum F_x = -B_x - N_4 = 0, N_4 = -B_x = -10 \text{ кН.}$$

Нормальная сила получилась отрицательной, т. е. на этом участке брус испытывает сжатие, так как в действительности сила направлена к сечению.

Поскольку в уравнения для определения нормальных сил не входят длины участков, то нормальные силы на участках будут постоянными, а их эпюры будут представлять прямые линии, параллельные оси стержня. По полученным данным для стерж-

ня строим эпюру нормальных сил, соблюдая принятое правило знаков. Из эпюры следует, что нормальная сила на участках без учета собственного веса стержня определяется только приложенными к стержню внешними силами и не зависит от размеров его поперечного сечения. Максимальное значение нормальная сила имеет на первом участке:

$$N_{\max} = 60 \text{ кН.}$$

Пример 1.3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки (рис. 1.20), если $M = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}$, сила $F = 16 \text{ кН}$, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $p = 10 \text{ кН/м}$. Собственным весом балки пренебречь.

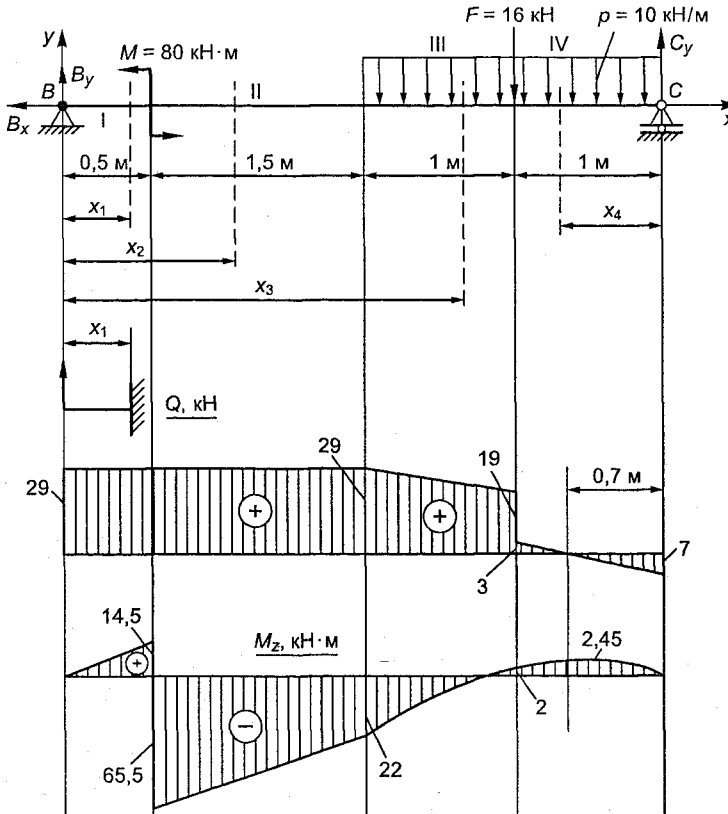


Рис. 1.20

Решение. Найдем реакции опор, для чего рассмотрим равновесие балки как свободного тела. Опора B - шарнирно-неподвижная. Реакцию опоры представим составляющими B_y и B_x , проходящими через ось шарнира. Опора C - шарнирно-подвижная. Реакция C_y такой опоры проходит через ось шарнира и направлена перпендикулярно оси балки. Таким образом, на балку действует уравновешенная плоская система сил. Для нахождения неизвестных B_x , B_y , C_y составим условия равновесия в виде двух уравнений моментов относительно опор B и C и уравнения проекций на ось x :

$$\sum m_B = C_y \cdot 4 - p \cdot 2 \cdot 3 - F \cdot 3 + M = 0;$$

$$\sum m_C = B_y \cdot 4 - M - p \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 1 = 0; \quad \sum F_x = -B_x = 0.$$

Последнее уравнение необходимо для определения составляющей B_x , которая в нашей задаче равна нулю, так как силы, действующие на балку, параллельны оси y .

Решение уравнений приводит к следующим результатам:

$$C_y = \frac{p \cdot 2 \cdot 3 + F \cdot 3 - M}{4} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 3 + 16 \cdot 3 - 80}{4} = 7 \text{ кН};$$

$$B_y = \frac{M + p \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 1}{4} = \frac{80 + 10 \cdot 2 \cdot 1 + 16 \cdot 1}{4} = 29 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности нахождения опорных реакций, составим уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось ординат:

$$\sum F_y = B_y - p \cdot 2 - F + C_y = 29 - 10 \cdot 2 - 16 + 7 = 0.$$

Реакции определены верно, и теперь мы знаем все внешние силы, действующие на балку.

Разбиваем балку на четыре участка. За границы участков принимаем сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы и момент, а также начало и конец распределенной нагрузки.

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 0,5$ м). На участке проводим произвольное поперечное сечение на расстоянии x_1 от левой опоры (точки B), принимаемой за начало координат. Мысленно отбрасываем правую часть балки и, применяя принцип независимости действия сил, с учетом принятого правила знаков составим

уравнения для Q_{x_1} и M_{x_1} . С целью применения правила знаков для изгибающего момента рекомендуется в рассматриваемом сечении мысленно ставить защемление, а действие опоры заменять реакциями:

$$Q_{x_1} = B_y = 29 \text{ кН}; M_{x_1} = B_y \cdot x_1 = 29x_1.$$

Из уравнений следует, что на первом участке поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Задавая x_1 значения, соответствующие границам участка, найдем

$$M_{x_1=0} = 0; M_{x_1=0,5} = 29 \cdot 0,5 = 14,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры на первом участке и отмечаем на них найденные Q_{x_1} и M_{x_1} .

Аналогично проводим произвольное поперечное сечение в пределах второго участка на расстоянии x_2 от начала координат. Отбрасываем мысленно правую часть балки и, рассматривая силы, действующие на оставшуюся часть, составляем уравнения для Q_{x_2} и M_{x_2} .

Участок II ($0,5 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$):

$$Q_{x_2} = B_y = 29 \text{ кН}; M_{x_2} = B_y \cdot x_2 - M = 29x_2 - 80.$$

На втором участке Q_{x_2} постоянна, не зависит от x_2 , а изгибающий момент представляет линейную функцию, для построения которой достаточно найти ее значение в двух точках, соответствующих границам участка:

$$M_{x_2=0,5} = 29 \cdot 0,5 - 80 = -65,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_{x_2=2} = 29 \cdot 2 - 80 = -22 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюры Q_{x_2} и M_{x_2} на втором участке.

Участок III ($2,0 \text{ м} \leq x_3 \leq 3,0 \text{ м}$):

$$Q_{x_3} = B_y - p \cdot (x_3 - 2) = 49 - 10 \cdot x_3;$$

$$M_{x_3} = B_y \cdot x_3 - M - \frac{p(x_3 - 2)^2}{2} = 29x_3 - 80 - \frac{10(x_3 - 2)^2}{2}.$$

Из уравнений следует, что Q_{x_3} является линейной функцией, а M_{x_3} – квадратичной функцией (параболой). Подставляя в уравнения Q_{x_3} и M_{x_3} граничные значения x_3 , получим

$$Q_{x_3=2} = 49 - 10 \cdot 2 = 29 \text{ кН}; \quad Q_{x_3=3} = 49 - 30 = 19 \text{ кН};$$

$$M_{x_3=2} = 29 \cdot 2 - 80 = -22 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{x_3=3} = 29 \cdot 3 - 80 - \frac{10(3-2)^2}{2} = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для построения параболы следует вычислить значения изгибающего момента в промежуточном сечении на участке или воспользоваться дифференциальной зависимостью между M_x и Q_x и по эпюре поперечной силы построить график функции M_x .

Построим эпюры Q_x и M_x на четвертом участке. Заметим, что начало координат фиксируется только для рассматриваемого участка, для других участков его положение может меняться по усмотрению исследователя. В нашем случае для четвертого участка начало координат удобно выбрать в точке C . Проведем сечение IV–IV на расстоянии x_4 от начала координат (точки C). Рассматривая силы, действующие на правую часть балки, составляем уравнения для Q_{x_4} и M_{x_4} .

Участок IV ($0 \leq x_4 \leq 1$ м):

$$Q_{x_4} = -C_y + px_4 = -7 + 10x_4; \quad M_{x_4} = C_y x_4 - \frac{px_4^2}{2} = 7x_4 - \frac{10x_4^2}{2}.$$

Подставляя числовые значения x_4 на границах участка, получим

$$Q_{x_4=0} = -7 \text{ кН}; \quad Q_{x_4=1} = -7 + 10 = 3 \text{ кН};$$

$$M_{x_4=0} = 0; \quad M_{x_4=1} = 7 \cdot 1 - \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Так как на четвертом участке поперечная сила Q_{x_4} непрерывно убывает и происходит смена ее знака, то в сечении, где $Q_{x_4} = 0$, эпюра моментов должна иметь экстремальное значение.

ние, вычисление которого является обязательным. Эпюра M_{x_4} будет представлять собой параболу, расположенную выпуклостью вверх. Для определения экстремального значения $M_{x_4}^{\text{екс}}$ необходимо выражение поперечной силы на четвертом участке приравнять нулю и найти координату $x_4^{\text{екс}}$ сечения, в котором изгибающий момент имеет локальный экстремум. Подставив полученное значение $x_4^{\text{екс}}$ в уравнение моментов для рассматриваемого участка, вычислить величину искомого экстремального момента:

$$Q_{x_4} = -7 + 10x_4^{\text{екс}} = 0; x_4^{\text{екс}} = 7/10 = 0,7 \text{ м};$$

$$M_{x_4}^{\text{екс}} = 7 \cdot 0,7 - \frac{10 \cdot 0,7^2}{2} = 2,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры Q_{x_4} и M_{x_4} на четвертом участке построены по полученным данным.

Контроль правильности построения эпюр по приведенным выше положениям показывает, что эпюры Q_x и M_x построены верно.

Из эпюр Q_x и M_x следует, что максимальная величина поперечной силы и максимальная величина изгибающего момента возникают в сечении, где приложен сосредоточенный момент:

$$Q_{\text{max}} = 29 \text{ кН}; M_{\text{max}} = 65,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Пример 1.4. Построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для рамы (рис. 1.21), нагруженной силой $F = 16 \text{ кН}$, равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $p = 20 \text{ кН/м}$ и парой сил с моментом $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Собственным весом элементов рамы пренебречь.

Решение. Заменяем действие опор на раму реакциями. Реакцию опоры B представляем составляющими B_y и B_x , реакцию опоры C — вертикальной силой C_y . На раму действует уравновешенная плоская система сил. Неизвестные силы B_x , B_y , C_y найдем, составляя уравнения равновесия в виде суммы моментов

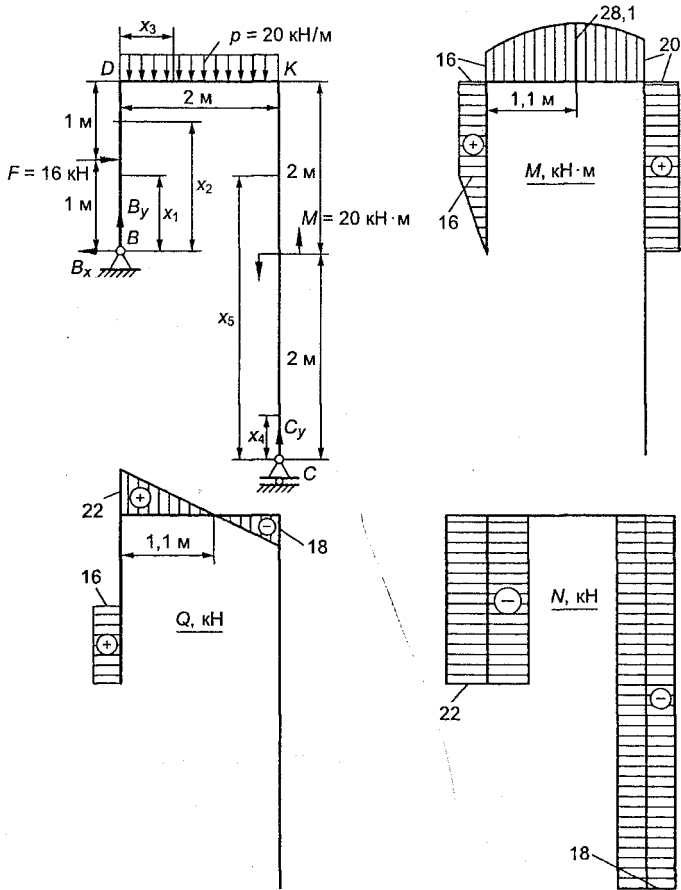


Рис. 1.21

относительно опор B и C и суммы проекций сил на горизонтальную ось:

$$\sum m_B = C_y \cdot 2 + M - p \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 1 = 0;$$

$$\sum m_C = B_y \cdot 2 + F \cdot 3 - p \cdot 2 \cdot 1 - M - B_x \cdot 2 = 0; \quad \sum F_x = F - B_x = 0.$$

Откуда получим

$$C_y = \frac{p \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 1 - M}{2} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 1 + 16 \cdot 1 - 20}{2} = 18 \text{ кН}; \quad B_x = F = 16 \text{ кН};$$

$$B_y = \frac{p \cdot 2 \cdot 1 + M + B_x \cdot 2 - F \cdot 3}{2} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 1 + 20 + 16 \cdot 2 - 16 \cdot 3}{2} = 22 \text{ кН.}$$

Составим сумму проекций сил на вертикальную ось, чтобы убедиться, что опорные реакции определены верно:

$$\sum F_y = 18 + 22 - 20 \cdot 2 = 0.$$

Рама имеет пять участков. На каждом из них проводим произвольное сечение и, рассматривая силы, действующие на отсеченную часть, составляем уравнения для нормальных и поперечных сил и изгибающих моментов, соблюдая правила знаков.

Проводим сечение на первом участке на расстоянии x_1 от опоры B и, рассматривая силы, действующие на отсеченную часть, составляем уравнения для N_{x_1} , Q_{x_1} , M_{x_1} .

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 1,0$ м):

$$N_{x_1} = -B_y = -22 \text{ кН}; Q_{x_1} = B_x = 16 \text{ кН}; M_{x_1} = B_x \cdot x_1 = 16x_1.$$

Из уравнений следует, что нормальная сила на участке постоянна и отрицательна, так как вызывает сжатие материала; поперечная сила имеет постоянное значение и положительна, так как сила B_x стремится вращать рассматриваемую часть рамы относительно сечения по часовой стрелке; изгибающий момент изменяется по линейному закону, для его определения достаточно вычислить ординаты эпюры в начале и в конце участка. Знак плюс в уравнении момента поставлен потому, что сила B_x , изгибая рассматриваемую часть рамы, вызывает сжатие наружных волокон рамы:

$$M_{x_1=0} = 0, M_{x_1=1,0} = 16 \cdot 1 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Строим эпюры N_{x_1} , Q_{x_1} , M_{x_1} на первом участке.

Проводим сечение на втором участке на расстоянии x_2 от опоры B и составляем уравнения для N_{x_2} , Q_{x_2} , M_{x_2} , соблюдая правило знаков.

Участок II ($1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$):

$$N_{x_2} = -B_y = -22 \text{ кН}; Q_{x_2} = B_x - F = 16 - 16 = 0;$$

$$M_{x_2} = B_x \cdot x_2 - F \cdot (x_2 - 1).$$

Так как M_{x_2} изменяется по линейному закону, вычислим его значения на границах второго участка:

$$M_{x_2=1} = B_x \cdot 1 = 16 \cdot 1 = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{x_2=2} = 16 \cdot 2 - 16(2-1) = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры на втором участке.

Аналогично проводим произвольное сечение в пределах третьего участка на расстоянии x_3 от узла (точки D) и, рассматривая силы, составляем уравнения для N_{x_3} , Q_{x_3} , M_{x_3} .

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 2$ м):

$$N_{x_3} = B_x - F = 16 - 16 = 0; \quad Q_{x_3} = B_y - p \cdot x_3 = 22 - 20x_3;$$

$$M_{x_3} = B_x \cdot 2 - F \cdot 1 - p \frac{x_3^2}{2} + B_y \cdot x_3 = 16 + 22x_3 - 20 \frac{x_3^2}{2}.$$

Эпюра Q_{x_3} изменяется по линейному закону, поэтому для построения достаточно вычислить ее значения на границах участка:

$$Q_{x_3=0} = 22 \text{ кН}; \quad Q_{x_3=2} = 22 - 20 \cdot 2 = -18 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент изменяется по квадратичной параболе. Подставляя в уравнение M_{x_3} значения x_3 в начале и в конце участка, получим

$$M_{x_3=0} = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{x_3=2} = 16 + 22 \cdot 2 - 40 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюру Q_{x_3} на третьем участке. Так как поперечная сила пересекает ось, то в сечении, где $Q_{x_3} = 0$, эпюра моментов должна иметь экстремальное значение. Для определения $M_{x_3}^{\text{екс}}$ необходимо приравнять нулю выражение для поперечной силы на третьем участке и найти координату $x_3^{\text{екс}}$. Подставив затем значение $x_3^{\text{екс}}$ в уравнение

моментов, вычислим величину искомого экстремального момента:

$$Q_{x_3} = 22 - 20x_3^{\text{екс}} = 0; x_3^{\text{екс}} = 22/20 = 1,1 \text{ м};$$

$$M_{x_3}^{\text{екс}} = 16 - 20 \frac{1,1^2}{2} + 22 \cdot 1,1 = 28,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По трем величинам изгибающего момента (трех точкам) строим эпюру M_{x_3} на третьем участке.

Проводим сечение на четвертом участке на расстоянии x_4 от опоры C и составляем уравнения для N_{x_4} , Q_{x_4} , M_{x_4} .

Участок IV ($0 \leq x_4 \leq 2$ м):

$$N_{x_4} = -C_y = -18 \text{ кН}; Q_{x_4} = 0; M_{x_4} = 0.$$

На четвертом участке нормальная сила постоянна и отрицательна. Участок работает только на сжатие.

Проводим сечение на пятом участке на расстоянии x_5 от опоры C и составляем уравнения для N_{x_5} , Q_{x_5} , M_{x_5} , соблюдая правило знаков.

Участок V ($2 \text{ м} \leq x_5 \leq 4$ м):

$$N_{x_5} = -C_y = -18 \text{ кН}; Q_{x_5} = 0; M_{x_5} = M = 20 \text{ кН}.$$

На пятом участке изгибающий момент постоянный и положительный.

При построении эпюр внутренних силовых факторов часто бывает удобно рассматривать отдельно каждый стержень, входящий в систему, перенося, в соответствии с положениями механики, в центр тяжести крайнего сечения все действующие силы.

В качестве примера построим эпюры внутренних силовых факторов на третьем участке. Для этого отбросим стержень BD , а все приложенные к нему силы перенесем в центр тяжести крайнего сечения (точку D) стержня DK (рис. 1.22). Проведем сечение на расстоянии x_3 от свободного конца стержня. Мысленно отбросим правую часть бруса и, рассматривая внешние силы, приложенные к оставшейся части стержня, составим выражения для внутренних силовых факторов, действующих на третьем участке:

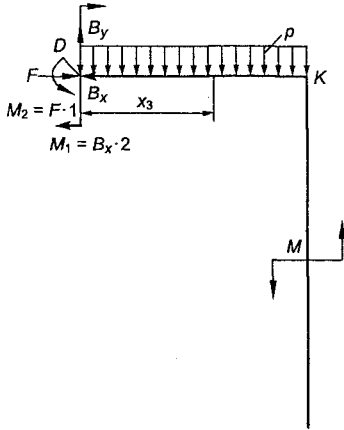


Рис. 1.22

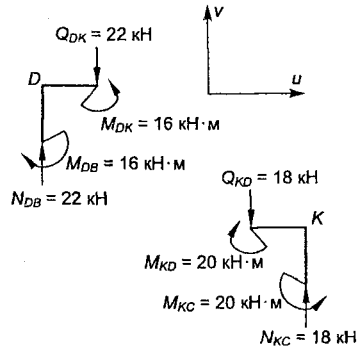


Рис. 1.23

$$N_{x_3} = B_x - F = 16 - 16 = 0; \quad Q_{x_3} = B_y - p \cdot x_3 = 22 - 20x_3;$$

$$M_{x_3} = B_x \cdot 2 - F \cdot 1 - p \frac{x_3^2}{2} + B_y \cdot x_3 = 16 + 22x_3 - 20 \frac{x_3^2}{2}.$$

Как видим, результат получили тот же.

Для проверки правильности построения эпюр необходимо рассмотреть равновесие узлов D и K (рис. 1.23). Уравнения равновесия для сил, действующих на узлы D и K , имеют следующий вид:

Узел D

$$\sum u = 0; \quad \sum v = N_{DB} - Q_{DK} = 22 - 22 = 0;$$

$$\sum m_D = M_{DB} - M_{DK} = 16 - 16 = 0.$$

Узел K

$$\sum u = 0; \quad \sum v = N_{KC} - Q_{KD} = 18 - 18 = 0;$$

$$\sum m_K = M_{KD} - M_{KC} = 20 - 20 = 0.$$

Все уравнения равновесия удовлетворяются.

Проверка правильности построения эпюр по приведенным ранее контрольным положениям также позволяет заключить, что все эпюры построены правильно.

Из эпюр внутренних силовых факторов следует, что максимальная по абсолютной величине нормальная сила $N_{\max} = 22$ кН; максимальная поперечная сила $Q_{\max} = 22$ кН; максимальный изгибающий момент $M_{\max} = 28,1$ кН·м.

Пример 1.5. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, распределенной по закону треугольника нагрузкой, если величина максимальной интенсивности нагрузки $p_0 = 16$ кН/м; длина балки $l = 1,5$ м (рис. 1.24).

Решение. Найдем опорные реакции, для чего заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой F , приложенной в центре тяжести треугольника и равной его площади:

$$F = \frac{1}{2} p_0 l = \frac{1}{2} 16 \cdot 1,5 = 12 \text{ кН.}$$

Составляем уравнения моментов сил относительно опор B и C :

$$\sum m_B = C_y \cdot 1,5 - F \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 = 0; \quad C_y = \frac{12 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5}{1,5} = 4 \text{ кН;}$$

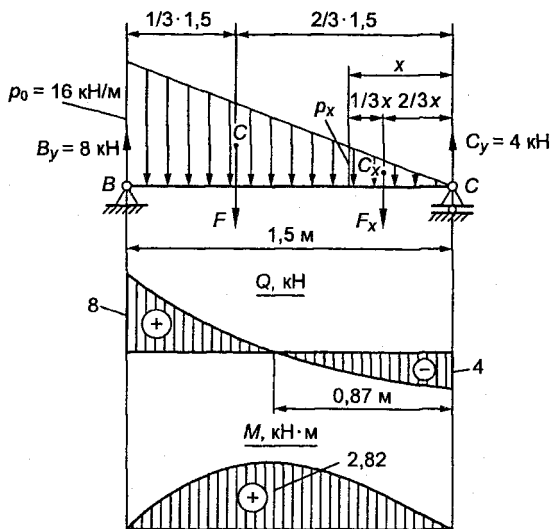


Рис. 1.24

$$\sum m_C = B_y \cdot 1,5 - F \frac{2}{3} \cdot 1,5 = 0; \quad B_y = \frac{12 \frac{2}{3} \cdot 1,5}{1,5} = 8 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum Y = B_y + C_y - F = 8 + 4 - 12 = 0.$

Построение эпюр Q и M удобно начинать с правого конца балки от опоры C , так как, начиная с левого конца балки от опоры B , нам придется определять центр тяжести трапеции.

Проведем от опоры C на произвольном расстоянии x поперечное сечение и, рассматривая правую часть балки, составим выражение для Q_x и M_x . Предварительно найдем величину интенсивности нагрузки в сечении x . Из условия подобия треугольников следует, что

$$p_x = \frac{p_0}{1,5} x = \frac{16}{1,5} x = 10,7x.$$

Заменим треугольную нагрузку на длине x равнодействующей F_x , приложенной в центре тяжести C_x треугольника:

$$F_x = \frac{1}{2} p_x x = \frac{1}{2} 10,7x \cdot x = 5,33x^2;$$

$$Q_x = -C_y + F_x = -4 + 5,33x^2;$$

$$M_x = C_y x - F_x \frac{1}{3} x = 4x - 5,33x^2 \frac{1}{3} x = 4x - 1,78x^3.$$

Из уравнений следует, что эпюра Q представляет собой квадратную параболу, а эпюра M - кубическую.

Подставляя числовые значения x на границах участка, получим

$$Q_{x=0} = -4 \text{ кН}; \quad Q_{x=1,5} = -4 + 5,33 \cdot 1,5^2 = 8 \text{ кН};$$

$$M_{x=0} = 0; \quad M_{x=1,5} = 4 \cdot 1,5 - 1,78 \cdot 1,5^3 = 0.$$

Так как поперечная сила пересекает ось x , то вычислим координату поперечного сечения от опоры C , в котором поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент имеет экстремальное значение:

$$-4 + 5,33x^2 = 0; \quad x^{\text{екс}} = \sqrt{\frac{4}{5,33}} = 0,87 \text{ м.}$$

$$M_{x=0,87}^{\max} = 4 \cdot 0,87 - 1,78 \cdot 0,87^3 = 2,82 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На рис. 1.24 представлены эпюры Q и M , построенные по уравнениям для Q_x и M_x .

Из эпюр следует, что максимальное значение изгибающий момент имеет в сечении, в котором поперечная сила равна нулю:

$$M_{\max} = 2,82 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Пример 1.6. Построить эпюры Q и M для балки с промежуточным шарниром (рис. 1.25, а).

Решение. Балка состоит из двух частей, соединенных в точке C шарниром. Так как шарнир позволяет частям балки поворачиваться относительно друг друга, то в сечении C изгибающий момент будет равен нулю. Следовательно, для определения опорных реакций к трем уравнениям равновесия дополняется условие, чтобы сумма моментов относительно точки C (шарнира) всех сил, приложенных к правой или левой частям балки, равнялась нулю. Это условие делает балку с промежуточным шарниром статически определимой. Написав четыре уравне-

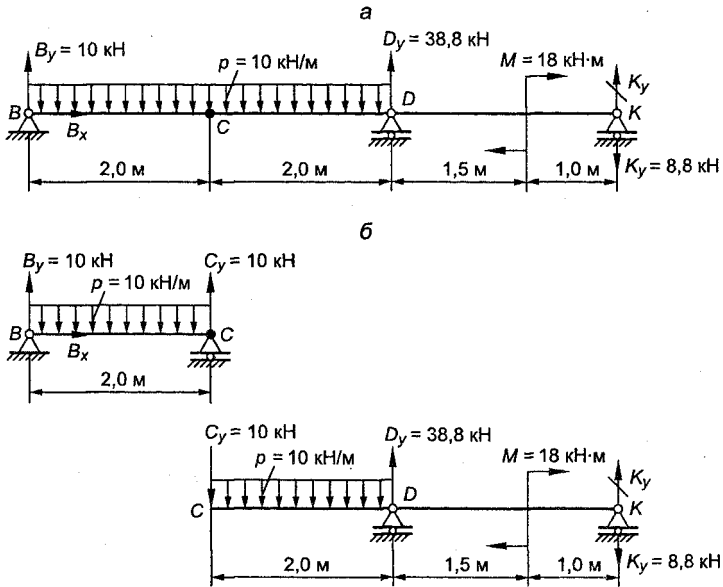


Рис. 1.25

ния: сумму проекций всех сил на горизонтальную ось, сумму моментов всех сил относительно точек B , D и сумму моментов относительно точки C сил, действующих только на левую или только на правую части балки, и решив систему этих уравнений, получим четыре реакции B_x , B_y , D_y и K_y . Так как решение системы представляет определенную трудность, то нахождение реакций можно упростить, расчленив балку по шарниру C на две части (рис. 1.25, б).

Часть балки BC в точке C опирается на конец консоли CD . Балка BC в шарнире C воспринимает реакцию C_y от консоли и взаимно давит на конец консоли такой же силой C_y .

Проектируя все силы на ось балки, получим $B_x = 0$.

Из условия равновесия части балки BC находим реакции:

$$B_y = C_y = \frac{p \cdot 2}{2} = 10 \text{ кН.}$$

Прикладывая силу C_y к концу консоли части балки CK и составляя уравнения моментов сил относительно опор D и K , найдем реакции D_y и K_y .

$$\sum m_K = D_y \cdot 2,5 + M - C_y \cdot 4,5 - p \cdot 2,0 \cdot 3,5 = 0;$$

$$D_y = \frac{10 \cdot 4,5 - 18 + 10 \cdot 2 \cdot 3,5}{2,5} = 38,8 \text{ кН;}$$

$$\sum m_D = K_y \cdot 2,5 - M + C_y \cdot 2 + p \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$K_y = \frac{18 - 10 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1}{2,5} = -8,8 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum Y = B_y - p \cdot 4,0 + D_y - K_y = 10 - 40 + 38,8 - 8,8 = 0$.

Реакции определены верно.

Изобразим балку как единое целое (рис. 1.26) с указанием приложенных сил и реакций и обычным методом построим эпюры Q и M . Необходимо отметить, что шарнир C не является точкой раздела участков, если в нем не приложена сила, изгибающий момент в шарнире должен равняться нулю.

Балка имеет три участка.

На первом участке произвольно проводим сечение x_1 и составляем уравнения Q_{x_1} и M_{x_1} .

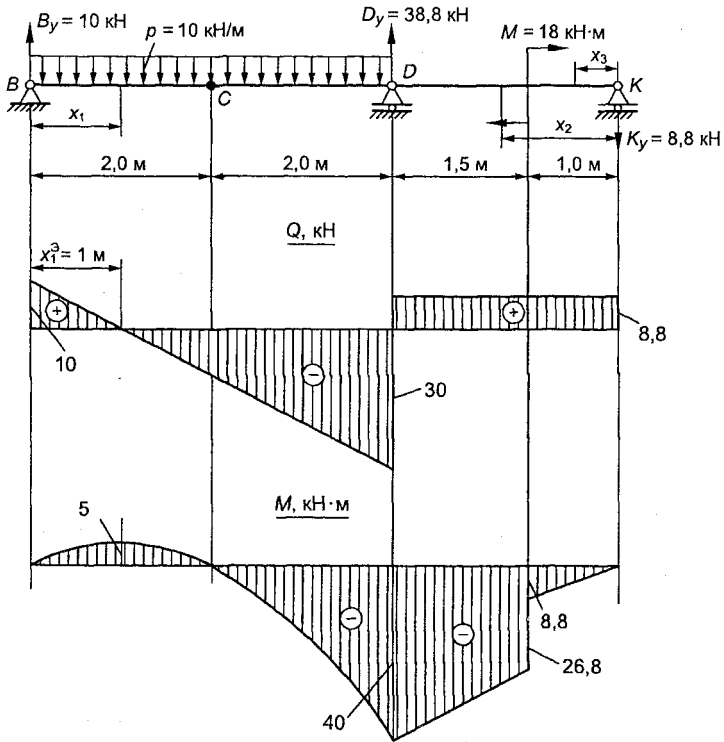


Рис. 1.26

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 4$ м):

$$Q_{x_1} = B_y - p x_1 = 10 - 10 x_1;$$

$$M_{x_1} = B_y \cdot x_1 - p \frac{x_1^2}{2} = 10 x_1 - 10 \frac{x_1^2}{2}.$$

Подставляя числовые значения x_1 на границах участка, найдем

$$Q_{x_1=0} = B_y = 10 \text{ кН}; \quad Q_{x_1=4} = 10 - 10 \cdot 4 = -30 \text{ кН}.$$

Так как на участке поперечная сила меняет знак, то в сечении, где $Q_{x_1} = 0$, изгибающий момент имеет экстремальное значение.

Найдем координату $x_1^{\text{екс}}$, где поперечная сила равна нулю:

$$Q_{x_1} = 10 - 10x_1^{\text{екс}} = 0; x_1^{\text{екс}} = 1 \text{ м};$$

$$M_{x_1=0} = 0; M_{x_1=4} = 10 \cdot 4 - 10 \frac{4^2}{2} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_1=1} = 10 \cdot 1 - 10 \frac{1^2}{2} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{x_1=2} = 10 \cdot 2 - 10 \frac{2^2}{2} = 0.$$

По полученным данным строим эпюры Q и M на первом участке. Эпюра M_x представляет собой параболу, направленную выпуклостью вверх.

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}$):

$$Q_{x_3} = K_y = 8,8 \text{ кН}, \text{ на участке } Q_{x_3} \text{ постоянна};$$

$$M_{x_3} = -K_y x_3 = -8,8x_3; M_{x_3=0} = 0; M_{x_3=1} = -8,8 \cdot 1 = -8,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По вычисленным величинам Q и M строим эпюры на третьем участке.

Участок II ($1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2,5 \text{ м}$):

$$Q_{x_2} = K_y = 8,8 \text{ кН}; M_{x_2} = -K_y x_2 - M = -8,8x_2 - 18;$$

$$M_{x_2=1} = -8,8 \cdot 1 - 18 = -26,8 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{x_2=2,5} = -8,8 \cdot 2,5 - 18 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Максимальная величина изгибающего момента и максимальная величина поперечной силы возникают в сечении D_1 :

$$M_{\text{max}} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}; Q_{\text{max}} = 30 \text{ кН}.$$

Пример 1.7. Построить эпюры внутренних силовых факторов для пространственного ломаного бруса, если $F_1 = 20 \text{ кН}$, $F_2 = 30 \text{ кН}$, $a = 3 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$ (рис. 1.27, а).

Решение. Рассматриваемый ломаный брус одним концом защемлен. В защемлении возникают три реактивные силы и три опорных момента, которые находятся из уравнений равновесия.

В данном случае построение эпюр внутренних силовых факторов удобно начинать со свободного конца, так как при этом отпадает необходимость в определении реакций.

Примем следующее положение. При переходе от одного элемента бруса к другому ось x будем совмещать с геометрической осью рассматриваемого элемента, а положительные на-

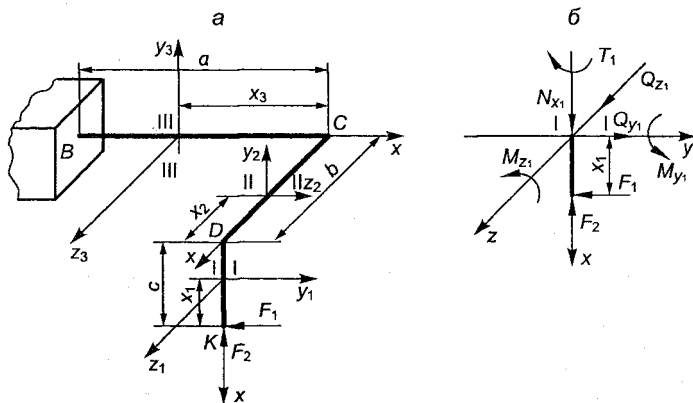


Рис. 1.27

правления осей y и z в сечении выбирать согласно расположению элемента. При построении эпюр Q, M, N сохраняются принятые правила знаков. Эпюры изгибающих моментов строятся на сжатых волокнах. Плоскости эпюр N и T выбираются произвольно; плоскости эпюр Q_y и Q_z совпадают с направлением действия поперечных сил. Когда одновременно действуют изгибающие моменты M_z, M_y и поперечные силы Q_z, Q_y , необходимо строить отдельно эпюры для каждого силового фактора.

Ломаный брус имеет три участка.

Проводим произвольное поперечное сечение в пределах первого участка на расстоянии x_1 от свободного конца бруса. Действие отсеченной части бруса на оставшуюся заменим внутренними силовыми факторами, которые найдем, рассматривая приложенные к оставшейся части силы (рис. 1.27, б).

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 1$ м):

$$N_{x_1} = -F_2 = -30 \text{ кН}; \quad Q_{y_1} = F_1 = 20 \text{ кН};$$

$$M_{z_1} = F_1 x_1 = 20 x_1; \quad M_{y_1} = 0; \quad Q_{z_1} = 0; \quad T_1 = 0.$$

Из уравнений следует, что на первом участке действуют постоянная сжимающая нормальная сила N_{x_1} , постоянная поперечная сила Q_{y_1} и изгибающий момент, меняющийся по линейному закону.

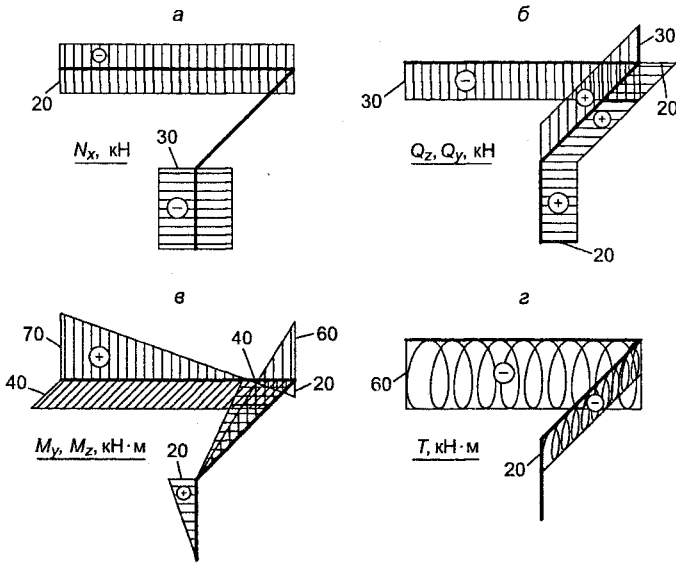


Рис. 1.28

При $x_1 = 0$ $M_{z_1} = 0$; при $x_1 = 1$ м $M_{z_1} = 20 \cdot 1 = 20$ кН·м.

Соответствующие эпюры построены на рис. 1.28, а–г.

Проводим сечение в пределах второго участка на расстоянии x_2 от узла D и составляем уравнения для внутренних силовых факторов.

Крутящий момент в сечении будем считать положительным, если внешние силы для наблюдателя, смотрящего на сечение со стороны внешней нормали, стремятся вращать рассматриваемую часть бруса по часовой стрелке.

Участок II ($0 \leq x_2 \leq 2$ м):

$$Q_{z_2} = F_1 = 20 \text{ кН}; Q_{y_2} = F_2 = 30 \text{ кН};$$

$$T_2 = -F_1 c = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кНм};$$

$$M_{y_2} = F_1 x_2 = 20 x_2; M_{z_2} = F_2 x_2 = 30 x_2.$$

На втором участке действуют постоянные поперечные силы Q_{z_2} , Q_{y_2} и крутящий момент T_2 , изгибающие моменты M_{y_2} и M_{z_2} изменяются по линейному закону от x_2 .

При $x_2 = 0$ $M_{y_2} = 0$; $M_{z_2} = 0$; при $x_2 = 2$ м, $M_{y_2} = 20 \cdot 2 = 40$ кН·м;
 $M_{z_2} = 30 \cdot 2 = 60$ кН·м.

Строим эпюры по вычисленным значениям силовых факторов.

Проводим сечение на третьем участке на расстоянии x_3 от узла C .

Отбрасывая левую часть бруса, составим уравнения для определения внутренних силовых факторов.

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 1$ м):

$$N_{x_3} = -F_1 = -20 \text{ кН}; \quad Q_{y_3} = -F_2 = -30 \text{ кН};$$

$$Q_{z_3} = 0; \quad T_3 = -F_2 b = -30 \cdot 2 = -60 \text{ кН·м};$$

$$M_{y_3} = F_1 b = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кН·м}; \quad M_{z_3} = F_2 x_3 - F_1 c = 30 x_3 - 20.$$

При $x_3 = 0$ $M_{z_3} = -20$ кН·м; при $x_3 = 3$ м $M_{z_3} = 30 \cdot 3 - 20 = 70$ кН·м.

Таким образом, в сечении III—III стержень испытывает сжатие силой N_{x_3} , сдвиг вдоль оси y , изгиб в плоскости yx , изгиб в плоскости zx и кручение.

При построении эпюр внутренних силовых факторов для пространственных систем удобно рассматривать отдельно каждый стержень, входящий в систему, перенося в центр тяжести крайнего сечения все действующие силы.

В качестве примера построим эпюры внутренних силовых факторов для стержня CB (см. рис. 1.27). Отбросим часть ломаного бруса KDC , а все приложенные к нему силы приведем к центру тяжести крайнего сечения (точка C) (рис. 1.29).

Проводим сечение на расстоянии x_3 от свободного конца стержня (точка C). Мысленно отбросим левую часть бруса и, рассматривая внешние силы, приложенные к оставшейся части, составим выражение для внутренних силовых факторов, действующих на третьем участке.

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 3$ м):

$$N_{x_3} = -F_1 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_{y_3} = -F_2 = -30 \text{ кН};$$

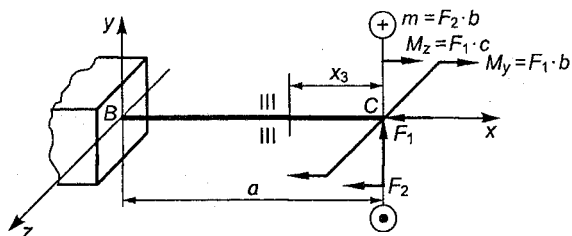


Рис. 1.29

$$Q_{z_3} = 0;$$

$$M_{z_3} = F_2 x_3 - F_1 c = 30 x_3 - 20;$$

$$M_{y_3} = F_1 b = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_3 = -m = -F_2 b = -30 \cdot 2 = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

При $x_3 = 0$ $M_{z_3} = -20$ кН·м; при $x_3 = 3$ м $M_{z_3} = 30 \cdot 3 - 20 = 70$ кН·м.

Результат получили тот же.

Пример 1.8. Стальной стержень площадью поперечного сечения $A = 5 \text{ см}^2$ зашпелен в верхнем сечении и нагружен силами $F_1 = 4000$ Н; $F_2 = 3000$ Н; $F_3 = 1500$ Н. Построить эпюру нормальных сил с учетом собственного веса. Удельный вес стали $\gamma = 0,078 \text{ Н/см}^3$ (рис. 1.30).

Решение. Определяем реакцию B_x из уравнения проекций сил на вертикальную ось.

$$\sum X = B_x + F_3 + F_2 - F_1 - A l \gamma = 0.$$

$$B_x = F_1 + A l \gamma - F_3 - F_2 = 4000 + 5 \cdot 400 \cdot 0,078 - 1500 - 3000 = -344 \text{ Н}.$$

Знак минус указывает на то, что направление силы B_x необходимо изменить на обратное.

Стержень имеет три участка.

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 1,0$ м).

Проведем на первом участке произвольное сечение x_1 и, принимая нормальную силу N_{x_1} в сечении положительной, составим уравнение проекций сил на ось x :

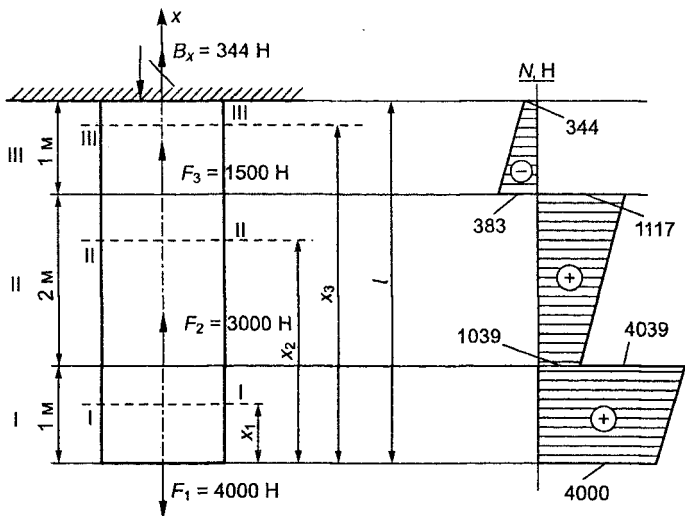


Рис. 1.30

$$N_{x_1} - F_1 - A\gamma x_1 = 0; \quad N_{x_1} = F_1 + A\gamma x_1 = 4000 + 5 \cdot 0,078 x_1.$$

Подставляем числовые значения:

$$N_{x_1=0} = 4000 \text{ H}; \quad N_{x_1=100 \text{ см}} = 4000 + 5 \cdot 0,078 \cdot 100 = 4039 \text{ H}.$$

Строим эпюру N на первом участке.

Участок II ($1 \text{ м} \leq x_2 \leq 3 \text{ м}$).

Принимая нормальную силу N_{x_2} в сечении x_2 положительной, составим уравнение проекций сил на ось x :

$$N_{x_2} + F_2 - F_1 - A\gamma x_2 = 0;$$

$$N_{x_2} = F_1 + A\gamma x_2 - F_2 = 4000 - 3000 + 5 \cdot 0,078 x_2 = 1000 + 0,39 x_2;$$

$$N_{x_2=100} = 1000 + 0,39 \cdot 100 = 1039 \text{ H};$$

$$N_{x_2=300} = 1000 + 0,39 \cdot 300 = 1117 \text{ H}.$$

Строим эпюру на втором участке.

Участок III ($3 \text{ м} \leq x_3 \leq 4 \text{ м}$).

Аналогично составляем уравнение проекций сил на ось x :

$$N_{x_3} + F_3 + F_2 - F_1 - A\gamma x_3 = 0;$$

$$N_{x_3} = F_1 + A\gamma x_3 - F_3 - F_2 = 4000 + 5 \cdot 0,078x_3 - 1500 - 3000 = -500 + 0,39x_3;$$

$$N_{x_3=300} = -500 + 0,39 \cdot 300 = -383 \text{ Н};$$

$$N_{x_3=400} = -500 + 0,39 \cdot 400 = -344 \text{ Н}.$$

Строим эпюру N на третьем участке.

На третьем участке более удобно рассматривать сечение x_3 от опоры.

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}$):

Принимаем нормальную силу N_{x_3} положительной; уравнение проекций сил будет

$$-B_x - N_{x_3} - A\gamma x_3 = 0; N_{x_3} = -B_x - A\gamma x_3 = -344 - 0,39x_3;$$

$$N_{x_3=0} = -B_x = -344 \text{ Н}; N_{x_3=100} = -344 - 0,39 \cdot 100 = -383 \text{ Н}.$$

Получим те же величины.

Контроль правильности построения эпюры по приведенным выше положениям о характере эпюр показывает, что эпюра N построена верно.

Анализируя эпюру N , видим, что учет собственного веса стержня изменяет нормальную силу незначительно, поэтому в расчетах обычно собственным весом брусьев пренебрегают. *Собственный вес учитывают только при расчете очень длинных стержней.*

Пример 1.9. Построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для плоского кривого бруса. Размеры и приложенные нагрузки показаны на рис. 1.31.

Решение. Определяем опорные реакции C_y и D_y . Так как проекция пары сил на любую ось равна нулю, а момент пары сил относительно любой точки равен моменту пары, то заключаем, что реакции опор C и D будут вертикальны по направлению, а по величине должны образовать пару сил с моментом, равным приложенному моменту M .

Составляя уравнения моментов относительно опор C и D , найдем величины реакций:

$$\sum m_c = D_y \cdot 2R - M = 0; \sum m_D = C_y \cdot 2R - M = 0;$$

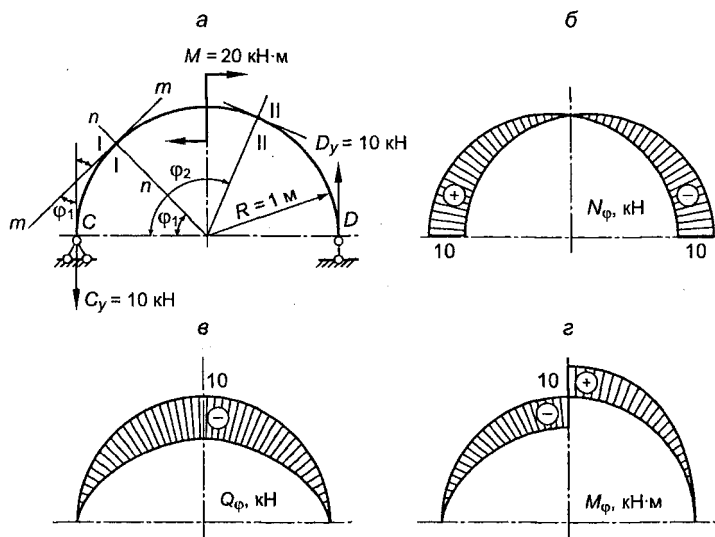


Рис. 1.31

$$D_y = C_y = \frac{M}{2R} = \frac{20}{2 \cdot 1} = 10 \text{ кН.}$$

Кривой брус имеет два участка. Проводим произвольное поперечное сечение на первом участке, положение которого определим центральным углом φ_1 (рис. 1.31, а).

Рассматривая левую часть бруса, составим уравнения для нормальной силы, поперечной силы и изгибающего момента, для чего спроектируем внешние силы на касательную $m-m$ и нормаль n к оси стержня в рассматриваемом сечении и составим сумму моментов сил относительно поперечной оси сечения:

$$N_{\varphi_1} = C_y \cos \varphi_1 = 10 \cos \varphi_1;$$

$$Q_{\varphi_1} = -C_y \sin \varphi_1 = -10 \sin \varphi_1;$$

$$M_{\varphi_1} = -C_y R (1 - \cos \varphi_1) = -10(1 - \cos \varphi_1).$$

В уравнении Q_{φ_1} перед C_y поставлен знак минус, так как эта сила стремится вращать левую часть бруса относительно се-

чения против часовой стрелки. Изгибающий момент M_{φ_1} отрицателен, так как сжимаются внутренние волокна бруса. Эпюры N_{φ_1} , Q_{φ_1} , M_{φ_1} имеют криволинейное очертание, поэтому для их правильного построения необходимо вычислить несколько ординат в пределах участка.

На первом участке угол φ_1 меняется в пределах $0^\circ \leq \varphi_1 \leq 90^\circ$.

Вычислим значения ординат, изменяя угол φ через 30° .

Расчеты представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

φ_1°	$\sin \varphi_1$	$\cos \varphi_1$	N_{φ_1} , кН	Q_{φ_1} , кН	M_{φ_1} , кН·м
0	0	1	10	0	0
30	0,5	0,866	8,66	-5,0	-1,34
60	0,866	0,5	5,0	-8,66	-5,0
90	1	0	0	-10	-10

Так как у бруса ось представляет собой окружность, то нормаль n всегда совпадает с радиусом. Откладывая в масштабе по радиусу соответствующие ординаты, строим эпюры N_{φ_1} , Q_{φ_1} , M_{φ_1} (рис. 1.31, б–г).

Аналогично проводим сечение на втором участке под углом φ_2 . Рассматривая левую часть бруса, составим для этого сечения уравнения внутренних силовых факторов. На втором участке φ_2 меняется в пределах $90^\circ \leq \varphi_2 \leq 180^\circ$.

$$N_{\varphi_2} = C_y \cos(180 - \varphi_2) = C_y \cos \varphi_2 = 10 \cos \varphi_2;$$

$$Q_{\varphi_2} = -C_y \sin(180 - \varphi_2) = -C_y \sin \varphi_2 = -10 \sin \varphi_2;$$

$$\begin{aligned} M_{\varphi_2} &= M - C_y R [1 + \cos(180 - \varphi_2)] = \\ &= M - C_y R (1 - \cos \varphi_2) = 20 - 10(1 - \cos \varphi_2). \end{aligned}$$

Изменяя угол φ_2 через 30° , вычислим значения внутренних силовых факторов. Расчеты приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

φ_2°	$\sin \varphi_2$	$\cos \varphi_2$	$N_{\varphi_2}, \text{ кН}$	$Q_{\varphi_2}, \text{ кН}$	$M_{\varphi_2}^{\text{из}}, \text{ кН}\cdot\text{м}$
90	1	0	0	-10	10
120	0,866	-0,5	-5,0	-8,66	5,0
150	0,5	-0,866	-8,66	-5,0	1,34
180	0	-1,0	-10	0	0

Более удобно было на втором участке центральный угол φ_2 отсчитывать от точки D , т. е. рассматривать пределы изменения угла φ_2 от 0 до 90° .

Согласно вычисленным значениям строим эпюры на втором участке N_{φ_2} , Q_{φ_2} , M_{φ_2} (см. рис. 1.31, б–г).

Проверка показывает, что изложенные положения для кривого бруса выполняются:

а) эпюра изгибающих моментов в сечении, где приложен сосредоточенный момент, делает скачок на величину этого момента;

б) в сечениях C и D , где приложены по касательной к оси бруса силы C_y и D_y , эпюра нормальных сил делает скачок на величину этих сил.

Пример 1.10. Построить эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для плоского кривого бруса, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой $p = 10 \text{ кН/м}$ (рис. 1.32, а).

Решение. Определяем опорные реакции. Легко заключить, что в силу симметрии бруса и нагрузки обе реакции будут вертикальными. Величины реакций определим, воспользовавшись известной теоремой о том, что *равнодействующая равномерно*

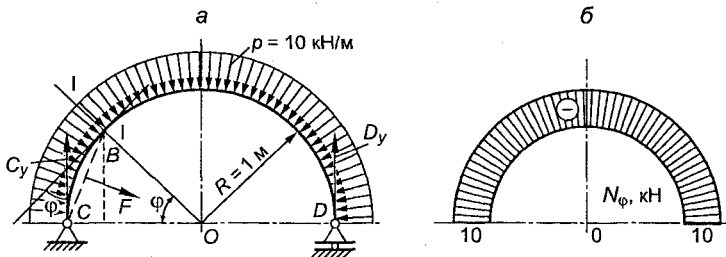


Рис. 1.32

распределенной нагрузки, приложенной к дуге любого очертания, равна произведению интенсивности распределенной нагрузки на длину хорды, стягивающей эту дугу, направлена перпендикулярно к хорде и проходит через ее середину. Отсюда

$$C_y = D_y = \frac{p \cdot 2R}{2} = pR = 10 \text{ кН.}$$

Брус имеет один участок. Поэтому для построения эпюр достаточно составить уравнения силовых факторов в любом сечении. Проведем сечение I—I и определим его положение углом φ . Длину хорды CB найдем, рассматривая равнобедренный треугольник CBO :

$$CB = 2R \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Равнодействующая распределенной нагрузки, приложенной к брису на участке CB , равна

$$F = CB \cdot p = 2pR \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Сила F перпендикулярна хорде и направлена по биссектрисе угла φ . Проектируя силы C_y и F на касательную и нормаль к оси в точке B и вычисляя момент сил относительно этой точки, получим

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -C_y \cos \varphi - 2pR \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = -pR \cos \varphi - \\ &\quad - pR(1 - \cos \varphi) = -pR = -10 \text{ кН;} \end{aligned}$$

$$Q_y = C_y \sin \varphi - 2pR \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = (pR - pR) \sin \varphi = 0;$$

$$\begin{aligned} M_\varphi &= C_y R(1 - \cos \varphi) - F \frac{CB}{2} = C_y R(1 - \cos \varphi) - 2pR \sin \frac{\varphi}{2} R \sin \frac{\varphi}{2} \\ &= pR^2(1 - \cos \varphi) - pR^2(1 - \cos \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, кривой брус находится в состоянии простого сжатия силой $N_\varphi = 10 \text{ кН}$ (рис. 1.32, б).

Пример 1.11. Построить эпюры внутренних силовых факторов N_φ , Q_φ , M_φ для бруса, представляющего собой дугу полу-

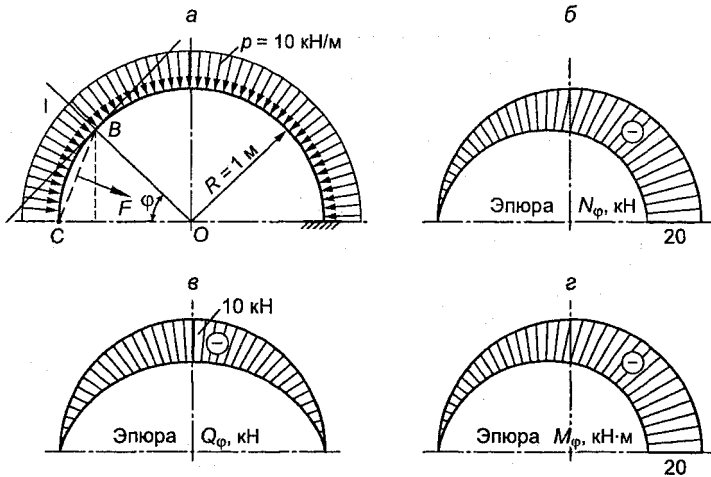


Рис. 1.33

окружности, радиусом $R = 1$ м, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой $p = 10$ кН/м. Правый конец бруса зашцеилен (рис. 1.33, а).

Решение. Подобно предыдущему примеру, проводим сечение I—I и определяем его положение углом φ . Напишем выражение для внутренних силовых факторов в этом сечении:

$$N_{\varphi} = -2pR \sin^2 \frac{\varphi}{2} = -pR(1 - \cos \varphi) = -10(1 - \cos \varphi);$$

$$Q_{\varphi} = -pR \sin \varphi = -10 \sin \varphi;$$

$$M_{\varphi} = -2pR^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = -pR^2(1 - \cos \varphi) = -10(1 - \cos \varphi).$$

Расчеты N_{φ} , Q_{φ} , M_{φ} для угла φ , изменяющегося от 0 до 180° с интервалом в 30° , приведены в табл. 1.3, а эпюры согласно вычисленным значениям построены на рис. 1.33, б—г.

Для более точного построения эпюр внутренних силовых факторов следует выбирать меньшие интервалы изменения углов.

Пример 1.12. Построить эпюру крутящих моментов для стального бруса постоянного круглого сечения (рис. 1.34).

φ°	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$N_\varphi, \text{кН}$	$Q_\varphi, \text{кН}$	$M_\varphi^{\text{из}}, \text{кН}\cdot\text{м}$
0	0	1	0	0	0
30	0,5	0,866	-1,3	-5,0	-1,3
60	0,866	0,5	-5,0	-8,7	-5,0
90	1	0	-10,0	-10,0	-10
120	0,866	-0,5	-15,0	-8,7	-15,0
150	0,5	-0,866	-18,7	-5,0	-18,7
180	0	-1,0	-20,0	0	-20,0

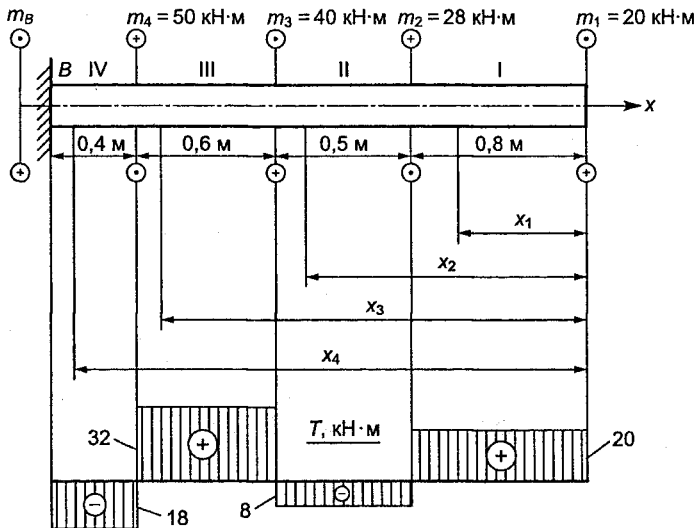


Рис. 1.34

Решение. Рассматривая условия равновесия бруса, находим реактивный момент m_B в защемлении:

$$\sum m_x = m_B - m_4 + m_3 - m_2 + m_1 = 0;$$

$$m_B = m_4 - m_3 + m_2 - m_1 = 50 - 40 + 28 - 20 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В данном случае построение эпюры крутящих моментов можно начинать со свободного конца, при этом отпадает необходимость в определении реактивного момента. Однако величина реактивного момента требуется для контроля правильнос-

ти построения эпюр крутящих моментов. Брус имеет четыре участка. Подобно построению эпюр внутренних силовых факторов при изгибе, на каждом участке проводим произвольное поперечное сечение и, рассматривая скручивающие моменты, приложенные к сохраняемой части бруса, составляем, соблюдая правило знаков, уравнения для крутящих моментов на соответствующих участках.

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 0,8$ м):

$$T_{x_1} = m_1 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II ($0,8 \text{ м} \leq x_2 \leq 1,3$ м):

$$T_{x_2} = m_1 - m_2 = 20 - 28 = -8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III ($1,3 \text{ м} \leq x_3 \leq 1,9$ м):

$$T_{x_3} = m_1 - m_2 + m_3 = 20 - 28 + 40 = 32 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок IV ($1,9 \text{ м} \leq x_4 \leq 2,3$ м):

$$T_{x_4} = m_1 - m_2 + m_3 - m_4 = 20 - 28 + 40 - 50 = -18 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из уравнений следует, что крутящие моменты на участках имеют постоянную величину. По вычисленным значениям построена эпюра крутящих моментов (см. рис. 1.34). Из эпюры видно, что третий участок бруса является опасным, так как на этом участке крутящий момент имеет максимальное значение:

$$T_{3\text{max}} = 32 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Совпадение величины и знака крутящего момента на четвертом участке с величиной и направлением реактивного момента в заземлении указывает на то, что эпюра построена правильно.

1.7. Напряжения

Для оценки прочности элементов конструкции знания внутренних силовых факторов недостаточно, необходимо иметь сведения о распределении внутренних сил по сечению.

Внутренние силы распределяются по сечению непрерывно и характеризуются *интенсивностью*. Мера интенсивности внутренних сил в точке в сопротивлении материалов называется *на-*

пряжением. Понятия о напряжении и деформации впервые были введены Коши² в 1822 г.

Выделим в окрестности произвольной точки B (рис. 1.35) элементарную площадку ΔA . Равнодействующую внутренних сил, действующих на площадке, обозначим через $\overline{\Delta F}$. Эта сила может иметь любое направление. Тогда полное напряжение \overline{p} будет определяться как предел отношения $\overline{\Delta F}/\Delta A$ при $\Delta A \rightarrow 0$. Так как среда рассматривается сплошной, то предельный переход возможен, и полное напряжение \overline{p} в данной точке будет определяться пределом отношения

$$\overline{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta F}}{\Delta A}. \quad (1.20)$$

Напряжение имеет размерность силы, деленной на площадь. В расчетной практике напряжение измеряется в единицах Н/см^2 , МПа. Необходимо твердо осознать, что напряжение в материале есть величина, связанная с точкой сечения, количественно определяемая пределом отношения равнодействующей внутренних сил, приходящихся на элементарную площадку в окрестности рассматриваемой точки, к величине этой площадки, не связанная ни с какой единицей площади сечения, как квадратный метр или квадратный сантиметр. Величина \overline{p} представляет собой полное напряжение в точке B поперечного сечения и как векторная величина в общем случае может быть разложена на три составляющие: по нормали к плоскости сечения и по двум осям в плоскости сечения (рис. 1.36).

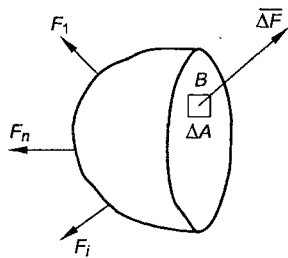


Рис. 1.35

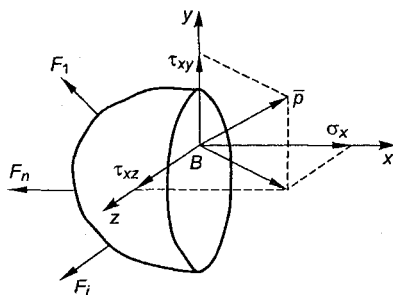


Рис. 1.36

Проекция полного напряжения на нормаль к сечению называется **нормальным напряжением** и обозначается буквой σ с индексом соответствующей оси.

Проекции полного напряжения на оси, лежащие в плоскости сечения, называются **касательными напряжениями** и обозначаются буквой τ с двумя индексами: первый обозначает ось, к которой перпендикулярна площадка, а второй – ось, по направлению к которой действует напряжение. Физически нормальное напряжение характеризует интенсивность взаимного отрыва или нажатия частиц, а касательные напряжения – интенсивность взаимного сдвига частиц.

Если через точку B провести другое сечение, то полное напряжение в точке будет другим, соответственно иными будут нормальное и касательные напряжения. Совокупность напряжений для всех площадок, проходящих через данную точку, называется **напряженным состоянием в точке**.

Основываясь на определении внутренних силовых факторов и понятии напряжения, нетрудно прийти к следующему заключению.

Нормальная сила N в поперечном сечении представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения, и может быть выражена интегральным уравнением через нормальное напряжение.

Поперечная сила в поперечном сечении представляет собой равнодействующую внутренних касательных сил, распределенных по площади поперечного сечения, и может быть выражена интегральным уравнением через касательное напряжение.

Крутящий момент в поперечном сечении представляет собой равнодействующий момент внутренних касательных сил, распределенных по площади поперечного сечения, и может быть выражен интегральным уравнением через касательное напряжение.

Изгибающий момент в поперечном сечении представляет собой равнодействующий момент внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения, и может быть выражен интегральным уравнением через нормальное напряжение.

Общие зависимости между внутренними силовыми факторами и напряжениями приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Вид нагружения	Внутренний силовой фактор в сечении	Вид напряжения в сечении	Интегральное уравнение связи
Растяжение (сжатие)	N	σ	$N = \int_A \sigma dA$
Сдвиг	Q	τ	$Q = \int_A \tau dA$
Кручение	T	τ	$T = \int_A \tau r dA$
Изгиб	M	σ	$M_z = \int_A \sigma y dA$ $M_y = \int_A \sigma z dA$

Выражения под интегралами представляют:

$dN = \sigma dA$ - элементарную нормальную силу, приходящуюся на площадку dA ;

$dQ = \tau dA$ - элементарную поперечную силу, приходящуюся на площадку dA ;

$dT = \tau r dA$ - элементарный крутящий момент внутренних сил, действующих на площадку dA относительно центра тяжести сечения;

$dM_z = \sigma y dA$ и $dM_y = \sigma z dA$ - элементарные изгибающие моменты внутренних сил, действующих на площадку dA относительно осей z и y .

Непосредственно полученные зависимости для практических расчетов использовать нельзя, так как закон распределения напряжений по сечению неизвестен. Зная в сечении изгибающий или крутящий момент, нельзя по интегральным уравнениям найти нормальные или касательные напряжения. Задача определения напряжений всегда является статически неопределимой, если априори не задается распределение напряжений в сечении.

1.8. Перемещения и деформации

Все твердые тела не являются абсолютно жесткими и под действием внешних сил изменяют свою форму и размеры (деформируются); при этом в процессе деформации положение их точек в пространстве непрерывно изменяется. Термин «де-

формация» в сопротивлении материалов и теории упругости применяется двояко: с одной стороны, в качественном смысле, как всякое изменение формы и размеров тела, а с другой стороны, как количественная мера изменения состояния тела в точке. В теории деформации рассматривается начальное и конечное деформированное состояние тела. Время деформирования, траектория движения точек в процессе деформации, свойства материала во внимание не принимаются. Вектор \vec{S} , имеющий начало в точке B недеформированного тела, а конец в этой же точке B' деформированного тела (рис. 1.37), называется **полным перемещением точки**. Проекции вектора \vec{S} на координатные оси называются **составляющими** или **компонентами перемещений** или **перемещениями по осям** и обозначаются соответственно осям x, y, z через u, v, w .

Вектор перемещений и его проекции на оси, по условию сплошности тела, являются непрерывными функциями координат точек до деформации: $\vec{S} = S(x, y, z)$; $u = u(x, y, z)$; $v = v(x, y, z)$; $w = w(x, y, z)$. Естественно, перемещения разных точек деформируемого тела будут различными. Однако перемещения не могут быть приняты как характеристики деформации, так как они включают в себя составляющие, связанные не только с деформациями в данной точке, но и с переносами самой точки, вызванными перемещениями других участков тела.

Пусть к стержню, закрепленному в верхнем сечении, приложены по оси силы F_1 и F_2 (рис. 1.38).

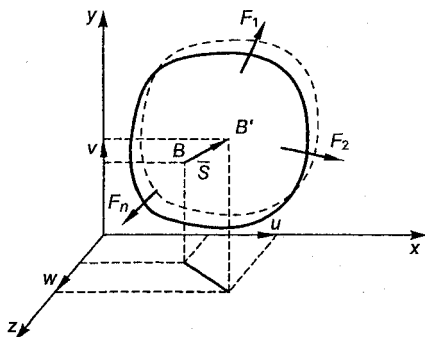


Рис. 1.37

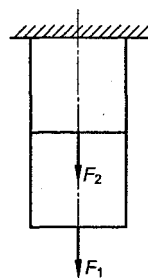


Рис. 1.38

Перемещения точек нижнего участка стержня будут определяться не только удлинением стержня под действием силы F_1 , но и удлинением стержня под действием силы F_2 . При отсутствии силы F_1 перемещения точек нижнего участка стержня вообще не связаны с деформацией тела в этих точках и вызываются движением нижнего участка стержня, как абсолютного жесткого под действием силы F_2 . Отсюда следует, что для характеристики деформации в точке необходимо установить, как изменится длина и положение отрезка, выделенного в пределах малого участка тела, ограничивающего рассматриваемую точку, т. е. ввести понятие интенсивности изменения размеров и формы тела в точке.

Рассмотрим точки B и C недеформированного тела, расположенные друг от друга на расстоянии S (рис. 1.39).

Пусть после приложения нагрузки, в результате изменения формы тела, точки заняли положение B' и C' , а расстояние между ними изменилось на ΔS . Предел отношения приращения длины к начальному расстоянию между точками, когда точка C стремится к точке B , называется **относительной линейной деформацией** или **относительным удлинением тела в точке B по направлению BC** . Относительную деформацию будем обозначать буквой ϵ . Тогда относительная линейная деформация по направлению BC будет

$$\epsilon_{BC} = \lim_{C \rightarrow B} \frac{B'C' - BC}{BC} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}. \quad (1.21)$$

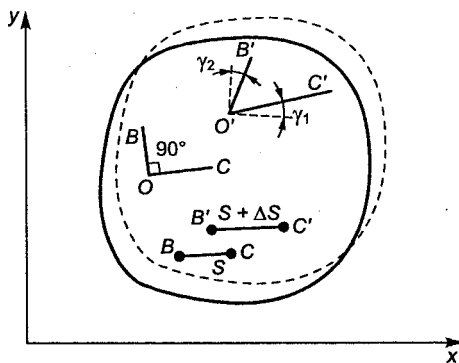


Рис. 1.39

При положительных значениях ΔS имеет место относительное удлинение, а при отрицательных – относительное укорочение. Относительные деформации в направлении координатных осей x, y, z обозначаются буквой ε с соответствующими индексами осей $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Деформации измеряются в отвлеченных единицах или в процентах. Для упругого тела относительные линейные деформации составляют десятитысячные или тысячные доли, а в процентах – сотые или десятые доли процента.

Кроме линейной деформации, вводится понятие *угловой деформации*. Рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном теле отрезками OB и OC . Пусть после нагружения точки заняли положения O', B', C' , а прямой угол превратился в острый. Предел разности углов $B'O'C'$ и $\pi/2$, когда точки B и C стремятся к точке O , называется **относительным сдвигом** или **углом сдвига в точке O** в плоскости xu и обозначается буквой γ с индексами соответствующей координатной плоскости:

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{B \rightarrow O \\ C \rightarrow O}} \left(\frac{\pi}{2} - B'O'C' \right). \quad (1.22)$$

Согласно рис. 1.39 угол сдвига

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2, \quad (1.23)$$

где γ_1, γ_2 – углы поворота отрезков OB и OC в плоскости xu относительно первоначальных направлений.

В координатных плоскостях углы сдвига обозначаются через $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Подобно напряжению, деформация характеризует состояние материала в точке и не связана с какой-либо длиной или формой тела. Если все точки деформированного тела в заданном направлении испытывают одинаковую деформацию, то деформация тела называется **однородной**. Если перемещение, а значит, и деформация по направлению какой-либо координатной оси отсутствуют, то деформация называется **плоской**. В общем случае линейная и угловая деформации в точке меняются в зависимости от ориентации осей координат (секущей плоскости). Совокупность линейных и угловых деформаций в разных плоскостях, проходящих через данную точку, называется **деформированным состоянием в точке**.

Деформации делятся на упругие и пластические. Упругие деформации исчезают после удаления внешней нагрузки, а пластические сохраняются в виде остаточных деформаций. Появление остаточных деформаций в конструкциях, как правило, не допускается, поэтому расчеты деталей на прочность должны обеспечить их работу в пределах упругих деформаций.

1.9. Связь перемещений и деформаций

При простом растяжении стержня, когда один конец его закреплён, перемещение другого конца, или, что одно и то же, удлинение Δl стержня под действием осевой нагрузки, будет тем больше, чем длиннее стержень. Относительное удлинение стержня определяется выражением

$$\varepsilon = (l_k - l_0) / l_0 = \Delta l / l_0, \quad (1.24)$$

где l_k и l_0 - конечная и начальная длины стержня; Δl - удлинение стержня.

С точки зрения понятия деформации, величина ε является условной характеристикой. Так как в действительности деформация развивается на непрерывно изменяющейся длине стержня, то фактически отношение $\Delta l / l_0$ не имеет физического смысла. Действительно, пусть образец длиной 100 мм удлинился на 5 мм, затем снова удлинился на 5 мм. Тогда в первом

случае $\varepsilon_1 = \frac{105 - 100}{100} = 0,05$, а во вто-

ром - $\varepsilon_2 = \frac{110 - 105}{105} = 0,048$. Величина

$\varepsilon = \frac{110 - 100}{100} = 0,1$. Суммарное относительное удлинение

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,098$ меньше ε . Истинная относительная деформация стержня при изменении длины от l_0 до l_k будет равна (рис. 1.40)

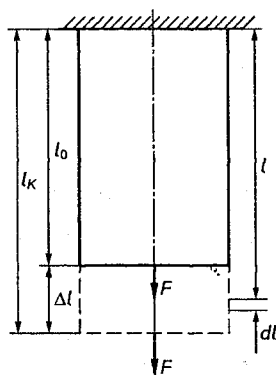


Рис. 1.40

$$\varepsilon_u = \int_{l_0}^{l_k} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_k}{l_0} = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) = \ln(1 + \varepsilon). \quad (1.25)$$

В отличие от ε величина ε_u является аддитивной. Разлагая в ряд Маклорена выражение (1.25), получим

$$\varepsilon_u = \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^3 + \dots = \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3 - \dots \quad (1.26)$$

Сравнивая выражения (1.24) и (1.26), видим, что при малых деформациях они совпадают. Погрешность формулы (1.24), согласно теории ошибок, равна

$$\Delta = \left| \frac{\varepsilon - \varepsilon_u}{\varepsilon} \right| \leq \frac{1}{2} |\varepsilon|. \quad (1.27)$$

Как отмечалось, на практике деформации не превышают десятых долей процента. Принимая, что в рабочих условиях деформация меньше 0,5 %, получим погрешность формулы (1.24) меньше 0,25 %. Такая погрешность вполне допустима в технических расчетах, и поэтому применение формулы (1.24) для вычисления деформаций является оправданным.

Для оценки деформации упругого тела в точке O в общем случае нагружения выделим бесконечно малый параллелепипед с ребрами dx , dy , dz около точки O . При деформации тела изменятся длины его ребер и исказятся первоначально прямые углы между гранями. Предполагая деформации малыми, рассмотрим проекции граней параллелепипеда до и после деформации на координатные плоскости. Проекции перемещений на плоскость xOy показаны на рис. 1.41.

Перемещения по осям точки O обозначим через u и v . Тогда перемещения по осям точки C , отстоящей от точки O на расстоянии dx , получат приращения за счет изменения координаты x . Эти перемещения с точностью до величин первого порядка по dx будут равны

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

Перемещения по осям точки D получат приращения по сравнению с точкой O за счет изменения координаты y :

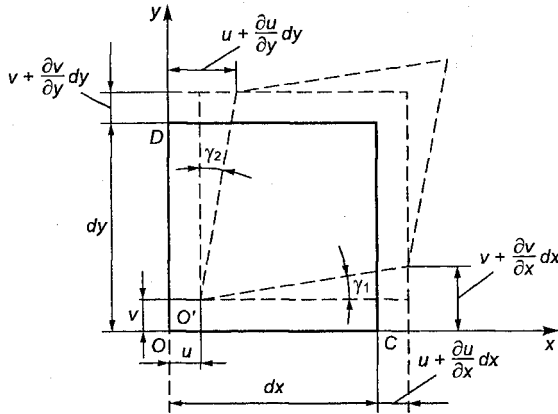


Рис. 1.41

$$v + \frac{\partial v}{\partial y} dy; \quad u + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Абсолютное удлинение грани OC равно разности горизонтальных перемещений:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Относительная деформация в направлении оси x будет равна

$$\epsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.28)$$

Относительная деформация в направлении оси y

$$\epsilon_y = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.29)$$

Угол поворота грани OC равен разности вертикальных перемещений точек O и C , деленной на расстояние между ними:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 \approx \gamma_1 = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.30)$$

Так как рассматривается случай малых деформаций, то величину $\frac{\partial u}{\partial x}$ можно отбросить как очень малую по сравнению с единицей.

Угол поворота грани OD равен

$$\operatorname{tg} \gamma_2 \approx \gamma_2 = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) - u}{dy \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.31)$$

Угол сдвига равен сумме углов

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.32)$$

Аналогично, рассматривая проекции на другие координатные плоскости, получим шесть основных дифференциальных зависимостей между составляющими деформаций и составляющими перемещений:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Эти равенства носят название **уравнений Коши**, который их впервые получил.

Для составляющих деформаций принято следующее правило знаков:

а) положительным линейным деформациям соответствуют удлинения вдоль осей координат, а отрицательным - укорочения;

б) положительным угловым деформациям (сдвигам) соответствует уменьшение углов между положительными направлениями координатных осей, а отрицательным - увеличение тех же углов. В случае однородной деформации компоненты перемещения u, v, w являются линейными функциями координат.

Пусть компоненты перемещения некоторой точки $B(x, y, z)$ являются линейными функциями координат x, y, z , тогда

$$u = \alpha x; v = \beta y; w = \xi z. \quad (1.34)$$

Координаты этой точки после деформации будут

$$x' = x + u = x(1 + \alpha); y' = y + v = y(1 + \beta); z' = z + w = z(1 + \xi). \quad (1.35)$$

Пусть плоскость в теле до деформации проходит через точку B и имеет уравнение

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (1.36)$$

После деформации уравнение этой плоскости получим, подставляя в уравнение (1.36) значения координат x, y, z из уравнений (1.35),

$$\frac{ax'}{1 + \alpha} + \frac{by'}{1 + \beta} + \frac{cz'}{1 + \xi} + d = 0. \quad (1.37)$$

Из уравнения (1.37) следует, что все точки плоскости (1.36), включая и точку B , останутся в плоскости. Таким образом, плоскость до деформации остается плоскостью и после деформации. Параллельные плоскости до деформации останутся также параллельными после деформации. В этом случае, согласно уравнениям Коши, для всех точек тела компоненты деформации будут одинаковыми и равными

$$\epsilon_x = \alpha; \epsilon_y = \beta; \epsilon_z = \xi; \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Деформация тела, удовлетворяющая этим условиям, является однородной.

1.10. Относительная линейная деформация в произвольном направлении

При испытании элементов конструкций с помощью проводочных тензорезисторов часто возникает необходимость определить относительную линейную деформацию в направлении, составляющем произвольный угол α осью x (рис. 1.42).

Определим относительную линейную деформацию в точке B вдоль прямой, проходящей через точку B под углом α к оси x . Ограничимся случаем плоской деформации, когда перемещения w по направлению оси z отсутствуют. Отрезок прямой $BC = dS$ лежит в плоскости xOy . Проекция отрезка dS на оси координат следующие:

$$dx = dS \cos \alpha; dy = dS \sin \alpha. \quad (1.38)$$

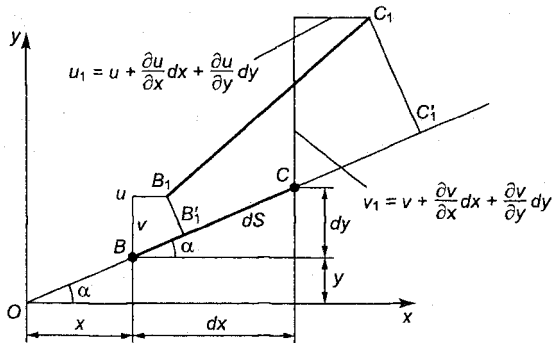


Рис. 1.42

Обозначим через u и v компоненты перемещения точки B при деформации тела. Тогда компоненты перемещения u_1 и v_1 точки C в результате деформации получат приращения, которые найдем, разлагая u_1 и v_1 в ряд Тейлора по степеням dx и dy :

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (1.39)$$

В выражениях (1.39), так как dx и dy принимаются малыми, члены с высшими степенями опущены как величины высшего порядка малости.

Абсолютное удлинение отрезка BC будет равно

$$\begin{aligned} \Delta dS = B_1C_1' - BC &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \cos \alpha + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \sin \alpha - \\ &- u \cos \alpha - v \sin \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Относительное удлинение в направлении dS будет

$$\epsilon_\alpha = \frac{\Delta dS}{dS} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dS} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dS} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dS} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dS} \right) \sin \alpha.$$

Учитывая, что $\frac{dx}{dS} = \cos \alpha$; $\frac{dy}{dS} = \sin \alpha$ и $\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$; $\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y$;

$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}$, окончательно получим

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\alpha, \quad (1.41)$$

где ϵ_x и ϵ_y – относительные линейные деформации в направлении координатных осей; γ_{xy} – деформация сдвига относительно осей x , y .

Формула (1.41) позволяет определить относительное удлинение в любом направлении α , если известны величины ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} . Однако, как правило, величина γ_{xy} неизвестна и непосредственно измерить ее в точке с помощью датчиков невозможно, поэтому воспользоваться в расчетах формулой (1.41) нельзя.

Анализ деформированного состояния показывает, что среди множества осей, которые могут быть проведены через данную точку, всегда существуют три ортогональные оси координат, в системе которых угловые деформации (деформации сдвига) отсутствуют. Такие оси называются **главными осями деформаций**, соответствующие плоскости – **площадками главных деформаций**, а деформации в направлении главных осей – **главными деформациями**. Главные оси остаются взаимно перпендикулярными и после деформации. Следовательно, если в плоском деформированном состоянии выделить прямоугольный элемент так, чтобы его стороны совпадали с главными осями, то и после деформации он сохранит форму прямоугольника. Поскольку анализ деформированного состояния основан на чисто геометрических соотношениях, то все выводы будут применимы для любого однородного тела, независимо от механических свойств материала. Когда оси x и y будут главными осями, то уравнение (1.41) упростится и примет следующий вид:

$$\epsilon_{\alpha} = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha. \quad (1.42)$$

Определить положение главных осей (если они неизвестны) и вычислить величины главных деформаций в исследуемой точке можно, измерив с помощью электрических тензорезисторов деформации в трех направлениях. Такая система датчиков называется **розеткой** (рис. 1.43).

Пусть x и y – главные оси деформаций. Тогда согласно (1.42) для трех направлений, совпадающих с осями датчиков, получим значения линейных деформаций:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha_1} &= \epsilon_x \cos^2 \alpha_1 + \epsilon_y \sin^2 \alpha_1; \\ \epsilon_{\alpha_2} &= \epsilon_x \cos^2 \alpha_2 + \epsilon_y \sin^2 \alpha_2; \\ \epsilon_{\alpha_3} &= \epsilon_x \cos^2 \alpha_3 + \epsilon_y \sin^2 \alpha_3. \end{aligned} \quad (1.43)$$

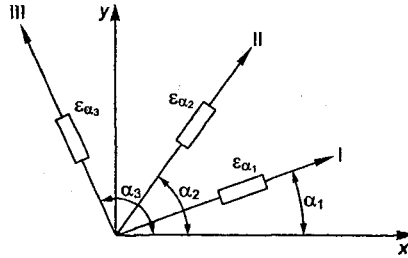


Рис. 1.43

Обычно базы датчиков в розетке образуют углы 45° друг к другу. Принимая в уравнениях (1.43) угол $\alpha_1 = \alpha$; $\alpha_2 = \alpha + 45^\circ$; $\alpha_3 = \alpha + 90^\circ$, получим

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha_1} &= \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha; \quad \epsilon_{\alpha_2} = \epsilon_x \cos^2 (\alpha + 45^\circ) + \epsilon_y \sin^2 (\alpha + 45^\circ); \\ \epsilon_{\alpha_3} &= \epsilon_x \cos^2 (\alpha + 90^\circ) + \epsilon_y \sin^2 (\alpha + 90^\circ). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Обозначив относительные деформации соответственно через $\epsilon_{\alpha_1} = \epsilon_I$; $\epsilon_{\alpha_2} = \epsilon_{II}$; $\epsilon_{\alpha_3} = \epsilon_{III}$, найдем главные деформации ϵ_x и ϵ_y и их направления, решив совместно систему уравнений (1.44):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\epsilon_I - 2\epsilon_{II} + \epsilon_{III}}{\epsilon_I - \epsilon_{III}}; \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\epsilon_I + \epsilon_{III}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_I - \epsilon_{III})^2 + (\epsilon_I - 2\epsilon_{II} + \epsilon_{III})^2}; \\ \epsilon_y &= \frac{\epsilon_I + \epsilon_{III}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_I - \epsilon_{III})^2 + (\epsilon_I - 2\epsilon_{II} + \epsilon_{III})^2}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где α – угол между направлением ϵ_I и главной осью x , совпадающей с главной деформацией.

Если угол α получается со знаком плюс, то он откладывается от оси первого датчика (направления деформации ϵ_I) по ходу часовой стрелки, если со знаком минус – против хода часовой стрелки. Зная величины главных деформаций ϵ_x и ϵ_y и положения главных осей x и y , можно вычислить относительные удлинения в любом направлении, составляющем угол α с осью x .

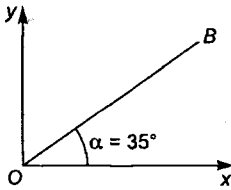


Рис. 1.44

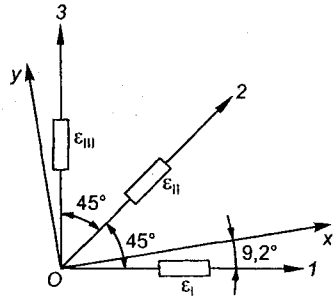


Рис. 1.45

Пример 1.13. Определить линейную деформацию в данной точке в направлении OB , составляющем угол $\alpha = 35^\circ$ с осью x , если деформации $\epsilon_x = 0,6 \cdot 10^{-3}$ и $\epsilon_y = 0,14 \cdot 10^{-3}$, угол сдвига $\gamma_{xy} = 0$. Деформированное состояние плоское (рис. 1.44).

Решение. Оси являются главными осями деформаций, так как угол сдвига равен нулю. Поэтому для определения линейной деформации воспользуемся формулой (1.43)

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha=35^\circ} &= \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \frac{(0,6 + 0,14) \cdot 10^{-3}}{2} + \frac{(0,6 - 0,14) \cdot 10^{-3}}{2} \cos 70^\circ = 0,45 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Пример 1.14. Деформации по трем направлениям 01; 02; 03, замеренные с помощью розетки тензодатчиков, равны: $\epsilon_I = 0,5 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{II} = 0,8 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{III} = 1,4 \cdot 10^{-3}$. Определить направление и величины главных деформаций в плоскости 103 (рис. 1.45).

Решение. Направление и величины главных деформаций найдем, используя формулы (1.45) и (1.46):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\epsilon_I - 2\epsilon_{II} + \epsilon_{III}}{\epsilon_I - \epsilon_{III}} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} + 1,4 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-3} - 1,4 \cdot 10^{-3}} = -0,333;$$

$$2\alpha = -18,4^\circ; \alpha = -9,2^\circ;$$

$$\varepsilon_{x,y} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} + 1,4 \cdot 10^{-3}}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(0,5 \cdot 10^{-3} - 1,4 \cdot 10^{-3})^2 + (0,5 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} + 1,4 \cdot 10^{-3})^2} =$$

$$= 0,95 \cdot 10^{-3} \pm 0,474 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_x = 1,424 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_y = 0,476 \cdot 10^{-3}.$$

Главные оси деформации x и y показаны на рис. 1.45.

Глава 2

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

2.1. Напряженное состояние в точке

Рассмотрим тело, нагруженное произвольной системой сил (рис. 2.1), и исследуем напряженное состояние в некоторой точке B . Поместим в точке B начало системы координат x, y, z и бесконечно близкими сечениями, параллельными координатным плоскостям, выделим элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда, размеры ребер которого обозначим dx, dy, dz (рис. 2.2). Действие отброшенной части тела на выделенный параллелепипед будет выражаться соответствующими напряжениями.

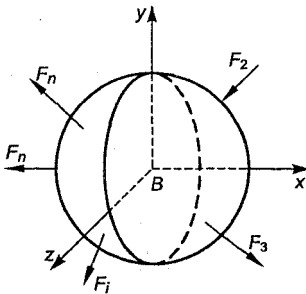


Рис. 2.1

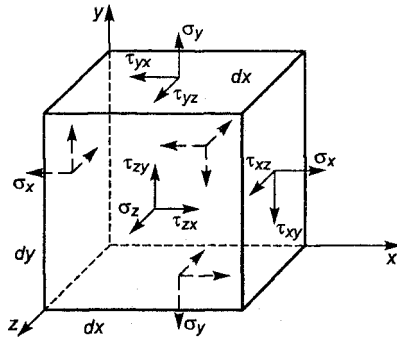


Рис. 2.2

Напряженное состояние, как и деформированное, бывает однородное и неоднородное. В *однородном напряженном состоянии* напряжения во всех точках тела одинаковы, в *неоднородном напряженном состоянии* напряжения являются функциями координат точки $\sigma = f(x, y, z)$.

Примем, что в малом объеме в окрестности выбранной точки V напряженное состояние тела однородное, поэтому нормальные и касательные напряжения будут одинаковыми на противоположных гранях элемента. В случае неоднородного напряженного состояния нельзя считать напряжения на противоположных гранях элемента одинаковыми и необходимо учитывать приращения напряжений, связанные с изменениями на величины dx, dy, dz координат точки.

Обозначим нормальные и касательные напряжения, действующие на гранях элемента, через $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$.

Нормальные растягивающие напряжения принимаются положительными, *нормальные сжимающие напряжения* – отрицательными. *Касательные напряжения* считаются положительными, когда они направлены по часовой стрелке относительно сечения (поверхности материала), и *отрицательными* – при направлении против часовой стрелки относительно сечения (поверхности материала). Правило знаков для нормальных и касательных напряжений представлено на рис. 2.3.

Силы, приложенные к граням элемента, должны удовлетворять условиям равновесия. Так как на противоположных гранях действуют одинаковые нормальные и касательные напряжения, но противоположно направленные, то суммы проекций этих сил на оси координат x, y, z будут равны нулю независимо от величины возникающих напряжений.

Составим уравнения моментов всех сил относительно осей x, y, z . В уравнение моментов относительно оси x не войдут силы, параллельные этой оси и пересекающие ее. Моменты сил $\sigma_z dx dy$ на передней и задней гранях, перпендикулярных к оси z , а также моменты $\sigma_y dx dz$ на верхней и нижней гранях уравнове-

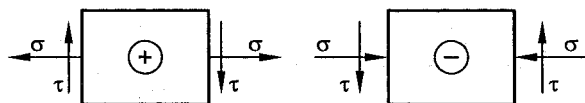


Рис. 2.3

шиваются. Таким образом, сумма моментов всех сил относительно оси x будет равна

$$\tau_{zy} dx dy dz - \tau_{yz} dx dy dz = 0.$$

Откуда следует, что $\tau_{zy} = \tau_{yz}$.

Подобным образом из двух других уравнений (для осей y и z) получим

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Таким образом, на взаимно перпендикулярных гранях элемента касательные напряжения равны по величине и противоположны по знаку. Учитывая принятое для касательных напряжений правило знаков, будем иметь

$$\tau_{zy} = -\tau_{yz}; \quad \tau_{xy} = -\tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = -\tau_{zx}. \quad (2.1)$$

Равенства (2.1) называются **законом парности касательных напряжений**, согласно которому на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к линии пересечения площадок, равны по величине и направлены либо к линии пересечения площадок, либо от нее. Закон парности касательных напряжений справедлив для всех точек напряженного тела независимо от свойств материала.

На основании данного закона, когда знаки напряжений не имеют значения, можно вообще обходиться без индексов. Таким образом, на гранях выделенного элемента имеется только шесть независимых величин $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$, которые называются **компонентами напряжений в точке**. Зная их, можно определить напряжения на любой наклонной площадке, проходящей через данную точку.

При изменении положения элемента относительно осей меняются величины действующих на его гранях напряжений. При этом можно найти такое положение, когда касательные напряжения на гранях элемента равны нулю. Площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют, называются **главными**, а нормальные напряжения на этих площадках - **главными напряжениями**. В теории упругости доказывается, что в каждой точке напряженного тела всегда существуют три взаимно перпендикулярные главные площадки. Направления главных напряжений совпадают с главными осями деформаций в точ-

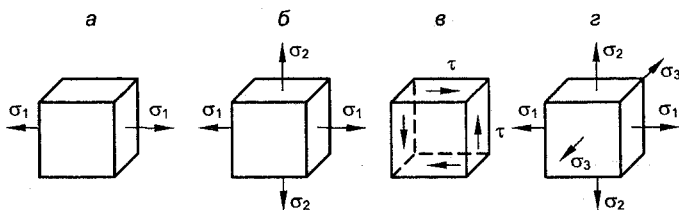


Рис. 2.4

ке. Главные напряжения обозначаются $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ с учетом знака напряжения. Например, пусть одно главное напряжение $\sigma = 500 \text{ Н/см}^2$; второе $\sigma = -1500 \text{ Н/см}^2$ и третье $\sigma = 20 \text{ Н/см}^2$. В этом случае им следует присвоить индексы $\sigma_1 = 500 \text{ Н/см}^2$; $\sigma_2 = 20 \text{ Н/см}^2$; $\sigma_3 = -1500 \text{ Н/см}^2$.

Таким образом, в любой точке тела можно выделить элементарный параллелепипед, на гранях которого будут действовать только главные напряжения. В зависимости от наличия главных напряжений на гранях элемента различают три вида напряженного состояния.

1. Если одно главное напряжение не равно нулю, а два других равны нулю, то напряженное состояние называется **одноосным** или **линейным** (рис. 2.4, а).

2. Если два главных напряжения не равны нулю, а третье равно нулю, то напряженное состояние называется **двухосным** или **плоским** (рис. 2.4, б). Частным случаем двухосного напряженного состояния является **чистый сдвиг**, когда на гранях элемента действуют одинаковые касательные напряжения (рис. 2.4, в).

3. Если все три главных напряжения не равны нулю, то такое напряженное состояние называется **трехосным** или **объемным** (рис. 2.4, г).

В представленных на рис. 2.4 схемах напряженных состояний нормальные напряжения могут быть сжимающими или иметь разные знаки. Например, если все три главных растягивающих напряжения равны между собой, то напряженное состояние называется **чистым трехосным растяжением**, если три главных сжимающих напряжения равны, то - **чистым трехосным сжатием**.

Главные напряжения определяются через нормальные и касательные напряжения, действующие на гранях параллелепипеда, выделенного в опасной точке так, чтобы его грани для упрощения вычисления главных напряжений располагались вдоль и перпендикулярно оси, а одна грань была главной.

2.2. Плоское и линейное напряженные состояния

Наиболее распространенным в расчетной практике является плоское напряженное состояние, в котором одно главное напряжение равно нулю. Такое напряженное состояние имеет тонкая пластинка, нагруженная по контуру силами, лежащими в плоскости пластинки (рис. 2.5). На обеих боковых поверхностях пластинки компоненты напряжений σ_z , τ_{zy} , τ_{zx} равны нулю.

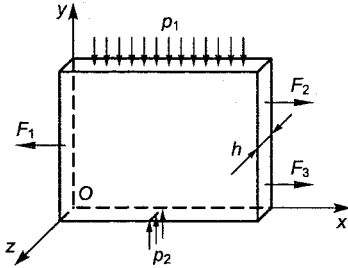


Рис. 2.5

Вследствие малой толщины пластинки можно считать, что они равны нулю и внутри пластинки. Таким образом, напряженное состояние определяется только компонентами σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, которые считаются равномерно распределенными по толщине пластинки и независимыми от координаты z . Явление протекает как бы в одной плоскости xOy . Плоское напряженное состояние имеет место в точках элементов конструкции, в которых существует площадка, свободная от напряжений, например, в точках на свободной поверхности вала при кручении, на поверхности бруса при изгибе и т. д. Пластинка в зависимости от действия внешних нагрузок будет деформироваться (утолщаться или утоньшаться) в направлении оси z . Следовательно, при плоском напряженном состоянии в направлении оси, перпендикулярной площадке, свободной от напряжений, напряжения отсутствуют, но существует деформация.

Другим весьма распространенным видом напряженного состояния является линейное напряженное состояние, в котором два главных напряжения равны нулю. В таком напряженном состоянии находятся, например, точки стержня, работающего на растяжение или сжатие (рис. 2.6, а). На гранях элемента, вырезанных из растягиваемого стержня, параллельно и перпендикулярно оси x действует единственное напряжение σ_x , направленное вдоль оси x стержня (рис. 2.6, б).

Под действием внешних нагрузок стержень изменяет как свою длину, так и размеры поперечного сечения. Таким обра-

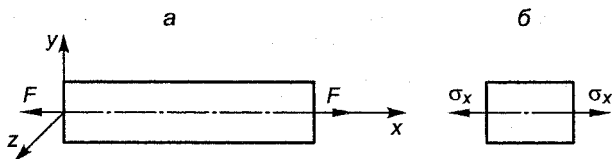


Рис. 2.6

зом, при линейном напряженном состоянии вдоль осей y и z отсутствуют напряжения, но имеет место деформация, т. е. возникает объемная деформация элемента по осям x, y, z .

2.3. Исследование напряженного состояния в точке

Выделим в исследуемой точке нагруженного тела элементарный параллелепипед так, чтобы одна его грань, предположим, перпендикулярная к оси z , совпадала с одной из главных площадок (рис. 2.7, *a*). Тогда две другие главные площадки будут располагаться в семействе площадок, параллельных оси z . Пусть на грани, перпендикулярной к оси z , действует главное нормальное напряжение σ_z ; на грани, перпендикулярной к оси x , действует нормальное напряжение σ_x и положительное касательное напряжение τ_{xy} ; на грани, перпендикулярной к оси y , действует нормальное напряжение σ_y и отрицательное касательное напряжение τ_{yx} .

Принимая напряжения на площадках, перпендикулярных к координатным осям x и y , за исходные, определим напряжения на наклонной площадке, образованной сечением элементарно-

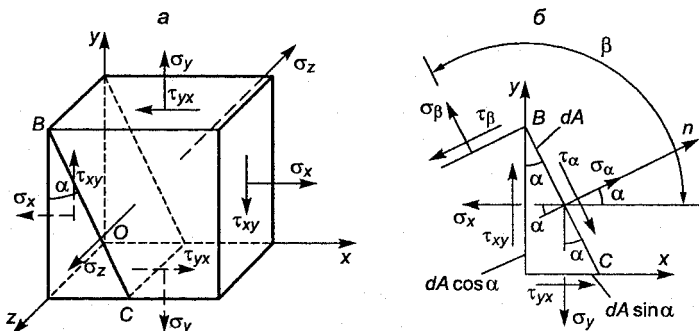


Рис. 2.7

го параллелепипеда плоскостью BC , параллельной оси z под углом α к вертикальной плоскости (см. рис. 2.7, a).

Нормаль к наклонной площадке BC составляет угол α с осью x (рис. 2.7, b). На наклонной площадке будут действовать нормальное напряжение σ_α и касательное τ_α , которые принимаются положительными. Для определения σ_α и τ_α рассмотрим условия равновесия треугольной призмы. Если площадь наклонной площадки BC обозначить dA , то площади граней, на которых действуют напряжения σ_x и σ_y , соответственно будут $dA\cos\alpha$ и $dA\sin\alpha$. Проектируя все силы на оси, совпадающие с напряжениями σ_α и τ_α , получим:

$$\sigma_\alpha dA - \sigma_x dA \cos\alpha \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\alpha \sin\alpha - \sigma_y dA \sin\alpha \sin\alpha + \\ + \tau_{yx} dA \sin\alpha \cos\alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha dA - \sigma_x dA \cos\alpha \sin\alpha - \tau_{xy} \cos\alpha \cos\alpha + \sigma_y dA \sin\alpha \cos\alpha + \\ + \tau_{yx} dA \sin\alpha \sin\alpha = 0.$$

Принимая положительное касательное напряжение на грани, перпендикулярной к оси x , за исходное $\tau_{xy} > 0$, приравнявая, согласно закону парности касательных напряжений, по модулю величины $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ после сокращения на dA и учитывая, что

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha; \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha,$$

окончательно найдем

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad (2.2)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (2.3)$$

В формулы (2.2) и (2.3) все величины подставляются со своими знаками.

Объемные силы, действующие на элемент, являются силами второго порядка малости по сравнению с усилиями, приложенными к граням элемента, поэтому при составлении уравнений равновесия они не учитываются. Формулы (2.2) и (2.3) выражают нормальные σ_α и касательные τ_α напряжения, возникающие на

произвольной наклонной площадке, нормаль к которой составляет угол α осью x , через напряжения σ_x , σ_y , σ_{xy} , действующие на гранях элементарного параллелепипеда. Подставляя в формулы (2.2) и (2.3) вместо угла α угол $\beta = \alpha + 90^\circ$, получим выражения для напряжений σ_β и τ_β , возникающих в площадке, составляющей прямой угол с наклонной площадкой (см. рис. 2.7, б).

$$\sigma_\beta = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \tau_\beta &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha = \\ &= -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right) = -\tau_\alpha. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Суммируя σ_α и σ_β , получим соотношение

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y. \quad (2.6)$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках всегда постоянна, а касательные напряжения на этих площадках равны по величине и противоположны по направлению. Мы вновь подтвердили закон парности касательных напряжений.

При изменении угла α напряжения σ_α и τ_α изменяются. Найдем положение площадки, на которой напряжение σ_α имеет экстремальное значение. Для этого возьмем производную от σ_α по α и приравняем ее нулю:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_x \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_y \sin\alpha \cos\alpha - 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

или

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0. \quad (2.7)$$

Полученное уравнение равносильно $\tau_\alpha = 0$.

Следовательно, если нормальное напряжение на площадке имеет значение σ_{\max} или σ_{\min} , то касательное напряжение на этой площадке равно нулю, т.е. такая площадка является главной.

Положение главных площадок определим, решив уравнение (2.7) относительно угла α , который обозначим через $\alpha_{\text{гл}}$.

Разделим уравнение (2.7) на $\cos 2\alpha$:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{tg} 2\alpha_{\text{гл}} + \tau_{xy} = 0.$$

Откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{гл}} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (2.8)$$

где $\alpha_{\text{гл}}$ - угол нормали к главной площадке с осью x .

Так как тангенс представляет собой периодическую функцию с периодом π , то уравнению (2.8) удовлетворяют углы

$$2\alpha_{\text{гл}_n} = 2\alpha_{\text{гл}} + n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

или

$$\alpha_{\text{гл}_n} = \alpha_{\text{гл}} + n \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя значения n , получим

$$\alpha_{\text{гл}_0} = \alpha_{\text{гл}}; \alpha_{\text{гл}_1} = \alpha_{\text{гл}} + 90^\circ; \alpha_{\text{гл}_2} = \alpha_{\text{гл}} + 180^\circ \text{ и т.д.}$$

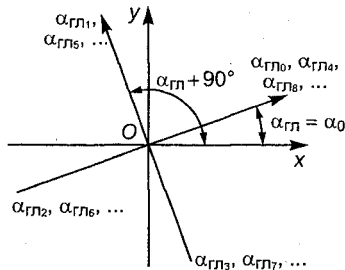


Рис. 2.8

Если отложить углы $\alpha_{\text{гл}_0}$; $\alpha_{\text{гл}_1}$; $\alpha_{\text{гл}_2}$; $\alpha_{\text{гл}_n}$ от оси x (рис. 2.8), то определятся два взаимно перпендикулярных направления, образующих с осью x углы $\alpha_{\text{гл}}$ и $\alpha_{\text{гл}} + 90^\circ$.

Одно направление относится к σ_{max} , другое - к σ_{min} .

Чтобы установить положение σ_{max} , необходимо взять вторую производную от выражения (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_\alpha}{d\alpha^2} &= -2(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + 4\tau_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= -2 \cos 2\alpha [(\sigma_x - \sigma_y) - 2\tau_{xy} \operatorname{tg} 2\alpha]. \end{aligned}$$

Заменяя $\operatorname{tg} 2\alpha$ по формуле (2.8), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2} &= -2\cos 2\alpha \left[(\sigma_x - \sigma_y) + 4 \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_x - \sigma_y} \right] = \\ &= -\frac{2\cos 2\alpha}{\sigma_x - \sigma_y} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \right]. \end{aligned}$$

Так как выражение в квадратных скобках всегда положительно, то условие существования максимума $\left(\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2} < 0 \right)$ будет наблюдаться в двух случаях.

1. При $\sigma_x > \sigma_y$ и $\cos 2\alpha > 0$.

Условие 1 выполняется, когда

$$-\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad -45^\circ < \alpha < 45^\circ;$$

в этом случае положение нормали к площадке, на которой возникает σ_{\max} , будет определяться углом $\alpha_{\text{гл}0} = \alpha_{\text{гл}}$.

2. При $\sigma_x < \sigma_y$ и $\cos 2\alpha < 0$.

Условие 2 выполняется, когда

$$\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \frac{3}{2}\pi \quad \text{или} \quad 45^\circ < \alpha < 135^\circ;$$

в этом случае положение нормали к площадке, на которой возникает σ_{\max} , будет определяться углом $\alpha_{\text{гл}1} = \alpha_{\text{гл}} + 90^\circ$.

В качестве контроля правильности определения направления σ_{\max} и σ_{\min} можно руководствоваться следующим правилом: направление σ_{\max} всегда располагается в тех двух четвертях, где касательные напряжения τ_{xy} и τ_{yx} сходятся стрелками, а направление σ_{\min} будет в тех двух четвертях, где τ_{xy} и τ_{yx} расходятся стрелками (рис. 2.9).

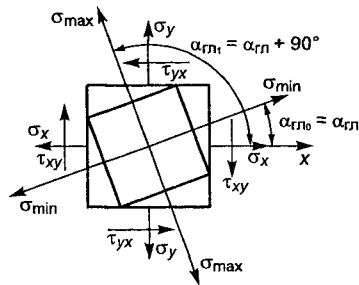


Рис. 2.9

Значения σ_{\max} и σ_{\min} получим, подставив в формулу (2.2) величины углов $\alpha_{\text{гл}0}$ и $\alpha_{\text{гл}1}$,

$$\sigma_{\max, \min} = \sigma_x \cos^2 \alpha_{\text{гл}0, 1} + \sigma_y \sin^2 \alpha_{\text{гл}0, 1} - \tau_{xy} \sin 2\alpha_{\text{гл}0, 1}, \quad (2.10)$$

или подставив в формулы (2.2) и (2.4) величину угла $\alpha_{\text{гл}}$.

Формулы для вычисления главных напряжений σ_{\max} и σ_{\min} можно получить в другом виде (без тригонометрических функций) при помощи алгебраических преобразований, положив в формулах (2.2) и (2.4) угол $\alpha = \alpha_{\text{гл}}$.

Заметим, что

$$\cos 2\alpha_{\text{гл}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha_{\text{гл}}}}, \quad \sin 2\alpha_{\text{гл}} = \text{tg} 2\alpha_{\text{гл}} \cos 2\alpha_{\text{гл}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \cos^2 2\alpha_{\text{гл}} &= \frac{1 + \cos 2\alpha_{\text{гл}}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha_{\text{гл}}}} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 2\alpha_{\text{гл}} &= \frac{1 - \cos 2\alpha_{\text{гл}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha_{\text{гл}}}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha_{\text{гл}} &= \frac{\text{tg} 2\alpha_{\text{гл}}}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha_{\text{гл}}}} = \frac{\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}}{\sqrt{1 + \frac{4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}} = \\ &= \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставляя (2.11), (2.12), (2.13) в (2.2) и (2.4), после элементарных преобразований получим

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \quad (2.14)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (2.15)$$

или

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (2.16)$$

В формуле (2.16) верхний знак относится к σ_{\max} , нижний - к σ_{\min} . Вычислив значения σ_{\max} , σ_{\min} и зная σ_z , присваиваем им индексы главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 с учетом знаков.

2.4. Касательные напряжения

Определим величину наибольших касательных напряжений и положение площадок, на которых они возникают. Для этого возьмем производную от τ_α по α и приравняем ее нулю:

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0.$$

Откуда получим угол α , который обозначим через α_k .

$$\operatorname{tg} 2\alpha_k = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}, \quad (2.17)$$

где α_k - угол, определяющий положение нормали к площадке с наибольшими касательными напряжениями и осью x .

Подставляя значения $2\alpha_k$ из (2.17) в (2.3), получим формулу для наибольших касательных напряжений. Так как в объемном напряженном состоянии площадки с наибольшими касательными напряжениями имеются в каждом семействе площадок, параллельных осям x , y , z , то условимся наибольшее касательное напряжение в каждом семействе обозначить τ_{\max} с индексом оси, которой параллельна площадка.

Так как

$$\cos 2\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_k}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}},$$

то, подставляя $\cos 2\alpha_k$ в (2.3), получим

$$\tau_{\max z} = \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{tg} 2\alpha_k + \tau_{xy} \right] \cos 2\alpha_k = \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} + \tau_{xy} \right] \times \\ \times \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (2.18)$$

Согласно закону парности, касательное напряжение на перпендикулярной грани будет равно $\tau_{\max z}$ по величине и обратно по знаку. Выражение (2.18) можно записать через главные напряжения, используя формулы (2.14) и (2.15). Откуда

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \text{и} \quad \tau_{\max z} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (2.19)$$

Чтобы выяснить расположение площадок с максимальными касательными напряжениями относительно главных площадок, рассмотрим произведение

$$\operatorname{tg} 2\alpha_k \cdot \operatorname{tg} 2\alpha_{\text{гл}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \cdot \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -1. \quad (2.20)$$

Как следует из аналитической геометрии, в этом случае прямые, расположенные под углами $2\alpha_k$ и $2\alpha_{\text{гл}}$ к оси x , будут перпендикулярными:

$$2\alpha_k = 2\alpha_{\text{гл}} + 90^\circ \quad \text{или} \quad \alpha_k = \alpha_{\text{гл}} + 45^\circ.$$

Таким образом, наибольшие касательные напряжения равны полуразности главных напряжений и приложены к площадкам, образующим углы 45° с главными площадками (рис. 2.10).

Величину нормальных напряжений, действующих в площадках с наибольшими касательными напряжениями, получим, рассматривая равновесие треугольной призмы, у которой наклонная площадка составляет угол 45° с главными площадками (рис. 2.11).

Проектируя силы на нормаль к площадке, после преобразований, получим

$$\sigma_{45} = \sigma_{\max} \cos^2 45^\circ + \sigma_{\min} \sin^2 45^\circ = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad (2.21)$$

аналогично для касательных напряжений

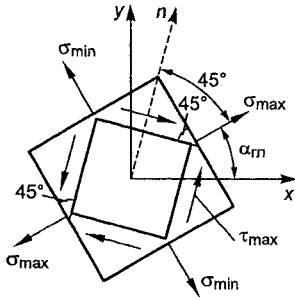


Рис. 2.10

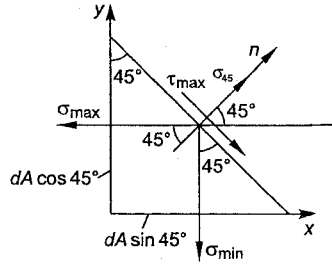


Рис. 2.11

$$\tau_{45} = \sigma_{\max} \cos 45^\circ \sin 45^\circ - \sigma_{\min} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (2.22)$$

Формула (2.22) подтверждает ранее полученный вывод (2.19) о величине наибольшего касательного напряжения. Отметим, что на площадке, где возникает τ_{\max} , действуют и нормальные напряжения, равные полусумме главных напряжений.

2.5. Обзор различных видов напряженных состояний

Объемное напряженное состояние

Изобразим объемное напряженное состояние в точке в виде параллелепипеда, на гранях которого действуют главные напряжения (рис. 2.12).

Наибольшие касательные напряжения в площадках, наклоненных к главным площадкам под углом 45° , согласно формуле (2.19), будут равны (рис. 2.13):

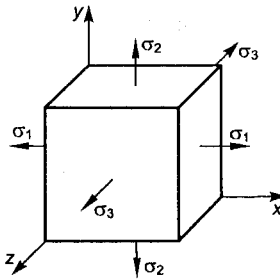


Рис. 2.12

$$\tau_{\max z} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{\max x} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{\max y} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (2.23)$$

Так как σ_1 является самым большим в алгебраическом смысле напряжением, а σ_3 - самым малым, то максимальные

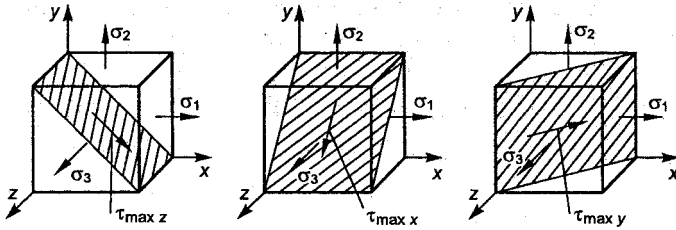


Рис. 2.13

касательные напряжения в рассматриваемой точке будут действовать в площадке, параллельной оси y и составляющей углы 45° с главными площадками, перпендикулярными осям x и z .

Частным случаем объемного напряженного состояния являются чистое всестороннее растяжение или сжатие, когда $\sigma_z = \sigma_x = \sigma_y = \sigma$ и $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$. Из уравнений (2.2) - (2.5) найдем, что

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma \text{ и } \tau_\alpha = \tau_\beta = 0.$$

Это значит, что любая площадка, проходящая через рассматриваемую точку, является главной, и на всех площадках действуют одинаковые напряжения, т.е. существует бесчисленное множество главных площадок. Таким образом, в общем случае в точке могут быть только три главные площадки, в случае всестороннего растяжения или сжатия их может быть бесчисленное множество.

Плоское напряженное состояние

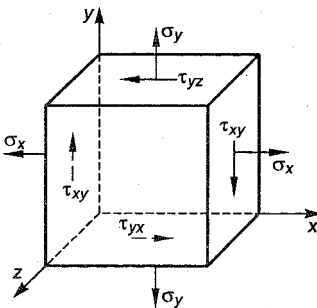


Рис. 2.14

При плоском напряженном состоянии на одной из главных площадок в точке главное напряжение равно нулю (рис. 2.14).

Величины остальных двух главных напряжений и положение главных площадок, на которых они действуют, определяются по формулам (2.8), (2.14), (2.15). Зная σ_{\max} и σ_{\min} , главным напряжениям присваиваются индексы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Наи-

большие касательные напряжения, возникающие в семействе площадок, параллельных оси z , будут равны

$$\tau_{\max z} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (2.24)$$

или

$$\tau_{\max z} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (2.25)$$

где σ_1 и σ_2 – напряжения на главных площадках, параллельных оси z (σ_2 – принимается растягивающим).

Следует помнить, что в элементе можно провести также площадки параллельно осям x и y , на которых касательные напряжения иногда оказываются большими, чем определяемые формулой (2.25). Поэтому для определения максимального касательного напряжения, действующего в точке, рекомендуется вычислять все наибольшие касательные напряжения, возникающие в площадках, параллельных трем координатным осям x , y , z .

Если напряжения $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$, то ни на одной из наклонных площадок, параллельных оси z , не возникнут касательные напряжения, т.е. любая площадка, проведенная через рассматриваемую точку параллельно оси z , будет являться главной площадкой.

Все формулы и правила, которые были получены в предыдущих параграфах, справедливы и для плоского напряженного состояния.

Чистый сдвиг

Чистым сдвигом называется плоское напряженное состояние, когда на гранях элементарного параллелепипеда действуют только касательные напряжения (рис. 2.15, *a*). Определим нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке BC , параллельной оси z , нормаль к которой составляет угол α с осью x , для чего рассмотрим равновесие трехгранной призмы, вырезанной из параллелепипеда и спроектированной на вертикальную плоскость (рис. 2.15, *б*). Так как знаки касательных напряжений в данном случае значения не имеют, то индексы у них опущены.

Обозначим через dA площадь наклонного сечения. Тогда площадь грани, перпендикулярной к оси x , будет $dA \cos \alpha$, а площадь грани, перпендикулярной к оси y , – $dA \sin \alpha$.

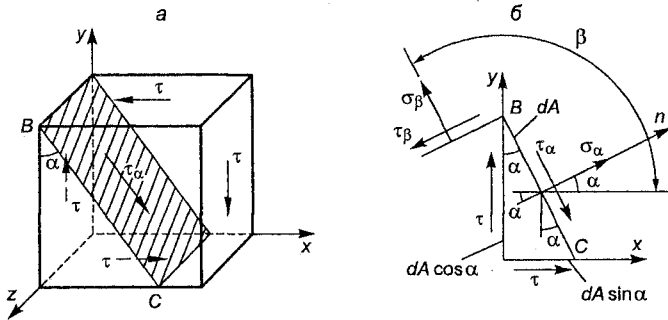


Рис. 2.15

Проектируя все силы на оси, совпадающие с σ_α и τ_α , получим

$$\sigma_\alpha dA + \tau dA \cos \alpha \sin \alpha + \tau dA \sin \alpha \cos \alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha dA - \tau dA \cos \alpha \cos \alpha + \tau dA \sin \alpha \sin \alpha = 0.$$

Откуда

$$\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha; \quad (2.26)$$

$$\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha. \quad (2.27)$$

Если вместо угла α в формулы (2.26), (2.27) подставить угол $\beta = \alpha + 90^\circ$, то получим выражение для напряжений, действующих в сечении, составляющем прямой угол с наклонной площадкой:

$$\sigma_\beta = \tau \sin 2\alpha; \quad (2.28)$$

$$\tau_\beta = -\tau \cos 2\alpha = -\tau_\alpha. \quad (2.29)$$

Проанализируем полученные выражения.

При $\alpha = 0$ $\sigma_\alpha = 0$; $\tau_\alpha = \tau$; $\sigma_\beta = 0$; $\tau_\beta = -\tau$.

При $\alpha = 90^\circ$ $\sigma_\alpha = 0$; $\tau_\alpha = -\tau$; $\sigma_\beta = 0$; $\tau_\beta = \tau$.

При $\alpha = 45^\circ$ $\sigma_\alpha = -\tau$; $\tau_\alpha = 0$; $\sigma_\beta = \tau$; $\tau_\beta = 0$.

Из анализа следует, что при повороте элемента на угол 45° на его гранях будут действовать только нормальные напряжения, при этом на одной паре граней они будут растягивающими, на другой - сжимающими (рис. 2.16). В этом положении все грани элемента будут совпадать с главными площадками, на которых действуют главные напряжения, равные $\sigma_1 = \sigma_\beta$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = \sigma_\alpha$.

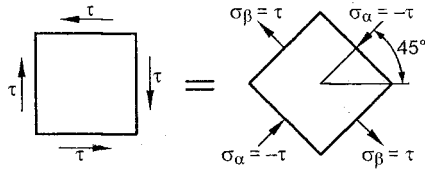


Рис. 2.16

Таким образом, чистый сдвиг эквивалентен напряженному состоянию, создаваемому в результате одновременного растяжения и сжатия равными по модулю силами в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Если элемент повернуть на угол, отличный от 45° , то на его гранях будут действовать как нормальные, так и касательные напряжения.

Линейное напряженное состояние

При линейном напряженном состоянии на двух главных площадках в точке главные напряжения равны нулю. При простом растяжении главные напряжения действуют только в сечениях, перпендикулярных к оси стержня.

Выделим из растянутого призматического стержня элементарный параллелепипед так, чтобы его грани были перпендикулярны и параллельны оси x . Элемент изобразим в проекции на вертикальную плоскость (рис. 2.17, а).

Все грани элемента являются главными площадками, а напряжение σ_x есть главное напряжение. Напряжения σ_α и τ_α на наклонной площадке BC , нормаль к которой составляет угол α с осью x , а также напряжения σ_β и τ_β на площадке, перпендикулярной BC (рис. 2.17, б), найдем, положив в выражениях (2.2–2.5) напряжения σ_y и τ_{xy} равными нулю:

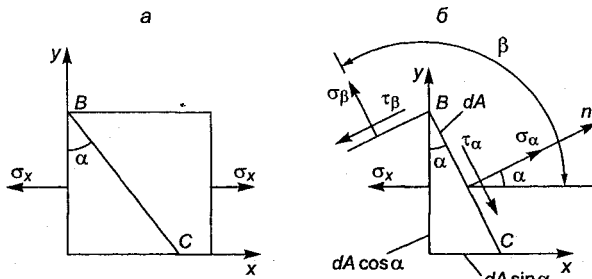


Рис. 2.17

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha; \quad (2.30)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha; \quad (2.31)$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma_x \sin^2 \alpha; \quad (2.32)$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = -\tau_{\alpha}. \quad (2.33)$$

Проанализируем формулы (2.30-2.33).

При $\alpha = 0$ $\sigma_{\alpha} = \sigma_x$; $\tau_{\alpha} = 0$; $\sigma_{\beta} = 0$; $\tau_{\beta} = 0$.

При $\alpha = 45^\circ$ $\sigma_{\alpha} = \sigma_x/2$; $\tau_{\alpha} = \sigma_x/2$; $\sigma_{\beta} = \sigma_x/2$; $\tau_{\beta} = -\sigma_x/2$.

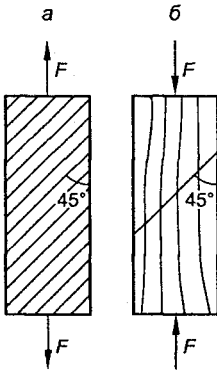


Рис. 2.18

Проведенный анализ показывает, что во всех сечениях, параллельных оси стержня, нормальные и касательные напряжения равны нулю, т.е. между продольными волокнами стержня отсутствуют взаимные сжатия и сдвиги. Касательные напряжения имеют максимальные значения на площадках, образующих с осью стержня углы $\pm 45^\circ$; нет площадок, на которых действуют только касательные напряжения.

Таким образом, при линейном напряженном состоянии главные напряжения следующие.

При растяжении $\sigma_x = \sigma_1$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

При сжатии $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma_x$.

Необходимо отметить, что хотя максимальное касательное напряжение равно половине нормальному напряжению, оно нередко является предельным напряжением для материалов, работающих на сдвиг хуже, чем на растяжение. Так, при испытании на растяжение плоских стержней из малоуглеродистой стали наблюдаются линии скольжения, расположенные к продольной оси стержня под углом, примерно равным 45° . Эти линии, называемые **линиями Людерса** или **линиями Чернова**, показывают, что начинается пластическое течение материала вдоль плоскостей, на которых касательные напряжения максимальны (рис. 2.18, а).

Аналогичное разрушение наблюдается при сжатии короткого деревянного бруса вдоль волокон (рис. 2.18, б).

2.6. Уравнение равновесия элемента тела в случае линейного неоднородного напряженного состояния

Выделим элементарный параллелепипед с размерами ребер dx , dy , dz (рис. 2.19) в окрестности некоторой точки B с координатами x , y , z из призматического стержня, растягиваемого силами, непрерывно распределенными вдоль оси x . Элемент ограничен главными площадками.

В данном случае нельзя считать одинаковыми напряжения на противоположных гранях параллелепипеда. Если на левой грани действует напряжение σ_x , то напряжение, приложенное к правой грани, должно получить некоторое приращение от изменения на величину dx координаты x при постоянных y и z .

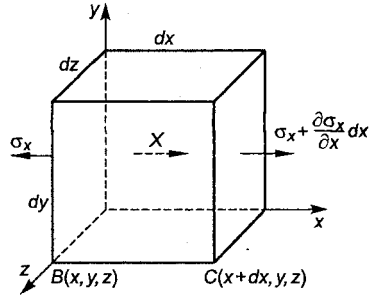


Рис. 2.19

Согласно положениям вышней математики, прираще-

ние функции σ_x будет равно $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, где $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ - частная производная функции $\sigma_x = f(x, y, z)$ по x . Итак, к правой грани при-

ложено напряжение $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$.

На элемент будут действовать еще объемные силы (сила тяжести, центробежная сила и т.д.). Обозначим горизонтальную проекцию объемной силы, приходящейся на единицу массы, через X . Тогда объемная сила, приложенная к выделенному элементу, будет $\rho X dx dy dz$, где ρ - плотность материала. Уравнение равновесия элемента получим, спроектировав все силы на ось x :

$$-\sigma_x dy dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho X dx dy dz = 0.$$

После сокращения получим уравнение равновесия элемента в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \rho X = 0. \quad (2.34)$$

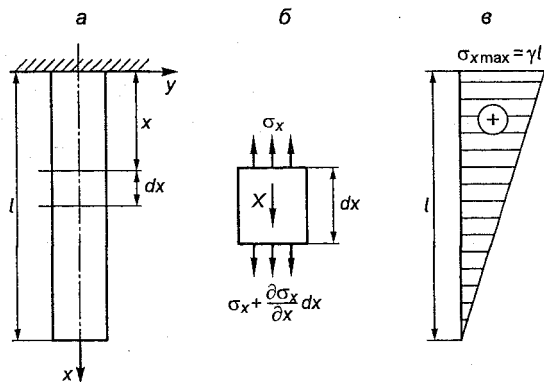


Рис. 2.20

Когда объемной силой является сила тяжести, то $\rho X = \gamma$, где γ - удельный вес материала.

Пример 2.1. Определить распределение растягивающих напряжений в подвешенном за один конец канате длиной l под действием собственного веса (рис. 2.20, а). Удельный вес каната γ Н/м³.

Решение. Расположим в верхнем (неподвижном) сечении начало координат, ось x направим вниз, ось y - вправо. Вырежем двумя сечениями, нормальными к оси, элемент каната dx (рис. 2.20, б). Усилие, приходящееся на единицу массы, будет равно

$$X = \frac{dF}{dm} = \frac{\gamma dV}{\rho dV} = \frac{\gamma}{\rho} \text{ Н/кг,}$$

где dV - объем элемента.

Условие равновесия (2.34) примет вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \gamma = 0.$$

Откуда $\sigma_x = -\gamma x + C$. При $x = l$ $\sigma_x = -\gamma l + C = 0$; $C = \gamma l$.

Тогда $\sigma_x = -\gamma x + \gamma l = \gamma(l - x)$.

При $x = 0$ $\sigma_x = \sigma_{\max} = \gamma l$; $x = l$ $\sigma_x = 0$.

Эпюра распределения напряжений σ_x по длине каната показана на рис. 2.20, в. Если обозначить предел прочности мате-

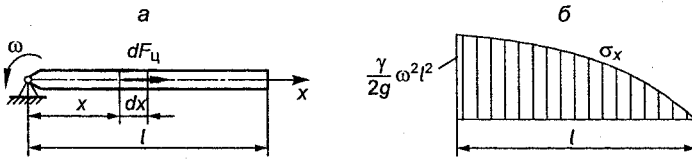


Рис. 2.21

риала каната на растяжение через σ_B , то предельная длина каната определится из уравнения

$$\sigma_B = l_{\text{пр}} \gamma.$$

Откуда

$$l_{\text{пр}} = \frac{\sigma_B}{\gamma}.$$

Следовательно, материал каната должен обладать высоким пределом прочности и малым удельным весом.

Пример 2.2. Стальной стержень длиной l постоянного поперечного сечения вращается относительно концевое сечения с угловой скоростью ω (рис. 2.21, а). Определить распределение напряжения по длине стержня и допустимые угловую и окружную скорости. Удельный вес материала стержня γ .

Решение. Единственной нагрузкой на стержень при вращении является центробежная сила $F_{\text{ц}}$. Выделим на расстоянии x от оси вращения элементарный участок стержня длиной dx . На выделенный элемент при вращении действует центробежная сила

$$dF_{\text{ц}} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 x A dx,$$

где A - площадь поперечного сечения стержня.

Усилие, приходящееся на единицу массы от центробежных сил,

$$X = \frac{dF_{\text{ц}}}{dm} = \frac{\gamma \omega^2 x A dx}{g \rho A dx} = \frac{\gamma}{g \rho} \omega^2 x,$$

где ρ - плотность материала.

Уравнение равновесия (2.34) запишем следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 x = 0.$$

Откуда

$$\sigma_x = -\frac{\gamma}{2g}\omega^2 x^2 + C.$$

Произвольная постоянная определяется из условия: при $x = l$

$$\sigma_x = -\frac{\gamma}{2g}\omega^2 l^2 + C = 0;$$

$$C = \frac{\gamma}{2g}\omega^2 l^2.$$

Тогда

$$\sigma_x = \frac{\gamma}{2g}\omega^2 (l^2 - x^2);$$

при $x = 0$

$$\sigma_x = \sigma_{x \max} = \frac{\gamma}{2g}\omega^2 l^2 = \frac{\gamma}{2g}v_{\text{ок}}^2,$$

где $v_{\text{ок}} = \omega l$ – окружная скорость на внешнем конце стержня.

При $x = l$ $\sigma_x = 0$. Эпюра распределения напряжений по длине стержня показана на рис. 2.21, б.

Окружная и угловая скорости вращающегося стержня ограничиваются прочностью материала. Обозначив допусковое напряжение на растяжение через $[\sigma]_p$, получим следующие выражения:

$$v_{\text{ок пред}} = \sqrt{\frac{2[\sigma]_p g}{\gamma}} \quad \text{и} \quad \omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{2[\sigma]_p g}{\gamma l^2}}.$$

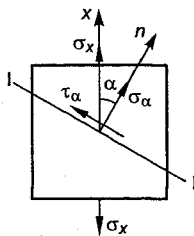


Рис. 2.22

Пример 2.3. Для линейного напряженного состояния, изображенного на рис. 2.22, определить нормальные и касательные напряжения в сечении I-I, если $\sigma_x = 150$ МПа, $\alpha = 30^\circ$.

Решение. В соответствии с правилами знаков устанавливаем $\sigma_x = 150$ МПа; $\alpha = -30^\circ$, так как угол между осью x и нормалью к площадке отсчитывается по часовой стрелке.

По формулам (2.30) и (2.31) получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha = 150(-0,866)^2 = 11,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = \frac{150}{2} \sin(-60) = -65 \text{ МПа.}$$

Пример 2.4. Для напряженного состояния, изображенного на рис. 2.23, определить напряжения σ_{α} и τ_{α} в сечении I-I, расположенном к оси y под углом $\beta = 30^{\circ}$, если $\sigma_y = 30$ МПа; $\sigma_x = 70$ МПа; $\tau_{yx} = \tau_{xy} = 40$ МПа.

Решение. В соответствии с правилами знаков устанавливаем $\sigma_x = 70$ МПа; $\sigma_y = 30$ МПа; $\tau_{xy} = -40$ МПа; $\alpha = -30^{\circ}$.

По формулам (2.2) и (2.3)

$$\sigma_{\alpha} = 70 \cos^2(-30^{\circ}) + 30 \sin^2(-30^{\circ}) + 40 \sin(-60^{\circ}) = 26,4 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{70-30}{2} \sin(-60^{\circ}) - 40 \cos(-60^{\circ}) = -37 \text{ МПа.}$$

Напряжения σ_{α} и τ_{α} показаны на рис. 2.23.

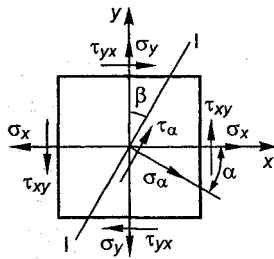


Рис. 2.23

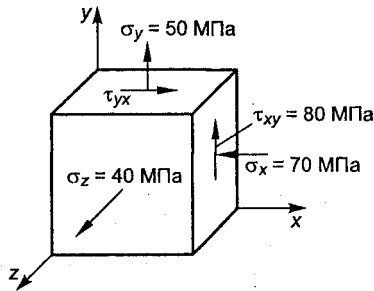


Рис. 2.24

Пример 2.5. Для напряженного состояния, изображенного на рис. 2.24, найти главные напряжения и положения главных площадок, а также максимальное касательное напряжение, и показать площадки, в которых оно действует.

Решение. В соответствии с правилами знаков принимаем $\sigma_x = -70$ МПа; $\sigma_y = 50$ МПа; $\tau_{xy} = -80$ МПа; $\sigma_z = 40$ МПа. По формуле (2.16) находим

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{-70+50}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-70-50)^2 + 4(-80)^2} = -10 \pm 100.$$

Следовательно, $\sigma_{\max} = 90$ МПа; $\sigma_{\min} = -110$ МПа.

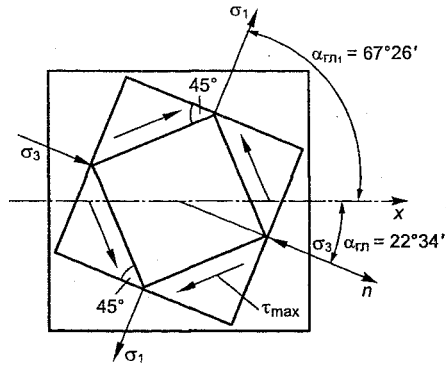


Рис. 2.25

Обозначим главные напряжения $\sigma_1 = 90$ МПа; $\sigma_2 = 40$ МПа; $\sigma_3 = -110$ МПа. Положение главных площадок определим по формуле (2.8).

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{ГЛ}} = \frac{2(-80)}{-70-50} = -1,33; \quad 2\alpha_{\text{ГЛ}} = -53^\circ 8'; \quad \alpha_{\text{ГЛ}} = -22^\circ 34'.$$

$$\alpha_{\text{ГЛ}0} = \alpha_{\text{ГЛ}} = -22^\circ 34'; \quad \alpha_{\text{ГЛ}1} = \alpha_{\text{ГЛ}} + 90^\circ = -22^\circ 34' + 90^\circ = 67^\circ 26'.$$

Положение главных площадок показано на рис. 2.25.

Так как угол $\alpha_{\text{ГЛ}}$ отрицательный, то откладываем его от оси x по ходу часовой стрелки. Направление нормали n определяет положение одной главной площадки, другая площадка расположена ей перпендикулярно. Исходное напряжение σ_y больше (в алгебраическом смысле) напряжения σ_x , поэтому главная площадка, на которой действует главное напряжение σ_1 , будет определяться углом $\alpha_{\text{ГЛ}1} = \alpha_{\text{ГЛ}} + 90^\circ$ или направление σ_1 будет составлять с осью x угол $67^\circ 26'$. На перпендикулярной площадке действует натяжение σ_3 . Наибольшее напряжение σ_1 , как отмечалось, всегда проходит через две четверти, в которых сходятся стрелки касательных напряжений. Максимальное касательное напряжение действует в площадке, параллельной оси z , и согласно формуле (2.19) будет равно

$$\tau_{\max z} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{90 - (-110)}{2} = 100 \text{ МПа}.$$

Площадки, в которых действует τ_{\max} , располагаются под углом 45° к главным площадкам с напряжениями σ_1 и σ_3 (см. рис. 2.25).

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И КОНСТАНТЫ УПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

3.1. Закон Гука при растяжении и сжатии

Наблюдения над растяжением и сжатием твердых тел показывают, что их удлинения или укорочения до определенного предела пропорциональны действующим силам. Эта закономерность впервые была высказана в 1679 г. Робертом Гуком³ в статье «Сила сопротивления или упругость» в формулировке «каково растяжение, такова и сила» и с тех пор носит название **закона Гука**.

Роберт Гук проводил свои эксперименты практически с законченными конструкциями, пружинами, кусками проволоки, балками, деревянными стержнями и так далее, подвешивая к ним грузы и измеряя возникающие удлинения. Позже более точными исследованиями была подтверждена справедливость закона Гука, что до определенных пределов нагружения удлинение стержней из разных материалов, различной формы поперечного сечения пропорционально нагрузке.

Введем следующие обозначения: F - приложенная сила; l - длина стержня; A - площадь поперечного сечения стержня; Δl - абсолютное удлинение; E - константа, характеризующая упругие свойства материал. Тогда закон Гука можно выразить уравнением, описывающим прямую линию, проведенную из начала координат (рис. 3.1).

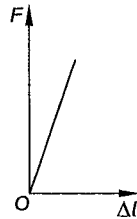


Рис. 3.1

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} \quad (3.1)$$

Константа E носит название **модуль упругости** или **модуль Юнга**, в честь английского ученого Томаса Юнга⁴, который в 1807 г. впервые ввел это фундаментальное понятие. Современное определение модуля упругости, как отношение напряжения к деформации, дано в 1825 г. французским ученым и инженером Луи Навье⁵. Из выражения (3.1) следует, что удлинение определяется двумя факторами: длиной и размерами попереч-

ного сечения стержня, а также свойствами материала. Чтобы исключить влияние геометрического фактора и выделить свойства материала, преобразуем выражение (3.1) следующим образом:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{A}, \quad (3.2)$$

где $\Delta l/l$ – относительная продольная деформация стержня при растяжении.

Величина F/A , как будет показано в гл. 7, представляет собой напряжение σ , возникающее в поперечном сечении стержня при растяжении. Учитывая, что $F/A = \sigma$, из (3.2) получим

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.3)$$

Полученное уравнение представляет линейную зависимость между напряжением и деформацией и называется **законом Гука при растяжении и сжатии**. В виде (3.3) закон выражает свойства самого материала. Модуль Юнга является фундаментальным понятием. Для данного материала модуль упругости – величина постоянная, определяемая экспериментально.

Так как ε – величина безразмерная, то модуль упругости E измеряется в тех же единицах, что и напряжение, например МПа; Н/см². Для большинства материалов модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.

Относительная продольная деформация, согласно закону Гука,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (3.4)$$

Из формулы следует, что при одном и том же напряжении относительная продольная деформация (относительное удлинение) будет тем меньше, чем больше E , и наоборот. Другими словами, чем больше E , тем материал будет жестче. Следовательно, модуль упругости физически характеризует жесткость материала.

3.2. Коэффициент Пуассона

При растяжении стержня его удлинение всегда сопровождается уменьшением поперечных размеров; при сжатии, наоборот, – увеличением поперечных размеров. Другими словами,

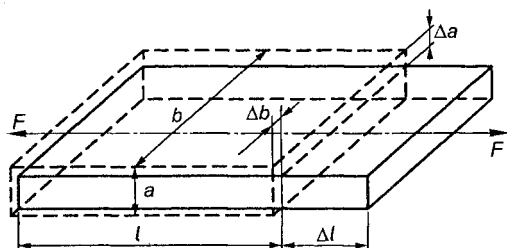


Рис. 3.2

продольная деформация всегда сопровождается поперечной деформацией.

На рис. 3.2 изображен элемент растягиваемого стержня до и после приложения нагрузки.

Изменение размеров после деформации обозначим через Δl , Δb , Δa и назовем **абсолютными деформациями**. Тогда относительные продольная и поперечная деформации будут соответственно равны

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \quad (3.5)$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a}. \quad (3.6)$$

Поперечная деформация для изотропных материалов по всем поперечным направлениям одинакова.

Опыт показывает, что в пределах упругой области при простом растяжении и сжатии относительная поперечная деформация пропорциональна относительной продольной деформации. Так как продольная и поперечная деформации всегда противоположны по знаку, то указанное положение следует записать в виде

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon. \quad (3.7)$$

Откуда

$$\mu = \frac{|\varepsilon'|}{|\varepsilon|}. \quad (3.8)$$

Величина μ , равная отношению относительной поперечной деформации к относительной продольной, взятому по абсолютной величине, называется **коэффициентом Пуассона** по име-

ни французского математика Симеона Пуассона⁶, который пытался вычислить это отношение на основе молекулярной теории материалов.

Используя закон Гука (3.3), относительную поперечную деформацию можно выразить через растягивающее напряжение:

$$\epsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (3.9)$$

При сжатии напряжение в (3.9) необходимо подставлять со знаком «минус».

Коэффициент Пуассона – величина безразмерная, является физической константой, характеризующей упругие свойства материала, и определяется экспериментально. Его предельные значения для изотропных материалов можно установить, если подсчитать изменение объема стержня при растяжении. Обратимся к рис. 3.2. Первоначальный объем элемента

$$V_0 = abl. \quad (3.10)$$

После деформации, так как размеры элемента получают соответствующие приращения, его объем будет определяться произведением:

$$V_1 = l(1 + \epsilon) \cdot a(1 - \mu\epsilon) \cdot b(1 - \mu\epsilon) = V_0 (1 + \epsilon)(1 - \mu\epsilon)^2.$$

Пренебрегая величинами высшего порядка, получим

$$V_1 = V_0 [1 + \epsilon(1 - 2\mu)]. \quad (3.11)$$

Абсолютное приращение объема

$$\Delta V = V_1 - V_0 = V_0 \epsilon (1 - 2\mu). \quad (3.12)$$

Так как предположение, что при растяжении стержня из любого материала его объем может уменьшаться, противоречит здравому смыслу, то ΔV при растяжении должно быть больше или равняться нулю. Тогда из выражения (3.12) следует, что $(1 - 2\mu) \geq 0$, а значит, $\mu \leq 0,5$. Когда $\mu = 0,5$, объем тела при растяжении не меняется: $\Delta V = 0$. Имеется два вида материала – резина и парафин, для которых μ при растяжении равно 0,5. С другой стороны, пробка представляет материал, для которого $\mu = 0$. Числовые значения μ при растяжении и сжатии материала считаются одинаковыми. Для всех металлов значение μ находится в пределах 0,25–0,35, для стали $\mu \approx 0,3$.

3.3. Обобщенный закон Гука

Рассмотрим элементарный параллелепипед, на гранях которого действуют главные напряжения (рис. 3.3). Деформации элемента в направлении главных напряжений являются главными деформациями.

При вычислении деформаций в направлении главных осей x, y, z при объемном напряженном состоянии необходимо учитывать действия всех трех главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Пользуясь принципом независимости действия сил, представим трехосное напряженное состояние как результат наложения трех линейных напряженных состояний (рис. 3.4). Из рис. 3.4

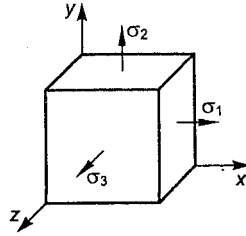


Рис. 3.3

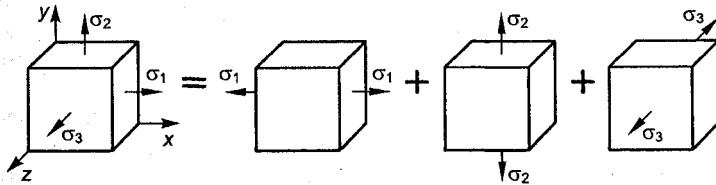


Рис. 3.4

видно, что линейные деформации в направлении осей x, y, z будут следующими:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(\sigma_1) + \varepsilon_x(\sigma_2) + \varepsilon_x(\sigma_3); \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(\sigma_1) + \varepsilon_y(\sigma_2) + \varepsilon_y(\sigma_3); \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z(\sigma_1) + \varepsilon_z(\sigma_2) + \varepsilon_z(\sigma_3). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Члены в выражении (3.13) представляют собой линейные деформации в направлении осей x, y, z от действия напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Используя формулы (3.3) и (3.9), найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x(\sigma_1)} &= \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_{x(\sigma_2)} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{x(\sigma_3)} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}; \\ \varepsilon_{y(\sigma_1)} &= -\mu \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_{y(\sigma_2)} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{y(\sigma_3)} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_z(\sigma_1) = -\mu \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_z(\sigma_2) = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_z(\sigma_3) = \frac{\sigma_3}{E}.$$

Подставляя (3.14) в (3.13) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Полученные уравнения (3.15) являются аналитическим выражением обобщенного закона Гука для *изотропного материала*.

Обобщенный закон Гука устанавливает в пределах малых деформаций линейную зависимость между компонентами напряженного и деформированного состояний. Значения сжимающих напряжений подставляются в формулы (3.15) со знаком минус.

Соотношения (3.15) справедливы не только для главных деформаций и главных напряжений, они верны и тогда, когда на площадках, кроме нормальных, действуют и касательные напряжения, так как линейные деформации не зависят от касательных напряжений. Нормальные напряжения не вызывают искажений углов элемента, а касательные - изменений длин его граней.

Отсюда уравнения (3.15) для произвольных координатных осей x, y, z будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - относительные линейные деформации вдоль осей координат x, y, z ; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - нормальные напряжения, действующие в площадках, перпендикулярных соответствующим осям.

При нагревании тела увеличивают свои размеры.

Полная деформация тела представляет собой сумму ε_y - упругой деформации и ε_T - температурной деформации:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_y + \varepsilon_T.$$

Температурная деформация

$$\varepsilon_T = \alpha \cdot T,$$

где α - температурный коэффициент расширения; T - температура нагрева тела.

Подставляя ε_T в уравнение (3.16), получим обобщенный закон Гука с учетом нагрева тела:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T.\end{aligned}\tag{3.16a}$$

Положив в (3.15) $\sigma_3 = 0$, получим выражение обобщенного закона Гука для плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_2); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu\sigma_1); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [-\mu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\tag{3.17}$$

Если известны главные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y$, то решая уравнения (3.17) относительно главных напряжений σ_1 и σ_2 получим

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Формулы (3.18) широко используются на практике для вычисления главных напряжений по известным главным деформациям, что имеет большое значение в тензометрии – науке об измерении малых деформаций.

3.4. Закон Гука при сдвиге

Выделим в окрестности некоторой точки, материал в которой испытывает напряженное состояние чистого сдвига, элементарный объем в виде кубика с ребрами длиной a (рис. 3.5, а).

На гранях элемента возникают только касательные напряжения τ . Так как на гранях отсутствуют нормальные напряжения, то длины ребер не изменяются, и в результате деформации квадрат под действием касательных напряжений превратится в ромб (рис. 3.5, б).

Прямой угол при вершине B уменьшится на величину γ . Угол γ является мерой искажения формы элемента при сдвиге и углом сдвига. Величина ΔS называется абсолютным сдвигом. Из рис. 3.5, б следует, что угол сдвига равен отношению абсолютного сдвига ΔS к высоте элемента a .

$$\frac{\Delta S}{a} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma. \quad (3.19)$$

Испытания материалов при чистом сдвиге показывают, что в упругой области наблюдается линейная зависимость между

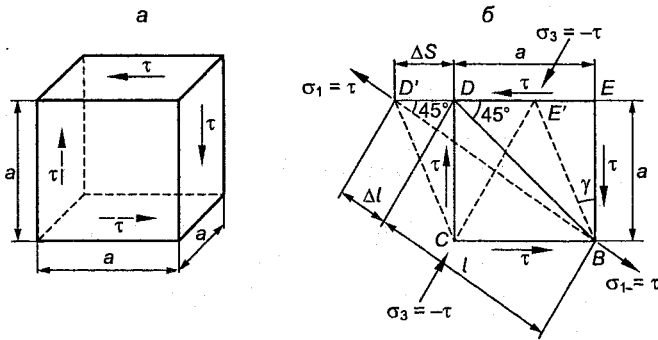


Рис. 3.5

касательным напряжением и углом сдвига. После деформации диагональ BD квадрата увеличится:

$$\Delta l = \Delta S \cos 45^\circ = \Delta S \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.20)$$

Первоначальная длина диагонали

$$l = \frac{a}{\cos 45^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{2}}. \quad (3.21)$$

Относительное удлинение диагонали

$$\varepsilon_{BD} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta S \sqrt{2} \sqrt{2}}{2 \cdot 2a} = \frac{1}{2} \frac{\Delta S}{a} = \frac{1}{2} \gamma. \quad (3.22)$$

Материал в направлении диагонали BD' подвергается растяжению напряжением $\sigma_1 = \tau$ и сжимается вдоль диагонали CE' напряжением $\sigma_3 = -\tau$. Деформация диагонали ε_{BD} обусловлена напряжениями σ_1 и σ_3 . Используя обобщенный закон Гука, получим для ε_{BD} выражение

$$\varepsilon_{BD} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu \sigma_3] = \frac{\tau}{E} + \mu \frac{\tau}{E} = \frac{\tau}{E} (1 + \mu). \quad (3.23)$$

Приравняв соотношения (3.23) и (3.22) получим

$$\frac{\tau}{E} (1 + \mu) = \frac{1}{2} \gamma$$

или

$$\tau = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma = G \gamma, \quad (3.24)$$

где $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ - модуль сдвига.

Соотношение (3.24) носит название **закона Гука при сдвиге**. Модуль сдвига является физической константой материала и характеризует жесткость материала при сдвиге. Модуль сдвига, так как γ - величина безразмерная, измеряется в единицах напряжения. Константы упругости для наиболее часто применяемых материалов приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Материал	E , МПа	G , МПа	μ
Сталь	$(2,0-2,1) \cdot 10^5$	$(0,8-0,81) \cdot 10^5$	0,25-0,30
Медь	$1,2 \cdot 10^5$	$(0,4-0,42) \cdot 10^5$	0,31-0,34
Латунь	$(1,0-1,2) \cdot 10^5$	$(0,35-0,37) \cdot 10^5$	0,32-0,42
Алюминий и алюминиевые сплавы	$(0,6-0,8) \cdot 10^5$	$(0,26-0,27) \cdot 10^5$	0,32-0,36
Дерево (вдоль волокон)	$(0,1-0,12) \cdot 10^4$	$0,05 \cdot 10^4$	

3.5. Объемная деформация

Под действием внешних нагрузок упругое тело деформируется, при этом его объем изменяется. Вычислим относительное изменение объема θ прямоугольного элемента тела с размерами l , a , b при деформации.

Объем элемента до деформации равен $V_0 = lab$, после деформации размеры элемента получают соответствующие приращения и объем будет определяться произведением

$$V_1 = l(1+\varepsilon_x) \cdot a(1+\varepsilon_y) \cdot b(1+\varepsilon_z) = V_0(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z).$$

Относительное изменение объема

$$\theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1.$$

Пренебрегая величинами второго и третьего порядка малости, окончательно получим

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Таким образом, относительное изменение объема элемента тела при деформации можно найти, сложив левую и правую части равенств (3.15).

$$\begin{aligned} \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 2\mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] = \\ &= \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Формула (3.25) представляет зависимость между относительным изменением объема и главными напряжениями, дей-

ствующими на гранях элемента. Относительное изменение объема - величина безразмерная. Формула (3.25) справедлива также и для любых нормальных напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, действующих вдоль координатных осей x, y, z . Согласно выражению (3.16), получим

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (3.26)$$

Формулы (3.25) и (3.26) выражают **объемный закон Гука**.

Для случая всестороннего растяжения (сжатия), когда $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$, формула (3.26) примет следующий вид:

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E}p \quad (3.26a)$$

или

$$\theta = \frac{p}{\frac{E}{3(1-2\mu)}} = \frac{p}{K},$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ - модуль объемной деформации при всестороннем растяжении (сжатии).

Зная относительное изменение объема элемента, можно вычислить объемную деформацию (изменение объема) всего тела:

$$\Delta V = \int_V \theta dV. \quad (3.27)$$

3.6. Потенциальная энергия деформации

Рассмотрим элементарный объем материала в виде прямоугольного параллелепипеда, на гранях которого действуют главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 3.6). Длины ребер обозначим через dx, dy, dz . Потенциальная энергия деформации, накопленная в выделенном объеме при статическом нагружении, согласно закону сохранения энергии, будет численно равна сумме работ сил, действующих на гранях элемента. В результате деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ грани элемента получают перемещения

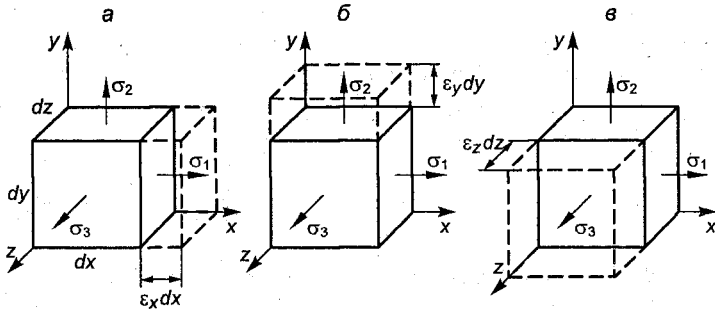


Рис. 3.6

в направлении осей: оси x — на величину $\epsilon_x dx$; оси y — на величину $\epsilon_y dy$; оси z — на величину $\epsilon_z dz$ (см. рис. 3.6, а, б, в).

Работа, совершаемая нормальной силой $\sigma_1 dydz$ на перемещении $\epsilon_x dx$ вдоль оси x , равна

$$dW_x = \frac{1}{2} \sigma_1 dydz \cdot \epsilon_x dx. \quad (3.28)$$

Аналогично получим выражения для работ нормальных сил, действующих вдоль осей y и z :

$$dW_y = \frac{1}{2} \sigma_2 dx dz \cdot \epsilon_y dy, \quad (3.29)$$

$$dW_z = \frac{1}{2} \sigma_3 dx dy \cdot \epsilon_z dz. \quad (3.30)$$

Потенциальную энергию деформации найдем, сложив выражения (3.28), (3.29), (3.30):

$$\begin{aligned} dW = dU &= \frac{1}{2} dx dy dz \cdot (\sigma_1 \epsilon_x + \sigma_2 \epsilon_y + \sigma_3 \epsilon_z) = \\ &= \frac{1}{2} dV \cdot (\sigma_1 \epsilon_x + \sigma_2 \epsilon_y + \sigma_3 \epsilon_z). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Энергия, накопленная в единице объема, будет равна

$$u_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_x + \sigma_2 \epsilon_y + \sigma_3 \epsilon_z). \quad (3.32)$$

Выражая деформации через напряжения по обобщенному закону Гука, найдем

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma_1 \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] + \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_3 \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \right\} = \\
 &= \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]. \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Потенциальную энергию, накопленную во всем объеме тела, получим, проинтегрировав выражение (3.33) по объему тела:

$$U = \int_V u_0 dV. \quad (3.34)$$

Разложим потенциальную энергию, накопленную в единице объема, на две составляющие – энергию изменения объема и энергию изменения формы:

$$u_0 = u_{0_{об}} + u_{0_f}. \quad (3.35)$$

Представим каждое из главных напряжений суммой двух величин:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma'_1; \quad \sigma_2 = \sigma_0 + \sigma'_2; \quad \sigma_3 = \sigma_0 + \sigma'_3. \quad (3.36)$$

Тогда заданное напряженное состояние можно представить суммой двух напряженных состояний (рис. 3.7).

Первое слагаемое – всестороннее растяжение. При этом напряженном состоянии форма тела не изменяется, а изменяется только объем. Второе слагаемое является напряженным состоянием, дополняющим первое до заданного напряженного состояния.

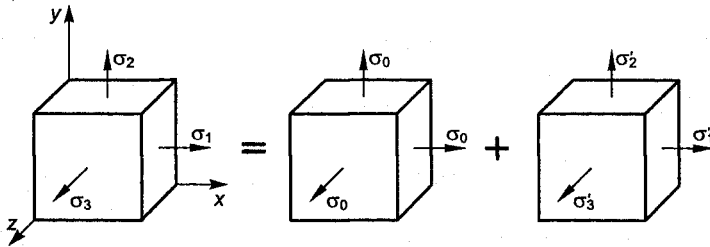


Рис. 3.7

Выберем величину σ_0 так, чтобы во втором напряженном состоянии не происходило изменение объема, а изменялась только форма.

Согласно формуле (3.25), устанавливающей зависимость между объемной деформацией и напряжениями, действующими на гранях элемента, условие отсутствия изменения объема запишется в виде

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0. \quad (3.37)$$

Складывая выражения (3.36) и учитывая условие (3.37), найдем величину σ_0 :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 + \sigma'_1 \\ \sigma_2 &= \sigma_0 + \sigma'_2 \\ \sigma_3 &= \sigma_0 + \sigma'_3 \end{aligned} \right\} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0 + \underbrace{(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)}_{=0}.$$

Откуда

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.38)$$

При этом значении σ_0 система сил первого напряженного состояния не будет производить работу на перемещениях, вызванных силами второго напряженного состояния, и наоборот. Подставляя в (3.33) вместо главных напряжений значение σ_0 из (3.38), получим выражение для энергии изменения объема:

$$\begin{aligned} u_{0_{об}} &= \frac{1}{2E}(3\sigma_0^2 - 2\mu \cdot 3\sigma_0^2) = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma_0^2 = \\ &= \frac{3(1-2\mu)}{2E} \frac{1}{3^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Энергию изменения формы, или энергию формоизменения, найдем, вычитая из u_0 значение $u_{0_{об}}$:

$$\begin{aligned} u_{0_f} &= u_0 - u_{0_{об}} = \\ &= \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] - \\ &\quad - \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1+\mu}{3E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]. \quad (3.40)$$

Рассмотрим применение формул (3.33), (3.39), (3.40) для различных напряженных состояний.

1. Всестороннее растяжение или сжатие.

В этом случае $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$.

$$u_0 = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma^2; \quad u_{0_{об}} = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma^2; \quad u_{0_f} = 0.$$

2. Чистый сдвиг.

Имеем $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma$.

$$u_0 = \frac{1+\mu}{E} \sigma^2; \quad u_{0_{об}} = 0; \quad u_{0_f} = \frac{1+\mu}{E} \sigma^2.$$

3. Растяжение или сжатие.

Для этого случая $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

$$u_0 = \frac{\sigma^2}{2E}; \quad u_{0_{об}} = \frac{1-2\mu}{6E} \sigma^2; \quad u_{0_f} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma^2.$$

Из выражений (3.33), (3.39), (3.40) следует, что полная удельная потенциальная энергия деформации, а также потенциальные энергии изменения объема и формы, пропорциональны квадратам нормальных напряжений, т. е. они всегда положительны.

Пример 3.1. На поверхности стального листа, нагруженного по торцам произвольной системой сил, в некоторой точке были вычислены главные деформации ϵ_u и ϵ_v в двух взаимно перпендикулярных направлениях u и v . Вычислить напряжения σ_u и σ_v , если $\epsilon_u = 0,4 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_v = -0,8 \cdot 10^{-3}$; $\mu = 0,3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Используя формулу (3.18), в которой индекс x заменяется на u , а индекс y на v , вычисляем нормальные напряжения:

$$\sigma_u = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_u + \mu\epsilon_v) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2} (0,4 \cdot 10^{-3} - 0,3 \cdot 0,8 \cdot 10^{-3}) = 35,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_v = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2} (-0,8 \cdot 10^{-3} + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}) = -149,5 \text{ МПа};$$

$\sigma_z = 0$ (где z - ось, перпендикулярная поверхности стержня).

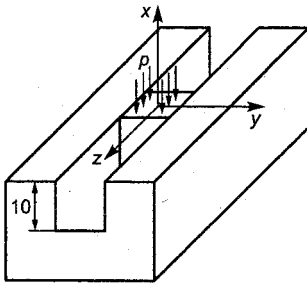


Рис. 3.8

Пример 3.2. Медный кубик (рис. 3.8) плотно, но без натяга, вставлен в паз стальной плиты так, что две противоположные грани его свободны. Сверху кубик сжимается давлением $p = 100$ МПа. Определить главные напряжения, относительное изменение объема кубика, а также определить, какая должна быть его высота h до нагружения, чтобы после деформирования

его верхняя грань была заподлицо с верхней поверхностью плиты. Глубина паза 1 см; модуль упругости $E = 1 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона меди $\mu = 0,33$; материал плиты считать абсолютно жестким.

Решение. Так как $\sigma_z = 0$; $\varepsilon_y = 0$; $\sigma_x = -p$, то по обобщенному закону Гука получим

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[-p - \mu\sigma_y];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[-\mu(\sigma_y - p)];$$

$$0 = \frac{1}{E}[\sigma_y + \mu p].$$

Откуда $\sigma_y = -\mu p = -0,33 \cdot 100 = -33$ МПа;

$$\sigma_x = -p = -100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z = 0;$$

$$\varepsilon_y = 0;$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(-p + \mu^2 p) = -\frac{p}{E}(1 - \mu^2) = -\frac{100}{1 \cdot 10^5}(1 - 0,33^2) = -0,89 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_z = \frac{p}{E}\mu(\mu + 1) = \frac{100}{1 \cdot 10^5} \cdot 0,33 \cdot (0,33 + 1) = 0,44 \cdot 10^{-3};$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_z = -0,89 \cdot 10^{-3} + 0,44 \cdot 10^{-3} = -0,45 \cdot 10^{-3}.$$

Принимаем высоту кубика после деформации, равной глубине паза $l_1 = 1$ см, высоту кубика до деформации, равной l_0 .

Тогда

$$\frac{l_1 - l_0}{l_0} = \varepsilon_x, \text{ или } l_0 = \frac{l_1}{1 + \varepsilon_x} = \frac{1}{1 - 0,89 \cdot 10^{-3}} = 1,001 \text{ см.}$$

Пример 3.3. В толстой абсолютно жесткой плите высверлено цилиндрическое гнездо диаметром 2 см, в которое вставлен стальной цилиндрический стержень (рис. 3.9). Сверху стержень сжимается давлением $p = 64$ МПа. Определить все три главных напряжения в стержне, а также относительное изменение объема стержня.

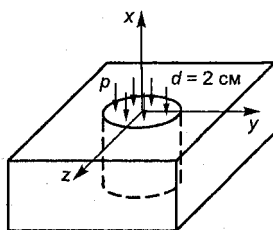


Рис. 3.9

Решение. По условию задачи $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$; $\sigma_x = -p = 64$ МПа. По обобщенному закону Гука, имеем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$0 = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

$$0 = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)].$$

Так как $\sigma_y = \sigma_z$, то получим

$$\sigma_y = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_x = \frac{0,3}{1 - 0,3} (-64) = -27,4 \text{ МПа.}$$

Главные напряжения будут

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -27,4 \text{ МПа; } \sigma_3 = -64 \text{ МПа.}$$

$$\theta = \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - 2\mu\sigma_y) = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-64 - 2 \cdot 0,3 \cdot (-27,4)] = -0,24 \cdot 10^{-3} \text{ МПа.}$$

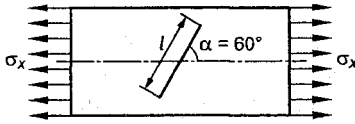


Рис. 3.10

Пример 3.4. Определить изменение длины отрезка $l = 10$ см, нанесенного на поверхность растянутого бруса под углом $\alpha = 60^\circ$ к оси, если напряжение $\sigma_x = 150$ МПа; $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см²;

$\mu = 0,3$ (рис. 3.10).

Решение. Определяем главные деформации ϵ_x и ϵ_y :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{15000}{2 \cdot 10^7} = 7,5 \cdot 10^{-4};$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} = -0,3 \cdot 7,5 \cdot 10^{-4} = -2,25 \cdot 10^{-4}.$$

Относительная продольная деформация в направлении, составляющем угол 60° с осью x :

$$\begin{aligned} \epsilon_{60} &= \frac{\sigma_x}{E} \cos^2 \alpha - \mu \frac{\sigma_x}{E} \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_x}{E} (\cos^2 \alpha - \mu \sin^2 \alpha) = \\ &= 7,5 \cdot 10^{-4} (\cos^2 60^\circ - 0,3 \sin^2 60^\circ) = 0,1875 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Удлинение отрезка

$$\Delta l = \epsilon_{60} \cdot l = 0,1875 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 0,1875 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

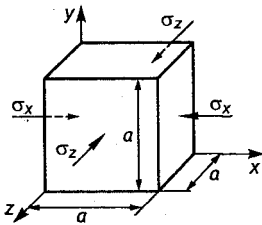


Рис. 3.11

Пример 3.5. Бетонный кубик с ребрами длиной $a = 10$ см сжимается в направлении осей x и z напряжением 1500 Н/см². Найти изменение объема кубика, если $\mu = 0,1$; $E = 0,3 \cdot 10^7$ Н/см² (рис. 3.11).

Решение. Записываем уравнения обобщенного закона Гука, учитывая, что $\sigma_y = 0$:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \sigma_z];$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [-\mu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu \sigma_x]$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [-1500 + 0,1 \cdot 1500] = \frac{1}{E} (-1350);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [0,1 \cdot 3000] = \frac{1}{E} 300;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [-1500 + 0,1 \cdot 1500] = \frac{1}{E} (-1350).$$

Вычислим относительное изменение объема кубика по формуле (3.26):

$$\theta = \frac{1}{0,3 \cdot 10^7} (-1350 + 300 - 1350) = -0,8 \cdot 10^{-3}.$$

Изменение объема кубика будет следующим:

$$\Delta V = \theta \cdot a^3 = -0,8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = -0,8 \text{ см}^3.$$

Пример 3.6. В балке мостового крана элетротензометрическим методом были замерены деформации в горизонтальном и вертикальном направлениях. Разность показаний горизонтального тензорезистора $n = 155$ ед., разность показаний вертикального тензорезистора $n' = -46$ ед. Требуется определить напряжения в горизонтальном и вертикальном направлениях, $\mu = 0,3$; $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см², тарировочный коэффициент в единицах относительной деформации $\varepsilon^0 = 0,258 \cdot 10^{-5}$.

Решение. Определяем деформации ε_x и ε_y :

$$\varepsilon_x = n \cdot \varepsilon^0 = 0,258 \cdot 10^{-5} \cdot 155 = 0,0004;$$

$$\varepsilon_y = -n' \cdot \varepsilon^0 = 0,258 \cdot 10^{-5} \cdot 46 = -0,00012.$$

Вычисляем напряжения по формулам (3.18)

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = \frac{2 \cdot 10^7}{1-0,3^2} (0,0004 - 0,3 \cdot 0,00012) = 8000 \text{ Н/см}^2;$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_y + \mu\epsilon_x) = \frac{2 \cdot 10^7}{1-0,3^2}(-0,00012 + 0,3 \cdot 0,0004) = 0.$$

Пример 3.7. Определить модуль упругости стали, если при испытании стального стержня на простое растяжение при напряжении $\sigma_x = 15\,000 \text{ Н/см}^2$ стержень на длине $l = 250 \text{ мм}$ удлинился на величину $\Delta l = 0,18 \text{ мм}$.

Решение. Используя закон Гука при растяжении, находим

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{\sigma_x \cdot l}{\Delta l} = \frac{15\,000 \cdot 25}{0,018} = 2,08 \cdot 10^7 \approx 2,1 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2.$$

Пример 3.8. Определить изменение длины диагонали элемента, вырезанного из стальной пластины. Размеры элемента и действующие напряжения показаны на рис. 3.12, а.

Решение. Находим длину диагонали:

$$l_{BC} = \frac{5}{\sin 30^\circ} = 10 \text{ см.}$$

Вычислим главные напряжения, используя формулу (2.16) и учитывая, что $\sigma_y = 0$.

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} = \frac{6000}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{6000^2 + 4 \cdot 1500^2} = 3000 \pm 3354;$$

$$\sigma_{\max} = 6354 \text{ Н/см}^2; \quad \sigma_{\min} = -354 \text{ Н/см}^2.$$

Определяем направления главных осей v и u :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{гл}} = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2(-1500)}{6000} = 0,5;$$

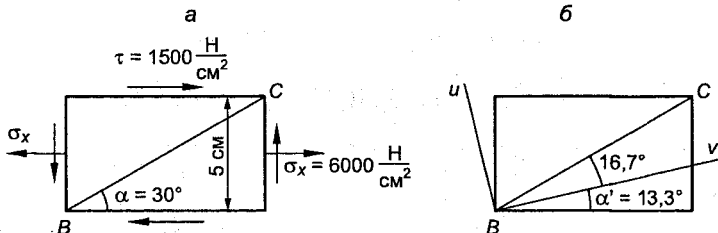


Рис. 3.12

$$2\alpha_{\text{гл}} = 26,6^\circ; \alpha_{\text{гл}0} = 13,3^\circ; \alpha_{\text{гл}1} = \alpha_{\text{гл}} + 90^\circ = 103,3^\circ.$$

На рис. 3.12, б показаны оси v и u .

$$\varepsilon_v = \frac{6354}{2 \cdot 10^7} = 0,000318; \quad \varepsilon_u = -\frac{354}{2 \cdot 10^7} = -0,0000177.$$

Относительная линейная деформация в направлении диагонали BC будет

$$\begin{aligned} \varepsilon_{BC} &= \varepsilon_v \cos^2 16,7^\circ + \varepsilon_u \sin^2 16,7^\circ = 0,000318 \cdot 0,917 - \\ &- 0,0000177 \cdot 0,0826 = 0,00029. \end{aligned}$$

Изменение длины диагонали:

$$\Delta l_{BC} = \varepsilon_{BC} \cdot l_{BC} = 0,00029 \cdot 10 = 0,0029 \text{ см} = 29 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Глава 4

МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

4.1. Испытание материалов на растяжение

При расчетах деталей машин и элементов инженерных сооружений конструктор должен располагать числовыми величинами механических характеристик материала. Для этого материал подвергают различным видам испытаний. Основным видом, позволяющим получить наиболее важные характеристики свойств материала, является *испытание на растяжение*. Так как большинство характеристик механических свойств металлических материалов зависит от условий проведения испытаний, то, чтобы исключить влияние условий, обеспечить постоянство и сопоставимость величин механических характеристик, были установлены, а затем приняты стандартными определенные размеры образцов.

Стандартные образцы для испытаний на одноосное статическое растяжение показаны на рис. 4.1. *Статические испытания отличаются плавным, относительно медленным изменением нагрузки и малой скоростью деформации образца.*

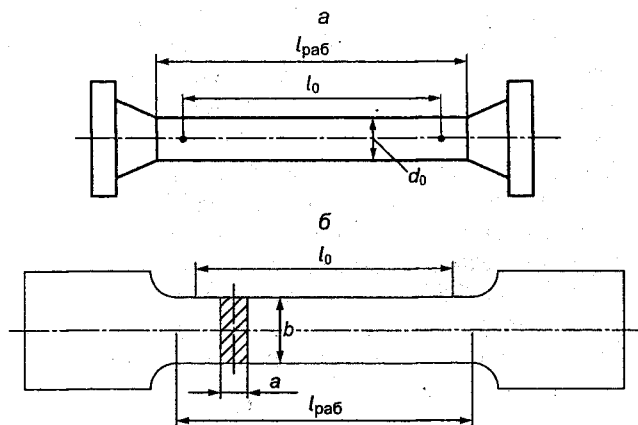


Рис. 4.1

Образцы вытачиваются из прутковых заготовок цилиндрической формы (см. рис. 4.1, а) или вырезаются из листового материала плоской формы (см. рис. 4.1, б). Они имеют утолщенные части (головки) для закрепления в захватах специальных испытательных машин. Конические участки создают плавный переход от головок к рабочей части и обеспечивают в ней равномерное распределение напряжений. Длина рабочей части $l_{раб}$ образца берется обычно в 15 раз больше диаметра d_0 . Расчетная длина образца принимается равной $l_0 = 10d_0$ и фиксируется на рабочей части двумя точками с помощью кернов. В некоторых случаях применяются короткие образцы, у которых $l_0 = 5d_0$. В качестве основных применяют круглые образцы с диаметром $d_0 = 10$ мм и расчетной длиной $l_0 = 100$ мм. Допускается применение образцов других диаметров, при условии сохранения соотношения между расчетной длиной образца и его диаметром. Такие образцы называются **пропорциональными**. Чтобы выполнялась сопоставимость результатов испытаний, для плоских образцов рабочая и расчетная длины устанавливаются по диаметру круга, равновеликого их площади прямоугольного поперечного сечения.

Испытания на растяжение проводятся на специальных испытательных (иногда их называют **разрывными**) машинах, которые создают статически возрастающую нагрузку от нуля до некоторого максимального значения.

Современные испытательные машины оборудуются устройствами для автоматического вычерчивания диаграммы растяжения, представляющей собой графическую зависимость между нагрузкой F и полным удлинением образца Δl . Диаграмма растяжения для исследования механических свойств материалов впервые была применена Жаном-Виктором Понселе⁷. По конструкции и способу создания усилия испытательные машины разделяются на *рычажные, гидравлические и электрические*. Принципиальная схема современной электрической разрывной машины 2054 Р-5 показана на рис. 4.2.

От электродвигателя 1 через клиноременную передачу вращение передается на вал червячного редуктора 2, который встроен на левом ходовом винте 3. Передачу с левого на правый

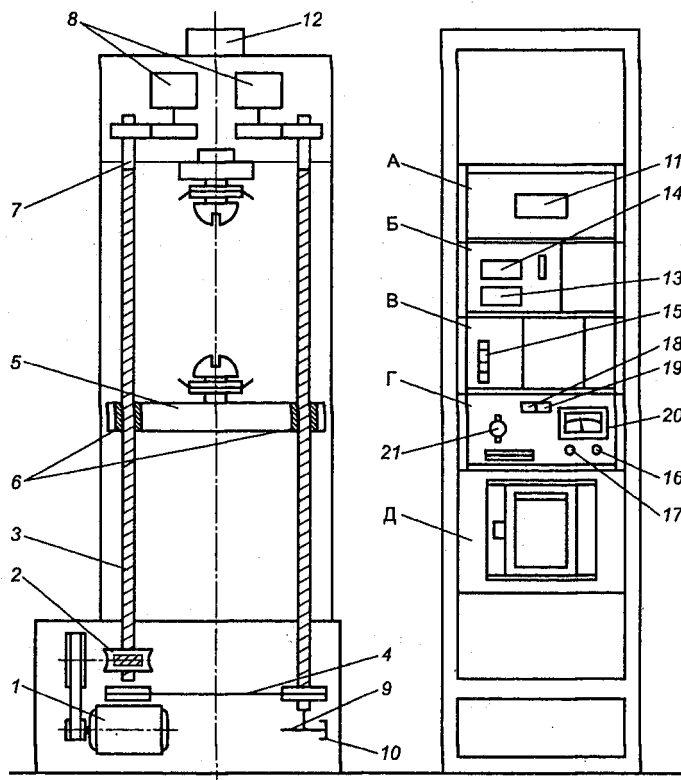


Рис. 4.2

ходовой винт выполняет плоскозубчатый ремень 4. Взаимодействие подвижной траверсы 5 с ходовыми винтами осуществляется с помощью гаек 6; на неподвижной траверсе 7 установлены два сельсина – датчика 8, которые предназначены для управления записью диаграммы «нагрузка – перемещение».

На подвижной траверсе 5 закреплен нижний захват, а на неподвижной траверсе 7 – верхний захват. При перемещении подвижной траверсы вниз в испытываемом образце создается растягивающее усилие. На правом ходовом винте имеется диск 9 с радиально расположенными пазами, который входит в прорезь фотоэлектрического датчика 10. При вращении диска датчик 10 подает сигнал на цифровой индикатор 11 перемещения активного захвата, установленного на пульте управления (см. рис. 4.2).

Пульт управления имеет блочную конструкцию и состоит из следующих блоков: блока индикации перемещения активного захвата А, блока индикации нагрузки Б, блока преобразователя В, блока управления Г и блока записи диаграммы Д.

При испытании образцов усилие воспринимается датчиком силы 12 и регистрируется на цифровом табло 13 индикатора нагрузки; на втором табло 14 регистрируется наибольшая нагрузка, приложенная к образцу в процессе испытания.

На панели блока преобразователя имеются клавиши 15 диапазонов нагрузки, с помощью которых устанавливается цена одного деления на табло индикатора нагрузки:

диапазон 1 – цена одного деления 5 Н, максимальная сила $F_{\max} = 50$ кН;

диапазон 0,5 – цена одного деления 2,5 Н, $F_{\max} = 25$ кН;

диапазон 0,2 – цена одного деления 1 Н, $F_{\max} = 10$ кН;

диапазон 0,1 – цена одного деления 0,5 Н, $F_{\max} = 5$ кН.

Скорость движения активного захвата задается резисторами грубой 16 и точной 17 регулировок скорости, расположенных на панели блока управления. Измеритель скорости имеет два диапазона:

диапазон I – от 1 до 10 мм/мин (клавиша 18);

диапазон II – от 10 до 100 мм/мин (клавиша 19).

Показания указателя скорости 20 при этом умножают соответственно на коэффициент 0,1 или 1,0. На панели блока управления имеется также тумблер 21, с помощью которого устанавливается масштаб удлинений на диаграмме растяжения.

Типичная диаграмма растяжения для малоуглеродистой стали показана на рис. 4.3.

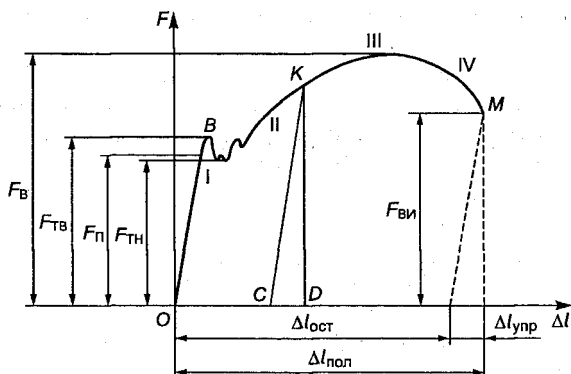


Рис. 4.3

Ее условно разбивают на четыре зоны.

Зона 0–I называется **зоной упругости**. В этой зоне материал подчиняется закону Гука и зависимость силы от удлинения является линейной. Абсолютная величина упругого удлинения очень мала. Например, для малоуглеродистой стали наибольшая величина упругого удлинения составляет 2,0–2,5 мм при длине образца 100 мм.

Зона I–II называется **зоной общей текучести**. В данной зоне пластическая деформация охватывает весь объем материала, а на поверхности деформированного образца появляются полосы Чернова–Людерса, в которых локализуется деформация. Плавный переход от упругой зоны к зоне текучести с образованием площадки текучести возможен только при определенном состоянии металлических материалов, а также часто является следствием недостаточной чувствительности и жесткости испытательных машин. При испытании материалов на высокочувствительных, достаточно жестких машинах зона текучести обычно характеризуется зубчатостью диаграммы растяжения (см. рис. 4.3). Такой характер кривой текучести объясняется поликристаллической структурой металлов, неоднородностью деформации и особенностями деформационного упрочнения при растяжении.

Теория сопротивления материалов рассматривает материал как сплошную среду, лишенную структурных особенностей. Поэтому описание результатов испытаний основывается на феноменологическом подходе, использующем эксперименталь-

ные факты без объяснения внутренних процессов, происходящих в материале при деформации образца, которые связаны со структурным строением материала и не могут быть объяснены средствами механики сплошной среды. Однако иметь даже самое общее представление о физических процессах, происходящих в материале при нагружении, необходимо. Реальный механизм пластической деформации отличается сложностью, большим многообразием процессов, сопровождающих необратимые сдвиги в кристаллической решетке, связанные с ее особым рода дефектами, называемыми **дислокациями**. Теория дислокаций возникла в 20–30-х гг. прошлого столетия. В настоящее время она детально разработана и подробно рассматривается в разделе физики твердого тела, а также в руководствах по механическим свойствам материалов.

До точки *B* диаграммы растяжения сопротивление материала повышается за счет обычного деформационного упрочнения путем сдвигов одних участков кристаллов относительно других. Дальше возникает процесс пластических деформаций, и диаграмма изображается скачкообразной кривой.

Зона II–III называется **зоной упрочнения**. В этой зоне удлинение образца сопровождается ростом нагрузки, хотя и медленнее, чем в зоне упругости. Образец сохраняет первоначальную форму, а его удлинение равномерно распределяется по рабочей длине.

Зона III–IV называется **зоной местной текучести**. Она характеризуется тем, что на образце в месте будущего разрыва образуется местное сужение, так называемая **шейка**. Деформация образца носит локальный характер (в области шейки) и происходит с уменьшением нагрузки, хотя среднее напряжение в поперечном сечении шейки постоянно возрастает.

Процесс растяжения образца можно рассматривать как результат взаимодействия двух процессов – *процесса накопления* и *процесса рассеяния энергии*. Если преобладает процесс накопления энергии, то сопротивляемость образца увеличивается, происходит упрочнение материала; если преобладает процесс рассеяния, то сопротивляемость образца уменьшается, происходит ослабление (разупрочнение) материала. Пусть P_y – интенсивность упрочнения, а P_0 – интенсивность ослабления материала. Следовательно, когда $P_y > P_0$, то нагрузка, необходимая для дальнейшей деформации образца, должна возрастать; когда $P_y < P_0$, нагрузка должна падать; при $P_y = P_0$ нагрузка ос-

тается постоянной. Этот момент на диаграмме соответствует наибольшей нагрузке, а на образце – началу образования шейки. Значит, напряжение, соответствующее максимальной нагрузке на диаграмме, есть результат равенства интенсивностей упрочнения и ослабления материала и не является физической константой материала. При изменении формы и размеров образца величина этого напряжения будет изменяться. Так как свойства материала в объеме образца неодинаковы, то процессы упрочнения и ослабления нельзя рассматривать протекающими одновременно по всему объему. При растяжении сначала деформируются менее прочные участки. Если в результате упрочнения в этих участках наступит $P_y > P_0$, то деформация переместится на другие, теперь более слабые участки. Постепенно пластическая деформация сконцентрируется в весьма малом объеме образца, где начнет образовываться шейка. Когда на этом участке будет исчерпана вся пластичность, произойдет разрыв. Образцы разрушаются без шейки, если они исчерпают свою пластичность до момента $P_y < P_0$. Так разрушаются все чугуны и другие хрупкие материалы.

Опыт показывает, что если образец нагрузить в пределах зоны упругости (линия OI), а затем начать его разгружать, то разгрузка будет проходить по линии OI , и образец после снятия нагрузки придет в прежнее, первоначальное состояние. Свойство материала восстанавливать после снятия приложенной нагрузки первоначальную форму и размеры тела называется **упругостью**. Если образец нагрузить до некоторой точки K , то в процессе разгрузки зависимость между силой и удлинением будет изображаться линией KC , параллельной прямой OI . В точке K образец имеет полное удлинение OD . После разгрузки упругая часть удлинения CD исчезает, а сохраняется остаточное или пластическое удлинение OC . Деформация, соответствующая остаточному (пластическому) удлинению, называется **пластической**. Следовательно, за пределами зоны упругости деформация образца является упруго-пластической. При повторном нагружении образца линия нагрузки совпадает с линией разгрузки KC .

Полное удлинение образца в точке M складывается из упругого и остаточного удлинений:

$$\Delta l_{\text{пол}} = \Delta l_{\text{упр}} + \Delta l_{\text{ост}}$$

Аналогично $\epsilon_{\text{пол}} = \epsilon_{\text{упр}} + \epsilon_{\text{ост}}$

При разрушении полное удлинение образца уменьшается на величину упругой части $\Delta l_{\text{упр}}$ и будет представлять только остаточное удлинение $\Delta l_{\text{ост}}$.

Из поведения образца при разгрузке и повторном нагружении следует вывод: упругие деформации при нагружении и разгрузке образца всегда изменяются в соответствии с законом Гука. Это положение носит название **закон Герстнера**⁸.

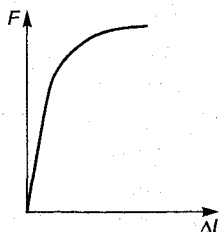


Рис. 4.4

Наличие явно выраженной зоны текучести у многих металлов при испытании на растяжение не обнаруживается. Например, диаграмма растяжения образцов из высококачественных легированных сталей имеет вид, изображенный на рис. 4.4.

Из рис. 4.4 видно, что у таких материалов на диаграмме растяжения зона текучести отсутствует, а зона упругости плавно переходит в зону упрочнения.

Для получения числовых значений механических характеристик материала диаграмму растяжения $F = f(\Delta l)$ перестраивают в координатах $\sigma = f(\epsilon)$ «напряжение - деформация» (рис. 4.5, а). Для этого силу F и удлинение Δl делят соответственно на площадь поперечного сечения A_0 и расчетную длину образца l_0 до нагружения. Диаграмма $\sigma = f(\epsilon)$, так как A_0 и l_0 величины постоянные, имеет тот же вид, что и диаграмма растяжения, но теперь уже она характеризует свойства материала, а не свойства образца.

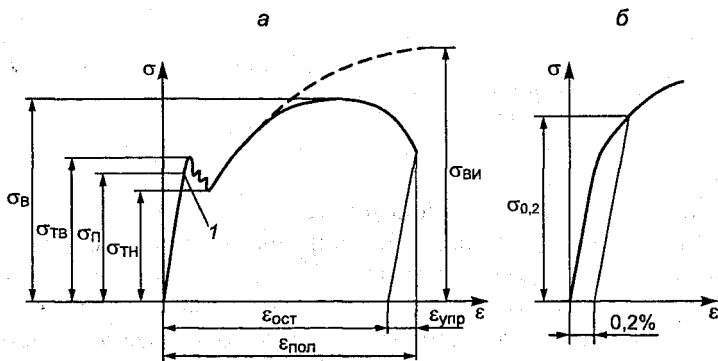


Рис. 4.5

Отметим на диаграмме точки, определяющие основные механические характеристики материала.

Предел пропорциональности (точка l) – это наибольшее напряжение, до которого материал подчиняется закону Гука, т. е. наблюдается линейная зависимость между напряжением и деформацией:

$$\sigma_n = \frac{F_n}{A_0}. \quad (4.1)$$

Величина F_n (см. рис. 4.3) определяется по точке, в которой кривая диаграммы растяжения отклоняется от прямой, совпадающей с прямолинейным участком зоны упругости диаграммы. Сложность определения силы F_n делает эту характеристику трудноопределимой. Чтобы результаты определения предела пропорциональности были сопоставимы, Международный конгресс по испытанию материалов в Брюсселе (1906 г.) предложил определять предел пропорциональности как растягивающее напряжение, при котором остаточная деформация составляет 0,001 %. В отечественных стандартах на испытание материалов за предел пропорциональности рекомендуется принимать напряжение, при котором угол наклона касательной к диаграмме с осью абсцисс увеличивается на 50 % по сравнению с его величиной в начале координат.

Из рис. 4.5 можно видеть, что модуль упругости материала E представляет собой тангенс угла наклона диаграммы $\sigma = f(\epsilon)$ на линейном упругом участке с осью деформаций. Для любого материала, подчиняющегося закону Гука, тангенс угла наклона диаграммы должен быть величиной постоянной.

Упругие деформации в материале имеют место до напряжения, называемого **пределом упругости**. Под пределом упругости понимается наибольшее напряжение, до которого материал при разгрузке не получает остаточных деформаций. Эта характеристика не связана с законом Гука.

Необходимо отметить, что понятия предела пропорциональности и предела упругости достаточно условны и зависят от принятой нормы на угол наклона касательной к диаграмме и на величину остаточной деформации. За предел упругости обычно принимают напряжение, при котором остаточная деформация не превышает 0,005 %.

Значительная условность и трудность определения данных характеристик являются причинами того, что при испытаниях они не определяются и в справочных таблицах не приводятся.

Предел текучести – это напряжение, при котором происходит полный переход материала к пластической деформации. При напряжении, соответствующем пределу текучести, возникает рост деформации без заметного увеличения напряжения. Например, для мягкой стали это увеличение деформации может достигать 2 % и более.

Для материалов, у которых зона текучести характеризуется скачкообразным изменением напряжения, вводится понятие нижнего $\sigma_{\text{тн}}$ и верхнего $\sigma_{\text{тв}}$ пределов текучести.

Под нижним пределом текучести понимается наименьшая величина напряжения, а под верхним – напряжение, соответствующее первому пику нагрузки, зарегистрированному при течении образца:

$$\sigma_{\text{тн}} = \frac{F_{\text{тн}}}{A_0}; \quad \sigma_{\text{тв}} = \frac{F_{\text{тв}}}{A_0}. \quad (4.2)$$

На величину верхнего предела текучести большое влияние оказывают многие факторы (скорость испытания, форма образца), поэтому нижний предел текучести, который в меньшей степени зависит от указанных факторов, принимается за основную механическую характеристику материала. Так как практически значения напряжений, соответствующих пределу пропорциональности, пределу упругости и пределу текучести, близки друг другу, то обычно различием между ними пренебрегают и используют как в теории, так и в расчетах *предел текучести*. При отсутствии на диаграмме явно выраженной зоны текучести определяется условный предел текучести, представляющий собой напряжение, при котором остаточная деформация образца составляет $\epsilon_{\text{ост}} = 0,2$ % (см. рис. 4.5, б), в некоторых случаях $\epsilon_{\text{ост}} = 0,5$ %. Условный предел текучести обозначается $\sigma_{0,2}$ или $\sigma_{0,5}$. Если предел текучести на растяжение отличается от предела текучести на сжатие, то в обозначении дополнительно вводится индекс (р) или (с): $\sigma_{\text{тр}}$ и $\sigma_{\text{тс}}$.

Предел прочности – это отношение наибольшей нагрузки, которую способен выдержать образец, к первоначальной площади его поперечного сечения:

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_0}. \quad (4.3)$$

Предел прочности является условным напряжением, характеризующим сопротивление образца максимальной равномерной деформации. Деформация образца в момент разрыва может составлять десятки процентов. Поэтому при значительных деформациях величины, откладываемые по оси ординат, являются условным напряжением, так как получаются делением растягивающей силы не на действительную, а на первоначальную площадь поперечного сечения. Полученная диаграмма называется **условной диаграммой растяжения**, так как напряжения и относительные удлинения вычисляются по отношению к первоначальной площади сечения и первоначальной длине образца. Если растягивающую силу постоянно относить к наименьшему сечению образца, то получится истинная диаграмма растяжения, представляющая зависимость между истинными деформацией и напряжением. Так как действительная площадь поперечного сечения меньше первоначальной, то диаграмма истинных напряжений будет располагаться выше условной диаграммы (на рис. 4.5, *a* диаграмма истинных напряжений изображена пунктиром), особенно существенным расхождение будет после образования шейки, когда происходит резкое уменьшение поперечного сечения образца.

Напряжение, возникающее в поперечном сечении шейки в момент разрушения образца,

$$\sigma_{ви} = \frac{F_{ви}}{A_{ш}}, \quad (4.4)$$

где $F_{ви}$ - нагрузка в момент разрушения образца; $A_{ш}$ - площадь поперечного сечения шейки.

Величина $\sigma_{ви}$ не имеет практического применения и при испытании материалов не вычисляется. Простота определения предела прочности, несмотря на условность, обусловила его широкое использование в расчетной практике как характеристики для сравнения прочностных свойств материалов.

Кроме рассмотренных прочностных характеристик материала - предела пропорциональности, предела текучести, предела прочности, при испытании на растяжение определяются также характеристики пластичности.

Способность материала получать большие остаточные деформации без разрушения носит название **пластичности**. В качестве меры пластичности принимаются две характеристики свойств материала.

Относительное остаточное удлинение после разрыва определяется как отношение остаточного удлинения расчетной длины образца к его первоначальной длине:

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{ост}}}{l_0} \cdot 100 = \frac{l_p - l_0}{l_0} \cdot 100 \%, \quad (4.5)$$

где l_0 – расчетная длина образца до нагружения; l_p – длина образца после разрыва, определяемая путем составления двух частей разорванного образца по месту разрыва и измерения расстояния между кернами.

Относительное остаточное сужение после разрыва определяется как отношение уменьшения величины площади поперечного сечения образца в месте разрыва к первоначальной площади поперечного сечения:

$$\psi = \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_0 - A_{\text{ш}}}{A_0} \cdot 100 \%, \quad (4.6)$$

где A_0 – первоначальная площадь поперечного сечения образца; $A_{\text{ш}}$ – площадь поперечного сечения шейки.

На практике относительное остаточное удлинение и относительное остаточное сужение даются в процентах.

Величина ψ в меньшей степени зависит от формы образца, чем δ , поэтому является более точной характеристикой свойства пластичности. Чем больше δ и ψ , тем более пластичным считается материал.

Свойство, противоположное пластичности, называется **хрупкостью**. Хрупкость – это способность материала разрушаться при незначительных остаточных деформациях.

У пластичных материалов характеристики пластичности достигают следующих значений: $\delta = 30 \%$, $\psi = 50 \%$ и выше. Для хрупких материалов δ и ψ находятся в пределах 2–5 %.

Весьма пластичными являются медь, алюминий, латунь, малоуглеродистая сталь и т. д. Менее пластичные материалы – это дюралюминий, бронза, легированные стали. ~~К~~ хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая инструментальная сталь, камень, бетон, стеклопластик и др.

Диаграмма растяжения хрупких материалов не имеет зоны текучести и зоны упрочнения. При испытании хрупких материалов определяют, как правило, одну характеристику материала – предел прочности σ_B . Диаграмма растяжения серого чугуна показана на рис. 4.6.

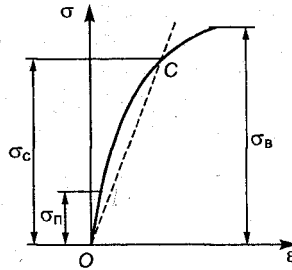


Рис. 4.6

Из диаграммы видно, что чугун подчиняется закону Гука только на начальном участке диаграммы до напряжений $\sigma_{П}$, не превышающих 30 % от σ_B . Разрыв образцов происходит внезапно при очень малых остаточных деформациях без образования шейки. В расчетах отклонение от закона Гука не учитывают и криволинейную диаграмму заменяют прямой линией, проведенной из начала координат через точку C диаграммы, соответствующую напряжению, при котором определяют деформацию. Таким образом, для хрупких материалов модуль упругости изменяется в зависимости от принимаемой величины деформации и называется **секущим**.

4.2. Испытание материалов на сжатие

На практике испытанию на сжатие подвергаются в основном хрупкие материалы и сплавы (чугун, бетон, керамика, фарфор, дерево и т. д.), которые лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению, и применяются для изготовления деталей, работающих на сжатие. Для пластичных материалов испытание на сжатие обычно является дополнением к испытанию на растяжение и проводится по необходимости. Это объясняется тем, что для таких материалов предел пропорциональности и предел текучести при сжатии одинаков с их значениями при растяжении. Характеристики, аналогичные пределу прочности, остаточному относительному удлинению и остаточному относительному сжатию при испытании на сжатие пластичных материалов, получить нельзя.

При испытании на сжатие применяют короткие образцы ($l \leq 3d$) цилиндрической формы или образцы в виде кубиков. Длинные образцы равномерно сжать невозможно, так как под действием сжимающей нагрузки они быстро изгибаются и теряют устойчивость. В процессе сжатия на торцах образца воз-

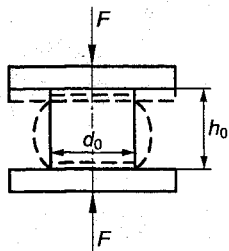


Рис. 4.7

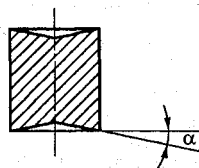


Рис. 4.8

никают силы трения, направленные по радиусам к центру и препятствующие свободному расширению образца в горизонтальном направлении (рис. 4.7).

В результате образец вместо цилиндрической принимает бочкообразную форму, при этом распределение напряжений в сечениях образца становится неравномерным. Для уменьшения влияния сил трения на результаты испытаний вводятся различные смеси (вазелин, солидол), прокладки из материала (тефлона, фторопласта, пропитанной парафином фильтровальной бумаги) с низким коэффициентом трения между торцевыми поверхностями образца и опорными плитами; используют образцы, имеющие на торцах коническую поверхность, выполненную так, чтобы тангенс угла конусности α равнялся коэффициенту трения (рис. 4.8). Однако полностью устранить силы трения и обеспечить в образце при испытании линейное напряженное состояние не представляется возможным, что является принципиальным недостатком испытаний на сжатие.

При испытании записывающий механизм машины автоматически вычерчивает диаграмму сжатия - график зависимости между усилием F и укорочением образца Δl . Вид диаграммы сжатия различен для пластичных и хрупких материалов. Пластичные материалы и сплавы при сжатии расплющиваются в тонкие диски без разрушения, и испытание ограничивается возможностью испытательных машин.

Характер разрушения хрупких материалов при сжатии зависит от величины сил трения. Если силы трения на торцах образца велики, то он разрушается путем среза (рис. 4.9, а); если они малы - то путем отрыва (рис. 4.9, б).

Диаграмма сжатия малоуглеродистой стали представлена на рис. 4.10.

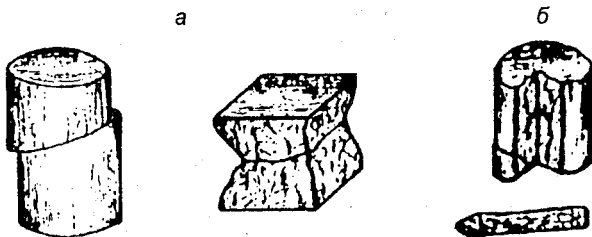


Рис. 4.9

Из него следует, что на начальном участке OB диаграмма сжатия не отличается от диаграммы растяжения. На диаграмме явно выраженной зоны текучести не наблюдается, за участком OB сразу начинается зона упрочнения. Образец практически разрушить невозможно, он расплющивается, иногда с образованием по краям трещин, превращаясь в тонкий диск.

В отдельных случаях для неразрушающихся образцов в качестве характеристики предела прочности при сжатии берется условная нагрузка $F_{усл}$, соответствующая величине деформации, равной $1/3$ первоначальной высоты образца

($\Delta h = \frac{1}{3}h_0$).

$$\sigma_{в\ усл} = \frac{F_{усл}}{A_0}. \quad (4.7)$$

У стали пределы пропорциональности и текучести, модули продольной упругости при растяжении и сжатии практически равны. Это позволяет считать, что сталь одинаково работает на растяжение и сжатие.

Диаграмма сжатия чугунного образца имеет вид, показанный на рис. 4.11. При сжатии чугунного образца в действительности наблюдается нелинейная зависи-

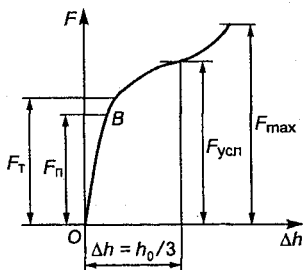


Рис. 4.10

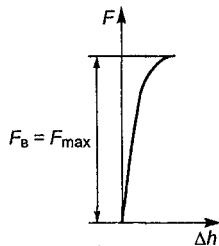


Рис. 4.11

мость между сжимающей силой и деформацией. Однако в инженерных расчетах считается, что до нагрузки, равной $0,5F_{\max}$, материал подчиняется закону Гука. Образец, укорачиваясь, получает незначительную бочкообразную форму. Разрушение происходит по наклонным плоскостям, расположенным примерно под углом 45° к оси образца, т. е. под действием наибольших касательных напряжений. Отношение разрушающей нагрузки $F_B = F_{\max}$ к первоначальной площади поперечного сечения определяет предел прочности хрупкого материала при сжатии.

$$\sigma_{\text{вс}} = \frac{F_B}{A_0}. \quad (4.8)$$

Предел прочности на сжатие у хрупких материалов, таких, как чугун, бетон, керамика, выше, чем при растяжении, а модуль продольной упругости на 10–20 % больше, чем при растяжении.

Отношение предела прочности при растяжении к пределу прочности при сжатии показывает, что хрупкие материалы работают на сжатие лучше, чем на растяжение:

$$m = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}} < 1,0. \quad (4.9)$$

Для чугуна $m = 0,2-0,4$; для керамики $m = 0,1-0,2$. Для пластичных материалов сопоставление прочностных характеристик на растяжение и сжатие производится по пределу текучести:

$$m = \frac{\sigma_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{тс}}} \approx 1,0. \quad (4.10)$$

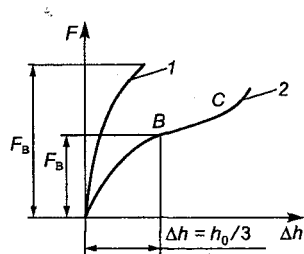


Рис. 4.12

Принято считать, что у пластичных материалов $\sigma_{\text{тр}} \approx \sigma_{\text{тс}}$.

Испытания на сжатие анизотропных материалов, дерева, различных типов пластмасс, проявляющих неодинаковые свойства в разных направлениях, проводят вдоль и поперек волокон.

Диаграммы сжатия деревянного образца вдоль волокон (кривая 1) и поперек волокон (кривая 2) представлены на рис. 4.12.

При сжатии вдоль волокон сопротивление деревянного образца в 7–10 раз выше, чем при сжатии поперек волокон.

При сжатии вдоль волокон дерево проявляет свойства хрупкого материала (сравнить с диаграммой сжатия чугуна), а при сжатии поперек волокон – свойства пластичного материала.

На участке BC древесина сильно уплотняется без признаков разрушения. За разрушающую нагрузку при испытании поперек волокон принимают силу F_B , при действии которой деформация образца составляет $1/3$ первоначальной его высоты

$$\left(\Delta h = \frac{1}{3} h_0 \right).$$

Отношение предела прочности при сжатии вдоль волокон σ'_B к пределу прочности при сжатии поперек волокон σ''_B характеризует различие механических свойств анизотропного материала вдоль и поперек волокон и называется **коэффициентом анизотропии**.

$$k = \frac{\sigma'_B}{\sigma''_B}. \quad (4.11)$$

Прочностные характеристики анизотропного материала вычисляются аналогично пластичным и хрупким материалам.

4.3. Работа деформации

При испытании материалов на растяжение также определяют их энергетическую характеристику, называемую **удельной работой деформации** или **статической вязкостью**. Это комплексная величина, определяемая совокупностью прочностных и пластических свойств материала, характеризующая его способность поглощать энергию при разрыве, сопротивляться действию динамических нагрузок, развитию трещин.

Выделим элементарную площадь диаграммы растяжения длиной $d\Delta l$ в зоне упругости (рис. 4.13).

Пусть растягивающей силе F соответствует удлинение образца Δl . При увеличении силы F на бесконечно малую величину dF удлинение образца увеличится на $d\Delta l$. Элементарная работа, совершаемая внешней силой $F+dF$ на перемещении $d\Delta l$, пренебрегая величиной высшего порядка малости, будет

$$dW = (F + dF)d\Delta l = Fd\Delta l. \quad (a)$$

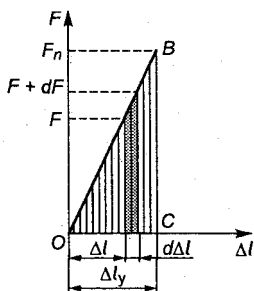


Рис. 4.13

Между силой F и перемещением Δl существует линейная зависимость, выражаемая формулой (3.1), из которой следует

$$F = \frac{EA \cdot \Delta l}{l}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (а), получим

$$dW = \frac{EA \cdot \Delta l}{l} \cdot d\Delta l. \quad (в)$$

Величину работы, произведенной внешней силой при упругом удлинении образца на величину Δl_y , получим, проинтегрировав выражение (в) в пределах от нуля до Δl_y :

$$W = \frac{EA}{l} \int_0^{\Delta l_y} \Delta l d\Delta l = \frac{EA \Delta l_y^2}{2l}, \quad (г)$$

где Δl_y - величина упругой деформации.

Так как

$$\frac{EA \Delta l_y}{l} = F_n, \quad (д)$$

то, подставляя (д) в (г), получим

$$W = \frac{F_n \Delta l_y}{2}, \quad (4.12)$$

где F_n - сила, соответствующая пределу пропорциональности.

Таким образом, в пределах упругости работа деформации равна половине произведения внешней статически приложенной силы F_n на величину перемещения Δl_y .

Как следует из рис. 4.13, графически работа силы F_n (см. (4.12)) представляет собой площадь треугольника OBC диаграммы растяжения.

Следовательно, работа, затраченная на разрыв образца, будет определяться всей площадью диаграммы растяжения (см. рис. 4.13). Так как функция $F = f(\Delta l)$ неизвестна, то определить работу, затраченную на разрыв образца, взяв интеграл от выражения (а), нельзя. Поэтому работа, затраченная на деформацию и разрушение образца, вычисляется по эмпирической формуле

$$W_{\text{расч}} = F_B \Delta l_{\text{ост}} \eta, \quad (4.13)$$

где F_B – величина наибольшей нагрузки на диаграмме растяжения (соответствует пределу прочности материала); η – коэффициент полноты диаграммы (для мягкой стали принимается равным 0,85); $\Delta l_{\text{ост}}$ – остаточное удлинение образца.

Удельная работа, затраченная на деформацию единицы объема рабочей части образца,

$$a = \frac{W_{\text{расч}}}{V_0}, \quad (4.14)$$

где $V_0 = A_0 l_0$ – первоначальный объем расчетной длины образца.

Чем больше удельная работа деформации, тем лучше будет материал сопротивляться динамическим нагрузкам.

4.4. Оценка предела прочности материала по показателю твердости

Диаграммы растяжения и сжатия образцов дают полную оценку механических свойств материала. Однако использовать данный метод в производстве для контроля механических характеристик готовых деталей нельзя. Поэтому на практике прибегают к сравнительной оценке величины предела прочности материала, в частности по показателю твердости, который можно измерять на готовых деталях непосредственно в условиях производства.

Под **твердостью** понимают способность материала противодействовать механическому проникновению в его поверхность другого, более твердого, (индентора) тела определенной формы и размера.

Наиболее распространенным способом определения твердости является способ Бринелля, при котором в испытываемую поверхность вдавливаются стальной закаленный шарик диаметром D под нагрузкой F , приложенной определенное время. В поверхностном слое под индентором в зоне пластической деформации возникает сложное напряженное состояние, близкое к объемному сжатию (рис. 4.14).

По размеру отпечатка судят о твердости испытываемого материала. Диаметр отпечатка будет тем меньше, чем выше суммарное сопротивление материала внедрению в него индентора.

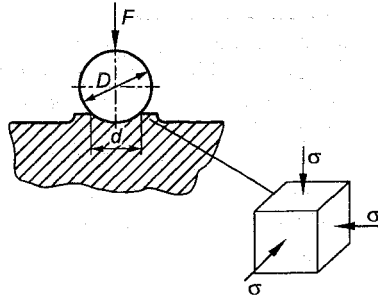


Рис. 4.14

Число твердости по Бринеллю (НВ) определяется делением нагрузки F на площадь поверхности сферического отпечатка, мм^2 :

$$\text{НВ} = \frac{0,2F}{\pi D \left(D - \sqrt{D^2 - d^2} \right)}, \quad (4.15)$$

где F - нагрузка, Н; D - диаметр шарика, мм; d - диаметр отпечатка, мм.

При указании числа твердости единица измерения не указывается.

Для получения отпечатка оптимальных размеров соотношение между нагрузкой и диаметром шарика рекомендуется принимать согласно табл. 4.1.

Таблица 4.1

Нагрузка (F) и диаметры (D) шариков, рекомендуемых для испытания твердости по Бринеллю (по В. К. Григоровичу)

F , Н	D , мм			Примечание
	10	5	2,5	
$30D^2$	30 000	7500	1875	Материалы с НВ = 130-450 (стали, чугуны, высокопрочные сплавы на основе титана, никеля, меди, алюминия)
$10D^2$	10 000	2500	625	Материал с НВ = 35-130 (алюминиевые сплавы, латуни, бронзы)
$5D^2$	5000	1250	312,5	Алюминий, магний, цинк, латуни
$2,5D^2$	2500	625	156,25	Подшипниковые сплавы
$1,25D^2$	1250	312,5	78,125	Свинец, олово, припой

При определении твердости шариком $D = 10$ мм под нагрузкой $F = 30$ кН и временем выдержки $t = 10$ с число твердости записывается в виде 300 НВ; 250 НВ и т. д. При использовании других условий испытания число твердости дополняют цифрами, указывающими диаметр шарика, мм; нагрузку, Н; продолжительность выдержки, с. Например, 250 НВ 5/7500/30 означает число твердости по Бринеллю 250 при испытании шариком $D = 5$ мм, под нагрузкой $F = 7500$ Н, приложенной в течение $t = 30$ с.

Если твердость материала $HВ > 450$, то использовать шарик-индентор нельзя, так как его деформация будет превышать стандартизованный допуск. В этих случаях вместо шарика вдавливают алмазный конус (*способ Роквелла*) или алмазную пирамиду (*способ Виккерса*).

Схема определения твердости по Роквеллу при вдавливании алмазного конуса, имеющего угол при вершине 120° и радиус закругления 0,2 мм, приведена на рис. 4.15.

Сначала конус вдавливается на глубину h_0 предварительной нагрузкой $F_0 = 100$ Н, которая не снимается до конца испытания. Затем к конусу прикладывается полная нагрузка $F = F_0 + F_1$. После снятия нагрузки оставшаяся глубина погружения h определяет число твердости по Роквеллу (HRC). Чем больше глубина h , тем меньше число твердости HRC.

Твердость по Роквеллу определяют по двум шкалам - А и С. При измерении по шкале А: $F_0 = 100$ Н; $F_1 = 500$ Н; $F = 600$ Н; при измерении по шкале С: $F_0 = 100$ Н; $F_1 = 1400$ Н; $F = 1500$ Н. Преимущество способа заключается в возможности отсчета чисел твердости прямо по шкале прибора. Они записываются аналогично НВ: HRA 85; HRC 65 и т. д.

При измерении твердости по Виккерсу в поверхность вдавливается алмазный индентор в форме четырехгранной пирамиды с углом при вершине $\alpha = 136^\circ$. Число твердости определяют делением нагрузки ($F = 10-1000$ Н) на площадь боковой

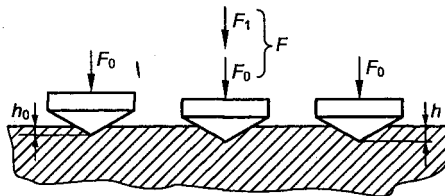


Рис. 4.15

поверхности полученного пирамидального отпечатка. Оно записывается в виде 200 HV, 250 HV и т. д.

Числа твердости, полученные разными методами, связаны между собой. Имеются специальные таблицы, позволяющие твердость по Роквеллу или Виккерсу переводить в твердость по Бринеллю.

Для многих металлов и сплавов между твердостью HB и пределом прочности σ_B существует линейная зависимость. Например, для малоуглеродистой стали $\sigma_B = 0,36 \text{ HB}$; для стального литья $\sigma_B = (0,3-0,4) \text{ HB}$; для серого чугуна $\sigma_B = 0,15 \text{ HB}$; для алюминиевых сплавов $\sigma_B = 0,38 \text{ HB}$; для меди $\sigma_B = 0,48 \text{ HB}$ и т. д.

Таким образом, при помощи пробы на твердость может производиться контроль прочностных показателей материала без разрушения детали.

4.5. Понятие о наклепе

Рассмотрим диаграмму растяжения малоуглеродистой стали (рис. 4.16, а).

Если образец нагрузить до точки *K*, а затем разгрузить, то, как уже отмечалось, линия разгрузки *KC* будет параллельна прямой *OB*. При повторном нагружении линия нагрузки будет проходить по прямой *CK* и диаграмма растяжения примет вид, показанный на рис. 4.16, б. Отрезок *KD* представляет силу предварительного нагружения. Следовательно, вид диаграммы после разгрузки будет зависеть от величины предварительного нагружения. Необходимо отметить, что отрезок *KC* у диаграммы при повторном нагружении больше отрезка *OB*. Таким образом, в результате предварительного нагружения выше предела текучести материал приобретает способность воспринимать

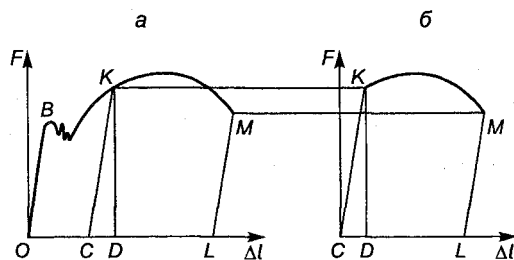


Рис. 4.16

без остаточных деформаций большие нагрузки. Повышение упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования называется **наклепом** или **нагартовкой**. Это явление широко используется в технике. Наклепу подвергают тросы, канаты, ремни, торсионные валы, листовые материалы и так далее, чтобы исключить возникновение остаточных удлинений в процессе эксплуатации. При отжиге деталей наклеп снимается. Необходимо помнить, что наклеп всегда сопровождается уменьшением пластичности материала (отрезок CL меньше отрезка OL). Наклеп имеет место не только при растяжении, но и при сжатии, кручении и т.д.

4.6. Влияние различных факторов на механические характеристики материала

Детали машин часто работают в условиях, резко отличающихся от нормальных, в которых производится испытание для определения механических характеристик материала. Так, детали двигателей внутреннего сгорания эксплуатируются в условиях высоких температур, детали холодильных установок, резервуары для сжиженных газов работают при низких температурах, детали транспортных машин испытывают переменные нагрузки, которые могут носить динамический характер. Опыт показывает, что скорость нагружения, температура, время действия нагрузки оказывают существенное влияние на механические характеристики материала. Испытаниями материалов на растяжение установлено, что скорость деформации в интервале от 10^{-4} до 10^{-2} 1/с практически не влияет на вид диаграммы растяжения. Скорость деформации определяется выражением

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{v}{l_0}, \quad (4.16)$$

где v - скорость растяжения образца (скорость перемещения подвижной траверсы); l_0 - расчетная длина образца.

Отсюда, при длине $l_0 = 100$ мм для скорости деформации 10^{-4} 1/с скорость перемещения траверсы $v = 0,6$ мм/мин; для скорости деформации 10^{-2} 1/с перемещение траверсы составит 60 мм/мин. Таким образом, перемещение подвижной траверсы от 0,6 до 60 мм/мин обеспечивает при испытаниях нормальную

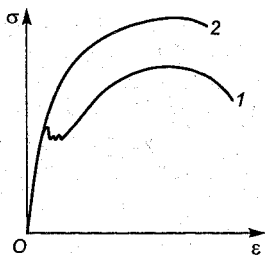


Рис. 4.17

скорость деформации. С увеличением скорости деформации все пластичные материалы обнаруживают тенденцию к увеличению сопротивления деформированию. С повышением скорости деформации повышаются пределы текучести и прочности. Это объясняется тем, что с увеличением скорости нагружения пластические деформации не успевают полностью завершиться, скольжение частиц материала по наклонным плоскостям затрудняется, поэтому материал становится более хрупким, с повышенными прочностными характеристиками.

На рис. 4.17 представлены диаграммы растяжения малоуглеродистой стали при статической (кривая 1) и быстро нарастающей (динамической) (кривая 2) нагрузках. Кривая 2 динамического нагружения располагается выше кривой 1 статического нагружения, при этом модуль упругости практически не изменяется.

Все механические характеристики материала существенно зависят от температуры. На рис. 4.18 представлены графики изменения предела текучести, предела прочности, остаточного относительного удлинения при разрыве, модуля упругости малоуглеродистой стали от температуры.

Предел прочности и предел текучести имеют наибольшие значения в интервале температур 150–250 °С, где относительное удлинение δ имеет наименьшее значение; при температурах выше 350–400 °С прочностные характеристики стали резко падают, поэтому выше данных температур такие стали не при-

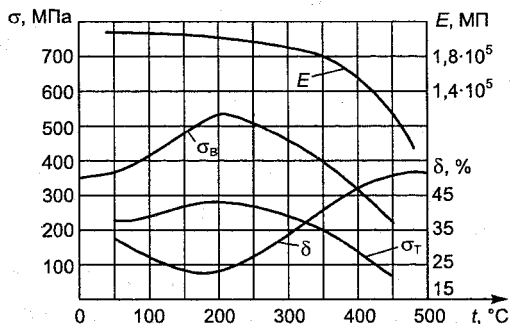


Рис. 4.18

меняются. Модуль упругости до 300 °С практически сохраняет свое значение, выше 300 °С - уменьшается. При высоких температурах углеродистые стали сильно окисляются, поэтому применяют специальные жаростойкие и жаропрочные стали, содержащие различные легирующие добавки. Свойство материала сопротивляться при высоких температурах химическому разрушению поверхности под воздействием горячего воздуха или газа называется **жаростойкостью**. **Жаропрочностью** называется способность материала сохранять при высоких температурах механические свойства. В настоящее время разработаны специальные сплавы, надежно работающие при температурах до 1000 °С. В условиях низких температур у большинства сталей наблюдается повышение прочностных свойств и снижение пластичности.

Продолжительность действия нагрузки (фактор времени) особенно сказывается в условиях высоких температур. При нормальной температуре для большинства металлов влияние фактора времени не существенно. Например, образец малоуглеродистой стали при температуре выше 800 °С может быть разрушен при напряжении, меньшем предела текучести, если оно будет действовать достаточно продолжительное время. Влияние фактора времени связано с явлением ползучести материала (крипом), заключающемся в изменении во времени напряжений и деформаций в нагруженной детали. В зависимости от величины напряжения и температуры деформация в результате ползучести может прекратиться или продолжаться до разрушения детали. Частными случаями ползучести являются последствие и релаксация.

(*Последствие* представляет собой явление необратимого роста во времени деформаций при постоянном напряжении) Если нагружать стержень различными силами $F_1 > F_2 > F_3 > F_4$ и фиксировать изменение его длины в условиях постоянной температуры (рис. 4.19), получим диаграммы последствия, дающие зависимость деформации от времени при различных значениях напряжения (рис. 4.20).

Из графиков следует, что с увеличением напряжения скорость ползучести возрастает.

(*Релаксация* - явление изменения во времени напряжений при постоянной общей деформации) У большинства металлов релаксация наблюдается лишь при высоких температурах (рис. 4.21). Явление релаксации напряжений можно наглядно

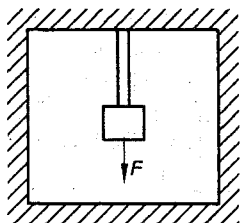


Рис. 4.19

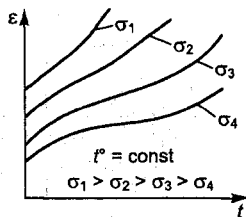


Рис. 4.20

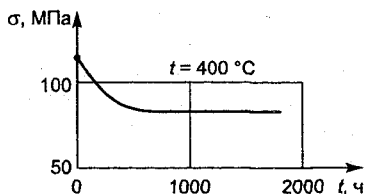


Рис. 4.21

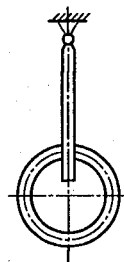


Рис. 4.22

проследить на примере разрезанного стального кольца, между концами которого вставлена пластинка (рис. 4.22).

В результате возникающих напряжений концы кольца с силой сожмут пластинку. Если соединение поместить в среду с высокой температурой, то в кольце со временем произойдет релаксация напряжений, и оно упадет с пластинки. На практике релаксация напряжений наблюдается в болтовых соединениях, работающих при высоких температурах. С течением времени начальная затяжка болтов ослабевает и требует дополнительного подтягивания.

Прочность материалов при высоких температурах определяется пределом ползучести и пределом длительной прочности. **Предел ползучести** называется наибольшее напряжение, при котором скорость или деформация ползучести за заданный промежуток времени достигает установленной величины. Обычно интервал времени определяется сроком службы детали, а величина деформации – условиями эксплуатации детали. Предел ползучести, найденный по величине деформации, обозначается буквой σ с тремя индексами: два нижних обозначают заданную деформацию в процентах и продолжительность ис-

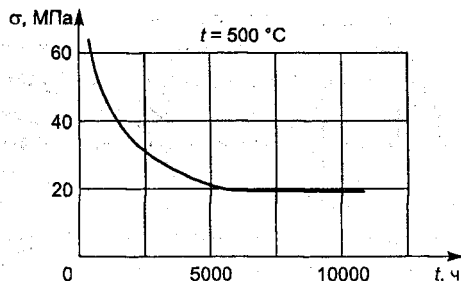


Рис. 4.23

пытания в часах; верхний индекс указывает температуру, $t^\circ\text{C}$.

Например, $\sigma_{0,2/100}^{800}$ означает предел ползучести при допуске на деформацию 0,2 % за время 100 ч при температуре 800°C .

Предел ползучести, определенный по скорости ползучести, обозначается буквой σ с двумя индексами: верхним, указывающим температуру, $t^\circ\text{C}$, нижним – заданную скорость ползучести, % /ч. Например, $\sigma_{1 \cdot 10^{-5}}^{700}$ – предел ползучести при скорости $1 \cdot 10^{-5}$ % /ч и температуре 700°C .

Пределом длительной прочности называется напряжение, действие которого в течение заданного времени при постоянной температуре вызывает разрушение растянутого образца. Таким образом, предел длительной прочности зависит от заданного времени до момента разрушения и температуры. Он обозначается буквой σ с двумя индексами: верхний указывает температуру испытаний, $t^\circ\text{C}$, нижний – заданный промежуток времени до разрушения, ч. Например, σ_{1000}^{700} означает предел длительной прочности за 1000 ч при температуре 700°C . Кривая длительной прочности материала представлена на рис. 4.23.

По кривой длительной прочности материала при данной температуре можно определить предел длительной прочности для заданного интервала времени или по заданному напряжению определить время до разрушения.

4.7. Допускаемые напряжения

Для того чтобы при работе деталей и конструкции в целом была исключена возможность разрушения или появления остаточных деформаций, максимальные рабочие напряжения σ_{max}

не должны превышать предельных значений, установленных испытанием для данного материала. При статических нагрузках за предельное напряжение для хрупких материалов принимается *предел прочности*, для пластичных материалов – *предел текучести*.

Очевидно, что допускаемые напряжения должны быть меньше предельных, чтобы в процессе эксплуатации конструкции не могло произойти разрушение или образование заметных пластических деформаций.

Таким образом, допускаемое напряжение $[\sigma]$ для пластичных материалов будет определяться выражением

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (4.17)$$

где σ_T – предел текучести; n_T – коэффициент безопасности по текучести.

Аналогично для хрупких материалов получим

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}, \quad (4.18)$$

где σ_B – предел прочности; n_B – коэффициент безопасности по пределу прочности.

Коэффициент безопасности показывает, во сколько раз допускаемое напряжение меньше предельного.

Следовательно, чтобы была обеспечена безопасная, надежная работа деталей, максимальное рабочее напряжение в опасной точке не должно превышать допускаемого напряжения (рис. 4.24).

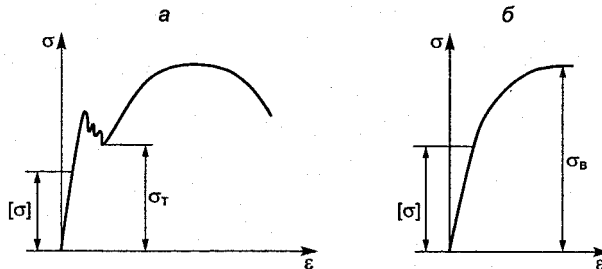


Рис. 4.24

Таблица 4.2

Материал	Допускаемые напряжения, МПа	
	на растяжение	на сжатие
Чугун серый в отливках:		
СЧ 12	20-30	70-110
СЧ 15	25-40	90-150
СЧ 21	35-55	160-200
Сталь:		
Ст 0 и Ст 2	140	140
Ст 3	160	160
Сталь углеродистая конструкционная в машиностроении	60-250	60-250
Сталь легированная конструкционная в машиностроении	100-400	100-400
Медь	30-120	30-120
Латунь	70-140	70-140
Бронза	60-120	60-120
Алюминий	30-80	30-80
Дюралюминий	80-150	80-150
Бетон	0,1-0,7	1,9
Сосна вдоль волокон	7-10	10-12
Сосна поперек волокон	-	1,5-2,0
Дуб вдоль волокон	9-13	13-15
Дуб поперек волокон	-	2-3,5

Выбор величины коэффициента безопасности зависит от свойств материала, характера приложения внешних нагрузок (статический, динамический, повторно-переменный) и разброса их величин, выбора расчетной модели, назначения и стоимости конструкции и производится с учетом накопленного опыта эксплуатации аналогичных конструкций и уровня развития техники в данный период. По существу, в каждой области техники уже сложились свои традиции, требования, подходы. В соответствии с ними назначаются нормативные коэффициенты безопасности, которыми следует руководствоваться в обычных условиях проектирования. Так, например, при статической нагрузке коэффициент безопасности для сталей принимается в пределах $n_T = 1,4-1,6$; для хрупких материалов - в пределах $n_B = 2,5-3,0$. Для хрупких материалов коэффициент безопасности принимается выше, чем для пластичных, так как случайное увеличение напряжений у пластичного материала может вызвать только небольшие пластические деформации, у хрупкого же может наступить разрушение. Ориентировочные величины допускаемых напряжений при статическом нагружении для наиболее распространенных материалов в общем машиностроении приведены в табл. 4.2.

4.8. Композиционные материалы

Во второй половине XX в. появились и получили промышленное применение новые искусственные материалы, называемые **композитами**. Изменяя содержание составляющих компонентов, можно получать композитные материалы с качественно новыми свойствами. Конструкции из композитных материалов, обладая высокой прочностью и достаточной пластичностью, широко используются в областях техники, требующих ограничения массы конструкции при обеспечении ее высокой надежности.

Основными преимуществами композитов перед металлами являются малая масса, малая теплопроводность, устойчивость к химическим воздействиям.

Как известно, теоретический предел прочности материала, определяемый силами молекулярного сцепления, составляет $1/10$ – $1/15$ от величины модуля упругости.

В настоящее время физиками выполнены большие работы, связанные с достижением теоретической прочности материала. Были получены и исследованы нитевидные кристаллы металлов, карбида кремния, нитрида бора, стекла и других, позволившие практически достигнуть величины их теоретической прочности. Так, прочность нитевидных кристаллов железа $d = 1,6$ мкм составила $1\ 340\ 000$ Н/см², нитей из стекла $d = 12,5$ мкм – $600\ 000$ Н/см², нитей оксида алюминия – $600\ 000$ Н/см², прочность кристаллических полимеров составила $300\ 000$ Н/см² и т. д. С увеличением диаметра прочность нитей резко падает.

Но, как оказалось, практически реализовать теоретическую прочность нитей диаметром в несколько микрон и длиной 1–2 мм в конструкциях невозможно. Для изделия нужна не только прочность, но и надежность, связанная с вязкостью материала. В машиностроительной промышленности используется много высокопрочных и высококачественных сплавов. Все они показывают, что с повышением прочности вязкость материала снижается, а значит, уменьшается его способность сопротивляться действию динамических нагрузок, распространению трещин.

Тонкое волокно обычно собирается в пряди, которые потом соединяются в нити. Прядь включает до 30 моноволокон, а нить – до 50 прядей.

Использовать высокопрочные волокна и нити можно, только соединив их в монолитное целое посредством связующей

матрицы, в качестве которой применяется металл, эпоксидные смолы и другие вещества. В результате получают микронеоднородные структуры – композиты волокнистого строения, армированные прочными волокнами, обладающие значительной вязкостью при высокой прочности. В промышленности уже применяются высокопрочные конструкции, созданные на базе стекловолокна, борволокна, углеволокна. Полимеры, используемые в качестве связующей матрицы, делятся на аморфные и кристаллические.

Аморфные полимеры, в свою очередь, подразделяются на мягкие (эпоксидные смолы, полиамиды, полихлорвинил, нейлон) и полумягкие (оргстекло).

Кристаллические полимеры имеют высокую прочность и используются для создания специального органоволокна.

Примером композитов могут служить хорошо знакомые стеклопластики, имеющие в качестве армирующего материала стеклянные волокна, а в качестве связующего наполнителя – эпоксидные смолы. Механические характеристики такого конструкционного материала следующие: модуль упругости $E = (0,2 - 0,3) \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$; плотность $\rho = 0,0018 \text{ кг/см}^3$, предел прочности $\sigma_B = 35\,000 \text{ Н/см}^2$ (при $d = 50 \text{ мкм}$) и $\sigma_B = 350\,000 \text{ Н/см}^2$ (при $d = 3 \text{ мкм}$). Прочность таких композитов в несколько раз выше прочности стали, даже выше прочности титановых сплавов. Однако очень низкое значение модуля упругости ограничивает их использование в качестве несущих элементов конструкций.

Перемешивая мелко изрубленное стеклянное волокно с полимерной массой, получают композит с хаотическим армированием – **полиэтилены**. Положительным свойством полиэтиленов является возможность изготовления изделий на стандартном технологическом оборудовании. Стеклотекстолиты получают путем пропитывания эпоксидной смолой стеклянной ткани. Укладывая стеклоткань в форму и пропитывая ее смолой после полимеризации, изготавливают изделия любой сложной формы. Цилиндрические оболочки из стеклопластиков получают путем наматывания стеклянных нитей, смоченных смолой, на оправку на специальном станке. Изменяя порядок укладки армирующих слоев, можно получать оболочки с различными механическими свойствами. Необходимо отметить следующее положение: создать образцы композитов в виде прутков, трубок, прямоугольных стержней не представляет

большой сложности; изготовление из композита нужной детали требует специального технологического оборудования, так как композит готовится вместе с деталью и материал создается в процессе изготовления детали. Таким образом, композит в машиностроении представляет единый процесс образования материала и конструкции детали.

4.9. Механические характеристики композитов

Прочность полимерного волокна зависит от многих факторов: длины и диаметра волокна; наличия поверхностных дефектов; температуры обработки и т. д. Поэтому дать оценку прочности композита по данным о прочности его компонентов пока не представляется возможным. Механические характеристики композитных материалов, как правило, определяются экспериментально.

Зная основные характеристики композитного материала, можно достаточно точно прогнозировать поведение конструкции в эксплуатации. В отличие от металлов композитные материалы обладают *анизотропией* и *неоднородностью*; по микроструктуре являются *двухфазными* и состоят из волокон и матрицы или связующего вещества (полимерного, металлического и др.); макроструктура материала образуется из ориентированных волокон, заключенных в матрице. Физические процессы, протекающие на микроуровне, определяют вид разрушения материала, но изучены еще недостаточно. Поэтому инженерные расчеты основаны на макромодели, в которой основным элементом материала, где происходит разрушение, считается армированный слой (рис. 4.25).

Слой – это основной элемент композитных структур, характеризующийся упругими постоянными и пределом прочности, определяемыми экспериментально.

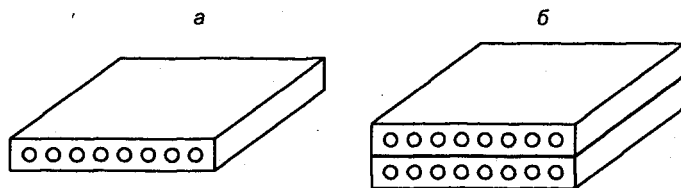


Рис. 4.25

Слой, армированный строго параллельными волокнами одного направления, называется **однонаправленным слоем**. Под слоистой структурой композитного материала понимается совокупность связанных слоев, имеющих различную ориентацию и определенную схему чередования. В отличие от линейно-упругих однородных материалов в слоистых структурах равномерно распределенные деформации по толщине образца вызывают неравномерное распределение напряжений. Напряжения, действующие в однонаправленном слое вдоль волокон, вызывают их хрупкое разрушение. Напряжения, действующие в однонаправленном слое перпендикулярно волокнам, вызывают разрушение матрицы, при этом как напряжения, так и деформации по величине резко отличаются от соответствующих значений продольного слоя. На рис. 4.26 представлены диаграммы деформирования однонаправленного композитного материала на основе волокон стекла и эпоксидной матрицы.

Диаграмма деформирования при продольном растяжении *1* и сжатии *2* показана на рис. 4.26, *а*; соответственно модули упругости $E_1 = 61\ 800$ МПа; $E_2 = 51\ 600$ МПа. На рис. 4.26, *б* приведена диаграмма при поперечном растяжении *1* и сжатии *2*; соответственно модули упругости $E_1 = 17\ 550$ МПа; $E_2 = 13\ 400$ МПа. Диаграмма сдвига в плоскости слоя показана на рис. 4.26, *в*, модуль $G = 5620$ МПа. Из приведенных диаграмм следует, что композит в направлении армирования вдоль волокон имеет наибольшую прочность; в поперечном направлении его прочность приблизительно в 10 раз меньше; сопротивление сдвигу в плоскости расположения волокон примерно в 2,0–2,5 раза

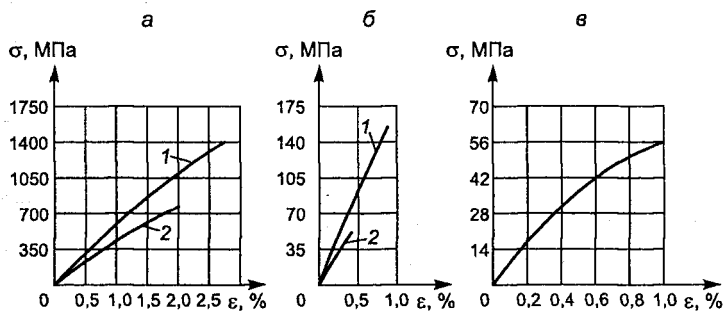


Рис. 4.26

меньше, чем в поперечном направлении. При продольном и поперечном нагружениях диаграммы деформирования можно считать до разрушения линейными. Диаграмма деформирования при сдвиге в плоскости слоя является нелинейной.

Механические характеристики наиболее часто применяемых однонаправленных композитных материалов приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Материалы	Плотность ρ , кг/см ³	Модули упругости, МПа			Коэффициент Пуассона, μ	Предельная деформация, %	
		E_1	E_2	G		$\varepsilon_1 \pm$	$\varepsilon_2 \pm$
Стекловолоконное и эпоксидное связующее	0,00199	52 700	11 900	5600	0,25	3,00 1,40	0,33 1,40
Высокопрочное углеродное волокно и эпоксидное связующее	0,00155	126 500	10 500	5600	0,27	1,20 1,20	0,43 1,60
Высокомодульное углеродное волокно и эпоксидное связующее	0,00163	194 000	7720	4200	0,3	0,45 0,55	0,70 2,60
Сверхвысокомодульное углеродное волокно и эпоксидное связующее	0,00161	316 000	6300	4200	0,26	0,40 0,21	0,20 1,00
Борные волокна и связующее - алюминий	0,00208	210 500	210 000	4900	0,21	0,75 1,23	0,40 1,20
Борные волокна и связующее - алюминий	0,00271	232 000	147 500	49 200	0,23	0,50 0,55	0,10 0,10

В табл. 4.3 величины с индексом «1» относятся к продольному нагружению; с индексом «2» - к поперечному нагружению. Деформации с индексом (+) относятся к растяжению, с индексом (-) - к сжатию. Цифры прочности в виду их значительной неустойчивости в таблице не приводятся.

КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ, ИЛИ КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

5.1. Сущность теорий прочности

Инженерный расчет предусматривает оценку прочности готовой детали или должен указать ее безопасные размеры в процессе проектирования с учетом свойств и напряженного состояния материала. Следует уточнить, что в расчетах на прочность появление пластических (остаточных) деформаций в деталях считается недопустимым.

Принципиальная трудность решения поставленной задачи состоит в том, что механическое состояние материала меняется в зависимости от его напряженного состояния. Так, наблюдения показывают, что при равномерном трехосном сжатии разрушение как пластичных, так и хрупких материалов не происходит, а при одноосном сжатии хрупкие материалы разрушаются при сравнительно малых напряжениях. Чугун, являющийся типичным хрупким материалом, при действии значительного трехосного сжатия приобретает пластические свойства; образец с кольцевой выточкой из пластичного материала при растяжении проявляет хрупкие свойства и т. д. Таким образом, **напряженное состояние в точке является главным фактором (причиной), изменяющим механическое состояние материала в этой точке.** Следовательно, необходимо установить меру, числовую величину напряженного состояния, при достижении которой наступит предельное состояние, определяющее переход материала из упругого состояния в пластическое. Под **предельным напряженным состоянием** будем понимать напряженное состояние, характеризуемое появлением у пластичных материалов заметных остаточных деформаций, а у хрупких – образованием местных трещин, свидетельствующих о начале разрушения.

Таким образом, прочность детали будет определяться сравнением расчетного напряженного состояния в опасной точке с предельным напряженным состоянием для материала.

Значения предельных напряжений для одноосных напряженных состояний легко определяются экспериментально. Так, при испытании материалов на простое растяжение в момент на-

ступления предельного состояния нормальные напряжения в поперечных сечениях образца будут равны у пластичных материалов пределу текучести σ_T , а у хрупких – пределу прочности σ_B . Точка, в которой ранее других в материале детали наступит предельное (опасное) состояние, называется **опасной точкой**.

При двух- и трехосном напряженном состоянии возможны самые различные комбинации между главными напряжениями. Поэтому, чтобы экспериментально получить числовые значения главных напряжений, соответствующие предельным состояниям, потребовалось бы провести огромное количество испытаний при различных соотношениях между главными напряжениями, что практически невозможно как из-за большого объема, так и из-за технических трудностей проведения экспериментов.

Установление критерия прочности (критерия предельного напряженного состояния) составляет задачу теории предельных напряженных состояний, обычно называемой **теорией прочности**.

Под критерием прочности следует понимать аналитическое представление в пространстве главных напряжений границы предельного напряженного состояния, в пределах которого материал может работать при заданных условиях без разрушения. Таким образом, теории прочности определяют условия, вызывающие качественное изменение механических свойств материала, т.е. переход напряженного состояния в предельное напряженное состояние материала.

Для любого материала определенную оценку опасности сложного напряженного состояния можно получить, сопоставляя его с предельным одноосным напряженным состоянием.

Поэтому в поисках решения проблемы было предложено, используя результаты испытаний материала на одноосное растяжение, теоретически оценить прочность детали при любом сложном напряженном состоянии, т. е. напряжение при одноосном растяжении принять в качестве эталона прочности, с помощью которого затем оценивать прочность при любом напряженном состоянии. Для этого в качестве критерия прочности были выдвинуты следующие гипотезы о причинах, вызывающих опасное состояние.

1. Опасное состояние наступает в результате достижения каким-либо главным напряжением предельного значения.

2. Опасное состояние наступает в результате достижения относительной линейной деформацией предельного значения.

3. Опасное состояние наступает в результате достижения касательным напряжением предельного значения.

4. Опасное состояние наступает в результате достижения удельной потенциальной энергией формоизменения предельного значения.

Считается, что опасное состояние при любом напряженном состоянии наступит только тогда, когда величина принятого критерия достигнет предельного значения, которое устанавливается из опытов на простое растяжение.

Таким образом, в общем случае нагружения детали опасная точка может быть найдена только после принятия критерия предельного напряженного состояния (критерия прочности). Например, если принять гипотезу, что предельное состояние определяется величиной главного напряжения, то опасной точкой будет точка, в которой возникает самое большое главное напряжение; если принять гипотезу, что предельное состояние определяется касательным напряжением, то опасной точкой будет точка, в которой касательное напряжение имеет наибольшее значение и т. д.

Введем понятие эквивалентного напряженного состояния и эквивалентного напряжения.

Под эквивалентным напряженным состоянием будем понимать одноосное напряженное состояние при растяжении, равноопасное с заданным напряженным состоянием (рис. 5.1).

Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экр}}$ - это напряжение, действующее в эквивалентном напряженном состоянии.

Следует иметь в виду, что с качественной стороны заданное напряженное состояние и эквивалентное могут быть несопоставимыми, так как физические процессы, протекающие в этих напряженных состояниях, обычно существенно различаются. На-

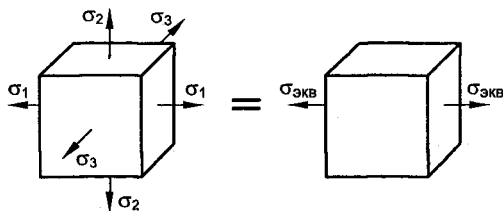


Рис. 5.1

пример, в одном процессе – материал будет находиться в состоянии разрушения, в другом – в пластическом состоянии. Однако введение эквивалентного напряжения является весьма удобным, так как позволяет на практике свести расчет на прочность в сложном напряженном состоянии к расчету на простое растяжение.

Для определения эквивалентного напряжения через главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, определяющие заданное напряженное состояние, на основе принятых гипотез были разработаны критерии прочности, называемые в технической литературе **классическими**, а так как они основываются на механических показателях, то их часто называют **механическими критериями прочности**. Таким образом, под **критериями прочности** понимаются гипотезы, определяющие условия перехода материала в опасное состояние. Сущность теорий прочности состоит в создании методов, позволяющих оценивать прочность деталей при сложных напряженных состояниях, если известны механические характеристики материала при простом растяжении.

5.2. Классические критерии прочности

Первая теория прочности, или критерий наибольших нормальных напряжений

Согласно этой теории в качестве критерия прочности принимается наибольшее по абсолютной величине главное напряжение. Опасной считается точка, в которой наибольшее по абсолютной величине главное напряжение достигает предельного значения. При расчетах величина наибольшего по абсолютной величине главного напряжения при любом напряженном состоянии не должна превышать допустимого нормального напряжения $[\sigma]$, устанавливаемого при простом растяжении или сжатии образцов из данного материала. Условие прочности по первому критерию прочности запишется в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \leq [\sigma]_p; \quad \sigma_{\text{экв}} = |\sigma_3| \leq [\sigma]_c, \quad (5.1)$$

где $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_c$ – допустимые напряжения при простом растяжении и сжатии соответственно.

Согласно условию прочности (5.1) материал может обладать не одинаковым сопротивлением простому растяжению и сжатию. Этот критерий предложен на основе выводов Галилео Галилея⁹ о разрушении бруса при изгибе, иногда он называется

критерием Ренкина¹⁰. Опытная проверка показывает, что эта теория позволяет получить удовлетворительные результаты только для очень хрупких материалов (гранит, кирпич, стекло и т. п.). Для пластичных материалов она дает неудовлетворительные результаты и в расчетах не применяется.

Вторая теория прочности, или критерий наибольших относительных удлинений

В данной теории в качестве критерия прочности принимается наибольшее относительное удлинение. Опасной считается точка, в которой наибольшее относительное удлинение достигает предельного значения. При расчетах величина наибольшего относительного удлинения при любом напряженном состоянии не должна превышать допускаемого значения $[\varepsilon]$, устанавливаемого при простом растяжении образцов из данного материала.

Условие прочности по второму критерию прочности запишется в виде

$$\varepsilon_{\text{ЭКВ}} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon], \quad (5.2)$$

где ε_1 - наибольшая главная деформация.

Используя обобщенный закон Гука, выразим условия прочности через главные напряжения:

$$\varepsilon_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}}{E}; \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Подставляя значения $\varepsilon_{\text{ЭКВ}}$, ε_1 , $[\varepsilon]$ в условия прочности (5.2), получим

$$\frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}}{E} = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E},$$

или

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p. \quad (5.3)$$

Таким образом, вторая теория прочности учитывает все три главных напряжения. Основы этой теории были заложены Эдмом Мариоттом¹¹, окончательно она была сформулирована Сен-Венаном. Опытная проверка показывает, что вторая теория, как и первая, предполагает только хрупкое разрушение и дает сравнительно удовлетворительные результаты для матери-

алов типа серого литейного и легированного чугунов. Критерий предполагает, что материал имеет одинаковое сопротивление простому растяжению и сжатию.

В настоящее время в инженерных расчетах эта теория прочности почти не применяется.

Третья теория прочности, или критерий наибольших касательных напряжений

Согласно этому критерию опасной считается точка, в которой наибольшее касательное напряжение достигает предельного значения. При расчетах величина наибольшего касательного напряжения при любом напряженном состоянии не должна превышать допускаемого значения $[\tau]$, устанавливаемого при простом растяжении образцов из данного материала. Условие прочности по третьему критерию запишется в виде:

$$\tau_{\text{эКВ}} = \tau_{\text{max}} \leq [\tau]. \quad (5.4)$$

Используя теорию напряженного состояния, выразим условия прочности через главные напряжения:

$$\tau_{\text{эКВ}} = \frac{\sigma_{\text{эКВ}}}{2}; \quad \tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Подставляя значения $\tau_{\text{эКВ}}$, τ_{max} , $[\tau]$ в (5.4), получим

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (5.5)$$

Основоположником третьей теории является крупнейший физик и инженер Шарль Кулон¹². С.П. Тимошенко писал: «Никто другой из ученых XVIII века не дал так много механике упругого тела, как Кулон». Эта теория позволяет получать хорошие результаты для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Касательные напряжения при пластической деформации тесно связаны с необратимыми сдвигами в кристаллической решетке. Таким образом, критерий наибольших касательных напряжений предполагает разрушение материала путем сдвига и скольжения его частей относительно друг друга.

Четвертая теория прочности (энергетическая теория), или критерий удельной потенциальной энергии формоизменения

В этой теории в качестве критериев прочности принимается наибольшая величина удельной потенциальной энергии формоизменения. Опасной считается точка, в которой удельная потенциаль-

ная энергия формоизменения достигает предельного значения. При расчетах величина наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения при любом напряженном состоянии не должна превышать допустимого значения $[u_{of}]$, определяемого при простом растяжении образцов из данного материала. Условие прочности по четвертому критерию запишется в виде

$$u_{of \text{ экв}} = u_{of \text{ max}} \leq [u_{of}]. \quad (5.6)$$

Выразим условие (5.6) через главные напряжения:

$$u_{of \text{ экв}} = \frac{1+\mu}{3E} \cdot \sigma_{\text{экв}}^2;$$

$$u_{of \text{ max}} = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)];$$

$$[u_{of}] = \frac{1+\mu}{3E} \cdot [\sigma]^2.$$

Подставляя полученные выражения в (5.6), получим

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq [\sigma]. \quad (5.7)$$

Критерий был сформулирован М. Губером¹³ в 1904 г. как поправка для лучшего согласования экспериментальных данных с теорией, предложенной в 1885 г. Э. Бельтрами, в которой в качестве критерия была принята полная потенциальная энергия деформации. Формула (5.7) не содержит никаких упругих постоянных и, следовательно, не связана с условием упругого состояния материала до момента разрушения. На этом основании Р. Мизес в 1913 г., а Г. Генки в 1924 г. предложили принять (5.7) как условие перехода материала из упругого состояния в пластическое за пределом текучести, если материал способен воспринимать пластические деформации без разрушения. Так как формоизменение элемента связано со сдвигами и касательными напряжениями, то четвертая (энергетическая) и третья теории прочности, оперирующие с касательными напряжениями, оказываются количественно близкими между собой (максимальное расхождение составляет 13 %). При этом оба критерия предполагают, что материал одинаково работает на растяжение и на сжатие. Предпочтительное использование энергетической теории в расчетах, по сравнению с третьей, объясняется тем, что величина $\sigma_{\text{экв}}$ в условии прочности (5.7)

не зависит от присвоения индексов главным напряжением, т.е. не требуется обязательного уяснения, какое из главных напряжений является наибольшим, а какое наименьшим.

5.3. Критерий прочности Мора

Особенностью критерия прочности Мора¹⁴ является то, что он не содержит никаких критериальных гипотез, а полностью основывается на обобщении результатов экспериментов.

Условие прочности по критерию Мора можно получить с помощью кругов напряжений (кругов Мора), устанавливающих графическую связь напряжений σ_α , τ_α с углами α наклона площадки к оси x . Любое напряженное состояние в точке можно представить на плоскости σ_α , τ_α кругами Мора, из которых просто находятся положения главных площадок и величины главных напряжений.

Для плоского напряженного состояния уравнения, определяющие нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке, имеют следующий вид:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Заменяя $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha$ через косинус двойного угла, получим

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (5.8)$$

Возведем (5.8) в квадрат и сложим:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (5.9)$$

Представим правую часть (5.9) в виде

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left[\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right]^2. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) является уравнением окружности в плоскости $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ с центром, отстоящим от начала координат на

$$a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \text{ и радиусом } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \text{ (рис. 5.2).}$$

Графическое представление напряжений было разработано Мором в 1882 г. и носит название **круга Мора** или **круга напряжений**.

Пересечение круга Мора с осью σ_α определяет главные напряжения при плоском напряженном состоянии:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = a + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 = a - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Каждая точка на окружности изображает напряжения в некотором сечении. Координаты точки K (см. рис. 5.2) представляют нормальное напряжение σ_x и касательное напряжение τ_{xy} , действующее на наклонной площадке, расположенной под углом α к оси x . На круге Мора угловая координата каждой точки равняется двойному углу, отсчитываемому от оси σ_α (напряжение σ_1). Круг напряжений позволяет по известным главным напряжениям находить нормальные и касательные напряжения, действующие в сечениях, расположенных под заданным углом

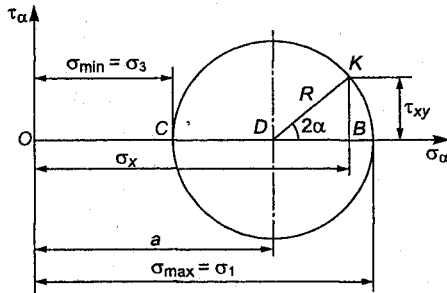


Рис. 5.2

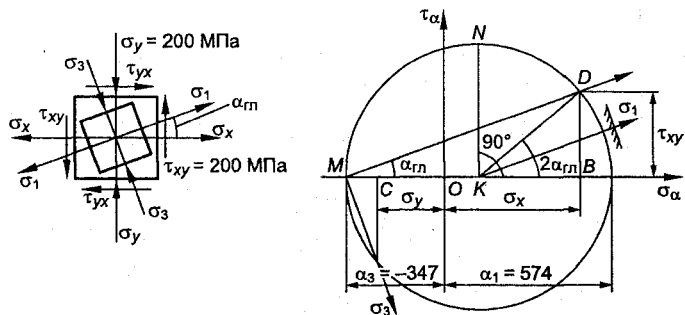


Рис. 5.3

к главным площадкам, а также по известным нормальным и касательным напряжениям, действующим в заданном сечении, находить главные напряжения и их направления.

Вычислим главные напряжения и положения главных площадок для плоского напряженного состояния, изображенного на рис. 5.3.

Отложим в системе координат $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ в одинаковом масштабе отрезки OB, OC и BD , численно равные напряжениям $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, с учетом знаков. Разделим отрезок BC пополам и найдем центр круга K .

Соединив K с D , получим радиус окружности. Точки пересечения круга с осью σ_α определяют величину главных напряжений σ_1 и σ_3 . Угол между положительным направлением оси σ_α и радиусом будет 2α . Разделив угол пополам, получим направление нормали к площадке, на которой действует главное напряжение σ_1 . Согласно тому, что внешний угол равен сумме внутренних углов треугольника, не смежных с ним, положение нормали к главной площадке получим, соединив точки M и D .

Из рис. 5.3 видно, что наибольшее касательное напряжение изображается отрезком KN , равным радиусу круга:

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Нормаль к сечению с $\tau_{\alpha \max}$ составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с осью x (угол $BKN = 90^\circ$). В сечении наряду с $\tau_{\alpha \max}$ действует нормаль-

ное напряжение, равное полусумме главных напряжений

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

В общем случае объемного напряженного состояния на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности исследуемой точки, действуют три главных напряжения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (рис. 5.4).

Каждый круг Мора определяет напряжения на площадках, параллельных осям x, y, z . Так, напряжения на площадках, параллельных направлению σ_1 , изображаются кругом Мора, построенного на главных напряжениях $\sigma_2 - \sigma_3$; напряжения на площадках, параллельных σ_2 , изображаются кругом Мора, построенного на главных напряжениях $\sigma_1 - \sigma_3$, и напряжения на площадках, параллельных σ_3 , изображаются кругом Мора, построенного на напряжениях $\sigma_1 - \sigma_2$. Максимальное касательное и нормальное напряжения в исследуемой точке определяются точками B и D большого круга. Заштрихованная область является геометрическим местом точек, определяющих нормальные и касательные напряжения на площадках общего положения.

Таким образом, три круга Мора с заключенной между ними областью полностью определяют напряженное состояние в данной точке. Разрабатывая свою теорию, Мор полагал, что при одинаковом нормальном напряжении на площадках наиболее вероятное разрушение будет на той, на которой касательное напряжение наибольшее. Такие площадки определяются точками большого круга, построенного на главных напряжениях $\sigma_1 - \sigma_3$. Поэтому Мор считал, что промежуточное напряже-

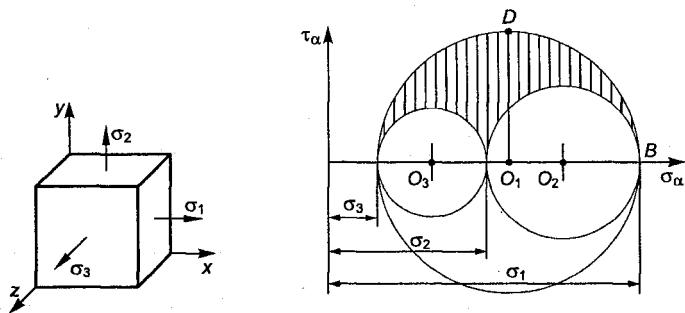


Рис. 5.4

ние σ_2 не влияет на прочность, которая в общем случае напряженного состояния зависит только от величины и знака наибольшего и наименьшего главных напряжений. Согласно опытам, погрешность в оценке прочности, связанная с учетом промежуточного главного напряжения, не превышает 12–15 %. Представим, что у напряженного состояния, изображенного на рис. 5.4, одновременно увеличиваются все компоненты, пока напряженное состояние не достигнет предельного, при котором произойдет или разрушение образца, или в нем появятся пластические деформации.

По результатам подобных опытов с другими напряженными состояниями можно построить на плоскости $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ семейство больших кругов Мора для соответствующих предельных состояний и вычертить их общую огибающую. Огибающая предельных кругов зависит от свойств материала и является его механической характеристикой. Учитывая большие технические сложности построения огибающей для напряженного состояния, когда все три главных напряжения являются растягивающими, на практике ее строят по результатам двух опытов – на растяжение и сжатие, при этом огибающую заменяют прямой касательной к окружностям.

Выведем формулу для $\sigma_{\text{экв}}$. Уменьшая диаметры всех кругов в n раз (где n – коэффициент безопасности), получим круги, изображающие уже допускаемые напряженные состояния (рис. 5.5). Отрезок OB является допускаемым напряжением при простом растяжении; отрезок OK представляет допускаемое напряжение при простом сжатии. Промежуточный круг с центром O_2 представляет данное напряженное состояние с главными напряжениями σ_1 и σ_3 , для которого требуется получить условие прочности.

Проведем прямую C_1D_3 , параллельную оси σ_α .

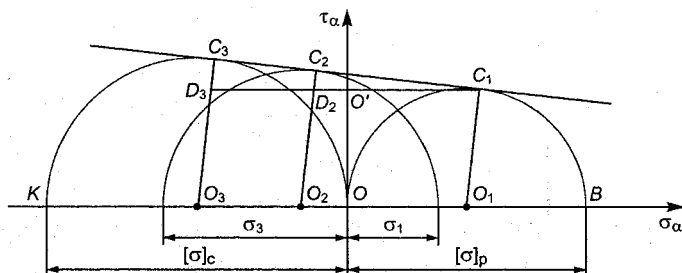


Рис. 5.5

Из подобия треугольников $C_1D_3C_3$ и $C_1D_2C_2$ получим

$$\frac{C_2D_2}{C_3D_3} = \frac{C_1D_2}{C_1D_3}, \text{ или } \frac{O_2C_2 - O_2D_2}{O_3C_3 - O_3D_3} = \frac{O'C_1 + O'D_2}{O'C_1 + O'D_3}. \quad (5.11)$$

Заменим в (5.11) отрезки соответствующими напряжениями:

$$C_2D_2 = O_2C_2 - O_2D_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{[\sigma]_p}{2};$$

$$C_3D_3 = O_3C_3 - O_3D_3 = \frac{[\sigma]_c}{2} - \frac{[\sigma]_p}{2};$$

$$C_1D_2 = O'C_1 + O'D_2 = \frac{[\sigma]_p}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2};$$

$$C_1D_3 = \frac{[\sigma]_p}{2} + \frac{[\sigma]_c}{2}.$$

После простых преобразований, введя знак неравенства, получим

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_c} \sigma_3 \leq [\sigma]_p. \quad (5.12)$$

Так как $\sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma]_p$, то условие прочности по теории Мора можно записать в виде

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_p, \quad (5.13)$$

где k - коэффициент, характеризующий неодинаковое сопротивление материала при простом растяжении и сжатии:

$$k = \frac{\sigma_{Tp}}{\sigma_{Tc}}, \quad (5.14)$$

$$k = \frac{\sigma_{Bp}}{\sigma_{Bc}}, \quad (5.15)$$

где σ_{Tp} , σ_{Bp} - соответственно предел текучести и предел прочности при растяжении; σ_{Tc} , σ_{Bc} - соответственно предел текучести и предел прочности при сжатии.

Выражение (5.14) применяется для пластичных материалов; выражение (5.15) – для хрупких материалов. Если материал имеет одинаковые пределы текучести при растяжении и сжатии ($k = 1,0$), то расчетная формула (5.13) совпадает с формулой (5.5), полученной по третьему критерию прочности. В практических расчетах по допускаемым напряжениям в сложном напряженном состоянии критерий прочности Мора используется для материалов, имеющих различные механические характеристики при растяжении и сжатии. Для материалов, имеющих одинаковые механические характеристики при растяжении и сжатии, применяются третий и четвертый критерии прочности.

Следует отметить, что для напряженных состояний всестороннего сжатия критерий прочности Мора иногда приводит к отрицательным значениям эквивалентных напряжений. такому результату формально дается следующее объяснение. Если при $\sigma_{\text{ЭКВ}} = 0$ напряженное состояние считается равноопасно ненапряженному, то при $\sigma_{\text{ЭКВ}} < 0$ его следует полагать менее опасным, чем ненапряженное. В практических расчетах поскольку равноопасность нагруженной детали при $\sigma_{\text{ЭКВ}} = 0$ и ненагруженной принимаются одинаковыми, то, когда расчет при оценке прочности дает $\sigma_{\text{ЭКВ}} < 0$, принимают $\sigma_{\text{ЭКВ}} = 0$.

Глава 6

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

6.1. Основные определения

В расчетах на прочность и жесткость используются определенные геометрические характеристики поперечных сечений. Их значения зависят от формы сечения. Умение вычислять геометрические характеристики относительно заданной системы координат, знание характера их изменения при преобразовании осей координат позволяют наиболее рационально располагать элементы конструкции относительно внешних нагрузок, обеспе-

чивая наибольшую грузоподъемность конструкции при наименьшем весе. Геометрические характеристики поперечного сечения в системе координат y, z определяются интегралами (рис. 6.1).

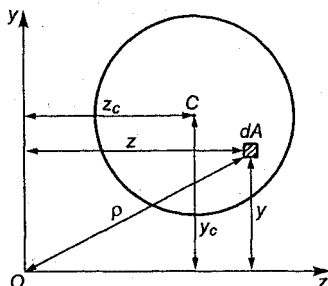


Рис. 6.1

$$A = \int_A dA; \quad (6.1)$$

$$S_z = \int_A y dA; \quad (6.2)$$

$$S_y = \int_A z dA; \quad (6.3)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad (6.4)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA; \quad (6.5)$$

$$I_{zy} = \int_A yz dA; \quad (6.6)$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (6.7)$$

где dA - элементарная площадка; y, z - координаты элементарной площадки относительно осей z, y ; ρ - полярная координата элементарной площадки относительно начала координат.

Индекс « A » у знака интеграла означает, что интегрирование ведется по всей площади сечения.

Первый интеграл (6.1) является площадью сечения.

Для других интегралов в сопротивлении материалов приняты следующие названия:

S_z, S_y - статические моменты площади сечения относительно осей z, y ;

I_z, I_y - осевые моменты инерции сечения относительно осей z, y ;

I_{zy} - центробежный момент инерции относительно осей z, y ;
 I_p - полярный момент инерции сечения относительно начала координат.

Статические моменты площади и центробежный момент инерции сечения, так как координаты z и y сохраняют под интегралами свои алгебраические знаки, могут быть в зависимости от положения осей координат *положительными, отрицательными и равными нулю*. Осевые и полярный моменты инерции, поскольку координаты z, y и ρ входят под знак интеграла во второй степени, всегда величины положительные. Размерность статических моментов - единица длины в третьей степени, обычно, - см^3 ; размерность осевых, полярного и центробежного моментов инерции - единица длины в четвертой степени, обычно, - см^4 .

Заменяя в формуле (6.7) ρ по теореме Пифагора через координаты элементарной площадки, получим

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y. \quad (6.8)$$

Следовательно, полярный момент инерции относительно произвольной точки равен сумме осевых моментов инерции сечения относительно любых взаимно перпендикулярных осей, проходящих через ту же точку.

Следует отметить, что определение моментов инерции для элементарной площадки не распространяется на конечную площадь.

Пример 6.1. Вычислить статические, осевые и центробежный моменты инерции прямоугольника относительно осей z, y , проходящих через центр тяжести (рис. 6.2).

Решение. Выделим элементарные площадки параллельно осям z и y : $dA_z = bdy$ и $dA_y = hdz$. Используя формулы (6.2-6.6), получим

$$S_z = \int_{-h/2}^{h/2} y b dy = \frac{by^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0;$$

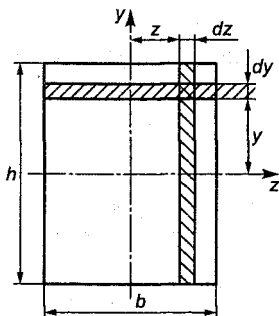


Рис. 6.2

$$S_y = \int_{-b/2}^{b/2} zhdz = \frac{hz^2}{2} \Big|_{-b/2}^{b/2} = 0;$$

$$I_z = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 bdy = \frac{by^3}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12};$$

$$I_y = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 hdz = \frac{hz^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{hb^3}{12};$$

$$I_{zy} = \int_{-h/2}^{h/2} ydy \int_{-b/2}^{b/2} zdz = \int_{-h/2}^{h/2} ydy \left(\frac{b^2}{8} - \frac{b^2}{8} \right) = 0.$$

Пример 6.2. Определить полярный момент инерции круга диаметром D , когда начало координат совпадает с центром тяжести (рис. 6.3). Определить осевые моменты инерции относительно осей y и z .

Решение. Выделим элементарную площадку в виде кольца радиусом r .

Тогда

$$dA = 2\pi r dr;$$

$$I_p = \int_0^{D/2} 2\pi r r^2 dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^{D/2} = \frac{\pi D^4}{32}.$$

Так как для круга $I_z = I_y$, то, используя формулу (6.8), найдем

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{2 \cdot 32} = \frac{\pi D^4}{64}.$$

Пример 6.3. Определить осевой момент инерции треугольника относительно оси z , совпадающей с основанием (рис. 6.4).

Решение. Разобьем площадь треугольника на элементарные площадки (полоски). Площадь такой полоски

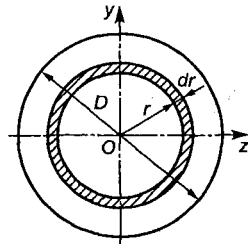


Рис. 6.3

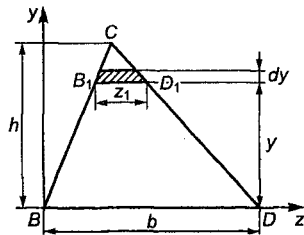


Рис. 6.4

$$dA = z_1 dy.$$

Из подобия треугольников BCD и B_1CD_1 , находим

$$z_1 = \frac{b}{h}(h-y);$$

$$dA = (h-y) \frac{b}{h} dy.$$

Тогда

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 (h-y) \frac{b}{h} dy = \frac{bh^3}{12}.$$

6.2. Центр тяжести сложных сечений

При расчете элементов конструкции прежде всего требуется знать положение центра тяжести сечения.

Представим, используя теорему о среднем интегрального исчисления, формулы (6.2 и 6.3) в виде

$$S_z = \int_A y dA = y_c \int_A dA = y_c A; \quad (6.9)$$

$$S_y = \int_A z dA = z_c \int_A dA = z_c A, \quad (6.10)$$

где y_c и z_c - средние значения подынтегральных функций, представляющие для плоских фигур координаты их центра тяжести.

Выражения (6.9), (6.10) позволяют находить по известным статическим моментам площади координаты центра тяжести сечения (см. рис. 6.1):

$$y_c = \frac{S_z}{A}; \quad (6.11)$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} \quad (6.12)$$

или вычислять статические моменты площади сечения по их координатам y_c и z_c центра тяжести. Из формул (6.9), (6.10) вытекает очевидное следствие: если статический момент площади относительно какой-либо оси равен нулю, то эта ось проходит

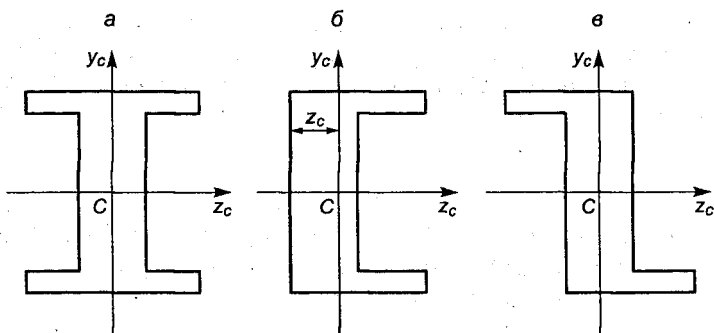


Рис. 6.5

через центр тяжести сечения, т.е. является центральной осью сечения. Действительно, условие $S_z = 0$ и $S_y = 0$ возможно только тогда, когда $y_c = 0$ и $z_c = 0$. Таким образом, статический момент площади относительно любой центральной оси равен нулю.

Во многих случаях нахождение центра тяжести значительно упрощается. Так, если сечение имеет две оси симметрии (рис. 6.5, а), то точка их пересечения является центром тяжести; если сечение имеет одну ось симметрии (рис. 6.5, б), то центр тяжести будет лежать на этой оси и для нахождения его положения достаточно определить только одну координату z_c ; если сечение симметрично относительно некоторой точки (рис. 6.5, в), то эта точка является центром тяжести.

Сечения сложной формы при определении площади и координат центра тяжести разбивают на простые геометрические фигуры и интегрирование заменяют суммированием.

Представляя статические моменты S_z , S_y и площадь A в формулах (6.11) и (6.12) как сумму статических моментов и сумму площадей, составляющих сечения фигур, получим выражения для вычисления координат центра тяжести сложного сечения.

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ic}}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_{ic}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (6.13)$$

где A_i - площадь i -й части сечения; y_{ic} , z_{ic} - координаты центра тяжести i -й части сечения относительно произвольно выбранных осей координат z и y .

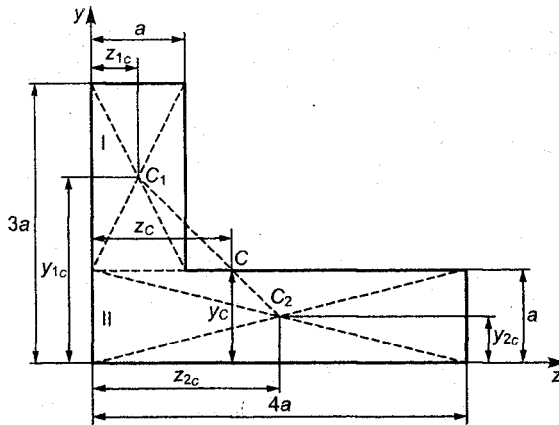


Рис. 6.6

Пример 6.4. Определить координаты центра тяжести сечения, изображенного на рис. 6.6.

Решение. Выбираем вспомогательные оси z и y , совпадающие с контуром сечения. Разбиваем сечение на две части и определяем площади и координаты составляющих частей:

$$A_1 = 2aa = 2a^2;$$

$$y_{1c} = 2a; \quad z_{1c} = \frac{a}{2};$$

$$A_2 = 4aa = 4a^2;$$

$$y_{2c} = \frac{a}{2}; \quad z_{2c} = 2a.$$

Координаты центра тяжести сечения относительно осей z и y будут равны

$$y_c = \frac{2a^2 \cdot 2a + 4a^2 \cdot \frac{a}{2}}{2a^2 + 4a^2} = a;$$

$$z_c = \frac{2a^2 \cdot \frac{a}{2} + 4a^2 \cdot 2a}{2a^2 + 4a^2} = \frac{3}{2}a.$$

Пример 6.5. Определить координаты центра тяжести сечения, изображенного на рис. 6.7.

Решение. Разбиваем сечение на три фигуры: прямоугольник, круг и квадрат. Определяем их площади и координаты центров тяжести относительно осей z, y , проходящих через центр тяжести прямоугольника.

$$A_1 = 20 \cdot 32 = 640 \text{ см}^2; y_{1c} = 0; z_{1c} = 0;$$

$$A_2 = \frac{3,14 \cdot 8^2}{4} = 50,24 \text{ см}^2;$$

$$y_{2c} = 8 \text{ см}; z_{2c} = 5 \text{ см};$$

$$A_3 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ см}^2; y_{3c} = -7 \text{ см}; z_{3c} = -5 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести сечения

$$y_c = \frac{S_{1z} - S_{2z} - S_{3z}}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{0 - 50,24 \cdot 8 - 25 \cdot (-7)}{640 - 50,24 - 25} = -0,402 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{S_{1y} - S_{2y} - S_{3y}}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{0 - 50,24 \cdot 5 - 25 \cdot (-5)}{640 - 50,24 - 25} = -0,221 \text{ см}.$$

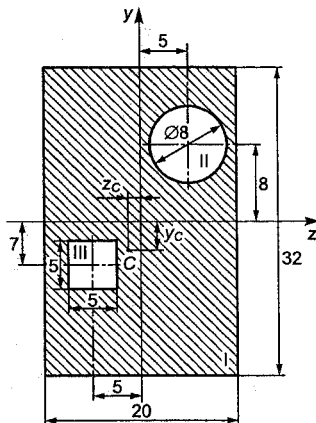


Рис. 6.7

Пример 6.6. Определить площадь, статические моменты сечения, ограниченного отрезком параболы n -й степени и осями координат y, z , а также координаты центра тяжести сечения (рис. 6.8).

Решение. Уравнение кривой имеет вид

$$y = az^n, \quad 0 \leq z \leq b, \quad 0 \leq y \leq h,$$

где a - постоянный коэффициент, в нашем случае

$$a = \frac{h}{b^n},$$

где n - показатель степени параболы.

Выделим элементарную площадку (на рисунке заштрихована):

$$dA = ydz = az^n dz.$$

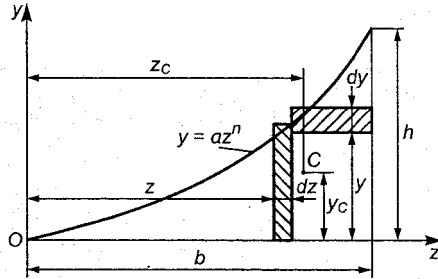


Рис. 6.8

Площадь сечения равна

$$A = \int_0^b az^n dz = a \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_0^b = \frac{hb}{n+1}.$$

При $n = 2$ (квадратная парабола)

$$A = \frac{1}{3}bh;$$

при $n = 3$ (кубическая парабола)

$$A = \frac{1}{4}bh.$$

Статические моменты относительно осей y и z

$$S_y = \int_0^b zaz^n dz = \int_0^b az^{n+1} dz = \frac{az^{n+2}}{n+2} \Big|_0^b = \frac{hb^2}{n+2}.$$

При $n = 2$

$$S_y = \frac{1}{4}hb^2;$$

при $n = 3$

$$S_y = \frac{1}{5}hb^2.$$

$$S_z = \int_0^h y(b-z) dy = \int_0^h y \left(b - \frac{\sqrt[n]{y}}{\sqrt[n]{a}} \right) dy = b \frac{y^2}{2} \Big|_0^h - \frac{y^{\frac{2n+1}{n}}}{\sqrt[n]{a} \cdot \frac{2n+1}{n}} \Big|_0^h =$$

$$= \frac{bh^2}{2} - \frac{\sqrt[n]{h} \cdot h^2 n}{\sqrt[n]{a} (2n+1)} = \frac{bh^2}{2(2n+1)}.$$

Статический момент площади S_z можно вычислить проще, если вспомнить, что центр тяжести элементарной площадки находится на расстоянии $\frac{y}{2}$ от оси z . Тогда

$$S_z = \int_A \frac{y}{2} dA = \int_0^b \frac{a^2 z^{2n}}{2} dz = \frac{a^2 z^{2n+1}}{2(2n+1)} \Big|_0^b = \frac{a^2 b^{2n+1}}{2(2n+1)} =$$

$$= \frac{b \cdot a b^n a b^n}{2(2n+1)} = \frac{bh^2}{2(2n+1)}.$$

Получили тот же результат.

При $n = 2$

$$S_z = \frac{bh^2}{10};$$

при $n = 3$

$$S_z = \frac{bh^2}{14}.$$

Определим координаты y_c, z_c центра тяжести сечения:

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\frac{bh^2}{2(2n+1)}}{\frac{hb}{n+1}} = \frac{h(n+1)}{2(2n+1)}.$$

При $n = 2$

$$y_c = \frac{h(2+1)}{2(2 \cdot 2+1)} = \frac{3}{10} h;$$

при $n = 3$

$$y_c = \frac{h(3+1)}{2(2 \cdot 3+1)} = \frac{2}{7}h.$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{hb^2}{n+2}}{\frac{hb}{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}b.$$

При $n = 2$

$$z_c = \frac{2+1}{2+2}b = \frac{3}{4}b;$$

при $n = 3$

$$z_c = \frac{3+1}{3+2}b = \frac{4}{5}b.$$

Вычислим статические моменты и центр тяжести для сечения, ограниченного кривой $y = az^n$ и прямой, параллельной оси z , расположенной от оси z на расстоянии h (рис. 6.9).

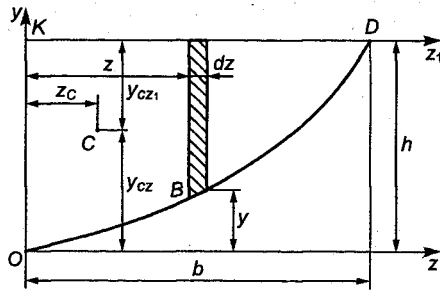


Рис. 6.9

Площадь сечения $OBDK$ равна

$$A = \int_0^b (h-y) dz = \int_0^b (h-az^n) dz = \frac{nbh}{n+1}.$$

При $n = 2$

$$A = \frac{2}{3}bh;$$

При $n = 3$

$$A = \frac{3}{4}bh.$$

$$S_y = \int_0^b z(h-az^n)dz = \frac{hb^2}{2} - \frac{hb^2}{n+2} = \frac{nhb^2}{2(n+2)}.$$

При $n = 2$

$$S_y = \frac{hb^2}{4};$$

при $n = 3$

$$S_y = \frac{3hb^2}{10}.$$

$$S_z = \int_0^b \frac{h+y}{2}(h-az^n)dz = \int_0^b \frac{h+az^n}{2}(h-az^n)dz =$$

$$= \frac{1}{2} \left(bh^2 - \frac{a^2 b^{2n+1}}{2n+1} \right) = \frac{nbh^2}{2n+1}.$$

При $n = 2$

$$S_z = \frac{2bh^2}{5};$$

при $n = 3$

$$S_z = \frac{3bh^2}{7}.$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{nhb^2(n+1)}{2(n+2)nhb} = \frac{n+1}{2(n+2)}b.$$

При $n = 2$

$$z_c = \frac{3}{8}b;$$

при $n = 3$

$$z_c = \frac{4}{10}b = \frac{2}{5}b.$$

$$y_{cz} = \frac{S_z}{A} = \frac{nbh^2(n+1)}{(2n+1)nbh} = \frac{n+1}{2n+1}h.$$

При $n = 2$

$$y_{cz} = \frac{2+1}{2 \cdot 2+1}h = \frac{3}{5}h;$$

при $n = 3$

$$y_{cz} = \frac{3+1}{3 \cdot 2+1}h = \frac{4}{7}h.$$

$$y_{cz_1} = -(h - y_{cz}) = -\left(h - \frac{n+1}{2n+1}h\right) = -h\left(1 - \frac{n+1}{2n+1}\right) = -\frac{n}{2n+1}h. \quad (a)$$

При $n = 2$

$$y_{cz_1} = -\frac{2}{5}h;$$

при $n = 3$

$$y_{cz_1} = -\frac{3}{7}h.$$

Статический момент сечения относительно оси z_1

$$\begin{aligned} S_{z_1} &= \int_0^b -\frac{h-y}{2}(h-az^n)dz = \int_0^b -\frac{1}{2}(h-az^n)^2 dz = \\ &= -\int_0^b \frac{1}{2}(h^2 - 2haz^n + a^2 z^{2n})dz = -\frac{n^2 bh^2}{(2n+1)(n+1)}. \end{aligned}$$

$$y_{cz_1} = -\frac{S_{z_1}}{A} = -\frac{n^2 bh^2(n+1)}{(2n+1)(n+1)nbh} = -\frac{n}{(2n+1)}h. \quad (б)$$

Значение y_{cz_1} одинаково по формулам (а) и (б).

6.3. Параллельный перенос осей

Если известны геометрические характеристики сечения относительно осей z и y , то геометрические характеристики этого сечения относительно других осей z_1 и y_1 , параллельных первым (рис. 6.10, а), будут определяться согласно (6.1-6.6) выражениями

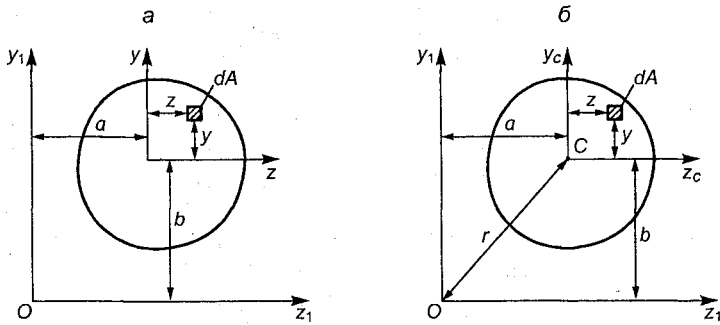


Рис. 6.10

$$S_{z_1} = \int_A (y+b) dA = \int_A y dA + \int_A b dA = S_z + bA; \quad (6.14)$$

$$S_{y_1} = \int_A (z+a) dA = \int_A z dA + \int_A a dA = S_y + aA; \quad (6.15)$$

$$I_{z_1} = \int_A (y+b)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA = I_z + 2bS_z + b^2 A; \quad (6.16)$$

$$I_{y_1} = \int_A (z+a)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2a \int_A z dA + a^2 \int_A dA = I_y + 2aS_y + a^2 A; \quad (6.17)$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A (z+a)(y+b) dA = I_{zy} + aS_z + bS_y + abA. \quad (6.18)$$

Когда оси z и y проходят через центр тяжести, т.е. являются центральными осями z_c и y_c (рис. 6.10, б), то $S_z = S_y = 0$, и формулы (6.14-6.18) примут вид

$$S_{z_1} = bA; \quad (6.19)$$

$$S_{y_1} = aA; \quad (6.20)$$

$$I_{z_1} = I_{z_c} + b^2 A; \quad (6.21)$$

$$I_{y_1} = I_{y_c} + a^2 A; \quad (6.22)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{z_c y_c} + abA, \quad (6.23)$$

где I_{z_c} , I_{y_c} , $I_{z_c y_c}$ - осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения.

Таким образом, при параллельном переносе осей от центра тяжести сечения статические моменты площади изменяются на величину площади, умноженную на расстояние между осями; осевые моменты инерции изменяются на величину площади, умноженную на квадрат расстояния между осями, а центробежный момент инерции - на величину, равную произведению площади на расстояние между обеими парами осей.

Из формул (6.21), (6.22) следует, что любое сечение имеет наименьшие осевые моменты инерции относительно центральных осей z_c и y_c . В частности, если $I_{z_c y_c} = 0$, то формула (6.23) принимает простой вид

$$I_{z_1 y_1} = abA. \quad (6.24)$$

Складывая выражения (6.21) и (6.22) для I_{y_1} и I_{z_1} , получим

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_{y_c} + I_{z_c} + (a^2 + b^2)A,$$

или

$$I_{\rho_1} = I_{\rho_c} + r^2 A, \quad (6.25)$$

где $r^2 = a^2 + b^2$ - расстояние между началами C и O координатных осей (см. рис. 6.10, б). Начало координат C совпадает с центром тяжести сечения.

Таким образом, полярный момент инерции сечения при параллельном переносе осей равен полярному моменту инерции относительно осей $z_c y_c$, проходящих через центр тяжести сечения, сложенному с произведением площади на квадрат расстояния между началами координатных осей.

Формулы для параллельных переносов (6.19-6.25) позволяют значительно упростить определение геометрических характеристик плоских сечений.

6.4. Поворот осей координат

Предположим, что известны осевые и центробежный моменты инерции I_z , I_y , I_{zy} сечения относительно произвольных осей y , z и требуется определить соответствующие моменты

инерции I_{z_1} , I_{y_1} , $I_{z_1 y_1}$ относительно осей z_1 , y_1 , повернутых на угол α (рис. 6.11) против часовой стрелки.

Координаты произвольной элементарной площадки dA в повернутых осях z_1 , y_1 выразим через координаты z , y исходных осей:

$$z_1 = OD + DC = z \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$y_1 = BK - BD = y \cos \alpha - z \sin \alpha.$$

Подставляя координаты площадки в формулы (6.4-6.6), получим

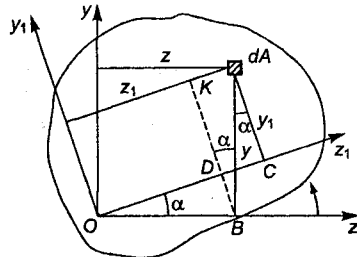


Рис. 6.11

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = \\ &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha; \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \\ &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha; \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} I_{z_1 y_1} &= \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA = \\ &= \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Сложим уравнения (6.26) и (6.27), найдем

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y.$$

Таким образом, при повороте осей сумма осевых моментов инерции остается постоянной. Эта сумма, согласно (6.8), равна полярному моменту инерции сечения относительно начала координат.

При повороте осей на угол $\alpha = 90^\circ$ центробежный момент инерции меняет знак:

$$I_{z_1 y_1} = -I_{zy}.$$

Так как центробежный момент инерции в зависимости от угла α изменяется непрерывно, то должно существовать такое положение осей, для которых центробежный момент равен нулю.

6.5. Главные оси и главные моменты инерции

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю и осевые моменты инерции достигают экстремальных значений (один момент инерции принимает максимальное, а другой – минимальное значения), называются **главными осями**, а осевые моменты инерции называются **главными моментами инерции**. Через любую точку сечения всегда можно провести две взаимно перпендикулярные главные оси.

Если начало координат совпадает с центром тяжести сечения, то главные оси называются **главными центральными осями**. Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей называются **главными центральными моментами инерции**.

Найдем значение угла α , при котором имеет место экстремум осевых моментов инерции. Для этого возьмем производную I_{z_1} по α и приравняем ее нулю:

$$\frac{dI_{z_1}}{d\alpha} = -2I_z \cos\alpha \sin\alpha + 2I_y \sin\alpha \cos\alpha - 2I_{zy} \cos 2\alpha = 0 \quad (6.29)$$

или

$$\frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha = 0.$$

Полученное уравнение равносильно $I_{z_1 y_1} = 0$.

Следовательно, если осевые моменты инерции имеют относительно осей максимальное или минимальное значение, то центробежный момент инерции относительно этих осей равен нулю, т.е. такие оси являются главными осями.

Решая уравнение (6.29) относительно угла α , получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}, \quad (6.30)$$

где обозначение α_0 принято для угла α , соответствующего главным осям.

Положительный угол α откладывается от оси z против хода часовой стрелки, отрицательный – по ходу часовой стрелки.

Необходимо отметить, что существует полное соответствие между соотношениями для моментов инерции плоских фигур при повороте осей и соотношениями для напряжений при повороте осей для плоского напряженного состояния, если в них произвести соответствующую замену величин. Поэтому все общие выводы, полученные в одном случае, можно целиком применить к другому случаю.

Формула (6.30) дает два значения угла α_1 и α_2 , отличающиеся на 90° , которые определяют положение двух взаимно перпендикулярных главных осей:

$$\alpha_1 = \alpha_0; \alpha_2 = \alpha_0 + 90^\circ.$$

Когда $I_z > I_y$, то положение главной оси, относительно которой осевой момент инерции имеет максимальное значение, определяется углом $\alpha_1 = \alpha_0$; когда $I_z < I_y$ – углом $\alpha_2 = \alpha_0 + 90^\circ$.

Значения I_{\max} и I_{\min} получим, подставив в формулу (6.26) величины углов $\alpha_1 = \alpha_2$:

$$I_{\max, \min} = I_z \cos^2 \alpha_{1,2} + I_y \sin^2 \alpha_{1,2} - I_{z,y} \sin 2\alpha_{1,2} \quad (6.31)$$

или подставив в формулы (6.26) и (6.27) величину угла α_1 .

Значения главных моментов инерции можно получить из (6.26) и (6.27), используя алгебраические преобразования известных тригонометрических формул, положив $\alpha = \alpha_0$:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}} = \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}}; \\ \sin 2\alpha_0 &= \operatorname{tg} 2\alpha_0 \cos 2\alpha_0 = -\frac{2I_{zy}}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}}; \\ \cos^2 \alpha_0 &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}}; \\ \sin^2 \alpha_0 &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные величины в (6.26) и (6.27), после простых преобразований получим

$$I_{\max, \min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}. \quad (6.32)$$

Главные центральные оси составного сечения, когда они по направлению не совпадают с принятыми (вспомогательными) осями координат, обычно обозначают так: ось, относительно которой осевой момент инерции имеет максимальное значение, - буквой v , а ось, относительно которой осевой момент инерции имеет минимальное значение, - буквой u .

В формуле (6.32) верхний знак «плюс» соответствует максимальному моменту инерции $I_{\max} = I_v$, а нижний знак «минус» - минимальному моменту инерции $I_{\min} = I_u$. Положение главной центральной оси v , соответствующей максимальному моменту инерции, связано со знаком центробежного момента. Если центробежный момент инерции относительно центральных осей z_c, y_c меньше нуля, $I_{z_c y_c} < 0$, то ось v проходит через I и III квадранты, а если $I_{z_c y_c} > 0$ - через II и IV квадранты. Знак центробежного момента легко проверяется визуально следующим способом (рис. 6.12).

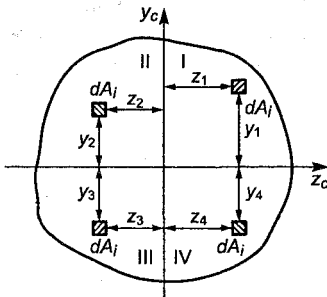


Рис. 6.12

После нанесения на чертеже центральных осей z_c и y_c необходимо мысленно представить себе на сечении в каждом квадранте элементарную площадку dA_i . Из рис. 6.12 следует, что в I квадранте обе координаты элементарной площадки положительны; во II и IV одна координата положительна, а другая отрицательна; в III квадранте обе координаты отрицательны. Тогда, согласно (6.6),

части площади, находящиеся в I и III квадрантах, имеют положительные центробежные моменты $I_{zy} > 0$; а части площади, расположенные во II и IV квадрантах, - отрицательные значения $I_{zy} < 0$. Сопоставляя суммарные площади в I и III квадрантах с суммарной площадью во II и IV квадрантах, делаем вывод о знаке центробежного момента всего сечения. Например, если

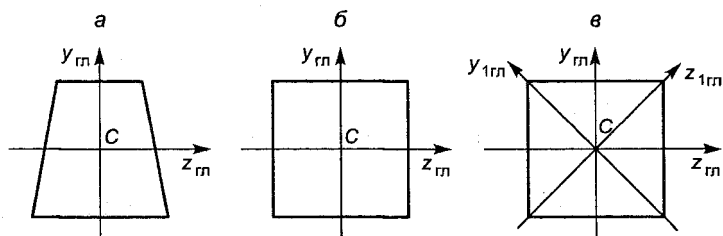


Рис. 6.13

суммарная площадь в I и III квадрантах больше, чем во II и IV, то для сечения $I_{zy} > 0$; если, наоборот, во II и IV больше, чем в I и III, то для сечения $I_{zy} < 0$.

Для сечений, имеющих оси симметрии, справедливы следующие положения:

а) если сечение имеет одну ось симметрии, то эта ось и ось перпендикулярная ей, проходящая через центр тяжести, являются главными центральными осями (рис. 6.13, а);

б) если сечение имеет две оси симметрии, то они обе будут главными центральными осями (рис. 6.13, б);

в) если сечение имеет три и более осей симметрии, то любая центральная ось является главной и все главные центральные моменты инерции будут равны (рис. 6.13, в).

Плоскости, проведенные через ось стержня и главные оси поперечных сечений, называются **главными плоскостями**.

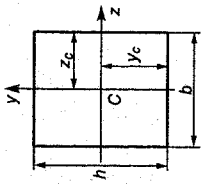
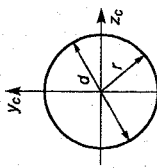
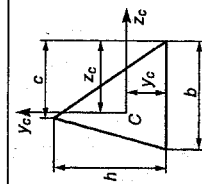
Площадь, положение центра тяжести и моменты инерции некоторых плоских сечений приведены в табл. 6.1.

Рекомендуется следующая последовательность нахождения положения главных осей и определения величин главных осевых моментов инерции плоских сечений.

Сложные сечения разбивают на простейшие геометрические фигуры (элементы) (прямоугольники, круги, треугольники и т.д.). Затем проводят произвольно вспомогательные координатные оси z , y , которые располагают так, чтобы они были параллельны центральным осям основных элементов сложного сечения и совпадали с его основным контуром. Используя формулы (6.13), определяют координаты центра тяжести всего сложного сечения относительно вспомогательных осей z , y и проводят центральные оси z_c , y_c параллельно вспомогательным осям. Для прокатных профилей координаты центров тяжести и все необходимые геометрические характеристики принимают

Таблица 6.1

Площади, координаты центров тяжести, моменты инерции некоторых плоских сечений

1	2	3	4	5	6	7
Форма сечения	Площадь	Координаты центра тяжести	I_z	I_y	I_{yz}	I_p
	$A = bh$	$z_c = \frac{b}{2};$ $y_c = \frac{h}{2}$	$I_{z_c} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{y_c} = \frac{hb^3}{12}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$
	$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$	$z_c = y_c = r$	$I_{z_c} = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_{z_c} = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$
	$A = \frac{1}{2}bh$	$z_c = \frac{b+c}{3};$ $y_c = \frac{h}{3}$	$I_{z_c} = \frac{bh^3}{36}$	$I_{y_c} = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$	$I_{z_c y_c} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c)$	$I_p = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc + c^2)$

1	2	3	4	5	6	7
<p> $d_1 = 2r_1$ $d_2 = 2r_2$ </p>	$A = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$	$z_c = y_c = r_1$	$I_{z_c} = \frac{\pi}{64}(d_1^4 - d_2^4) = \frac{\pi d_1^4}{32}(1 - c^4);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$	$I_{y_c} = \frac{\pi d_1^4}{64}(1 - c^4);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{\pi d_1^4}{32}(1 - c^4);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$
<p> $d = 2r$ </p>	$A = \frac{\pi d^2}{8}$	$y_c = \frac{4r}{3\pi};$ $z_c = r$	$I_{z_c} = 0,00686d^4 = 0,110r^4$	$I_{y_c} = \frac{\pi d^4}{128} = 0,025d^4$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = 0,03186d^4$
	$A = \frac{1}{2}bh$	$z_c = \frac{b}{3};$ $y_c = \frac{h}{3}$	$I_{z_c} = \frac{bh^3}{36}$	$I_{y_c} = \frac{bh^3}{36}$	$I_{z_c y_c} = \frac{b^2 h^2}{72}$	$I_p = \frac{bh}{18}(h^2 + b^2)$

1	2	3	4	5	6	7
	$A = \frac{1}{2}bh$	$z_c = \frac{b}{2};$ $y_c = \frac{h}{3}$	$I_{z_c} = \frac{bh^3}{36}$	$I_{y_c} = \frac{hb^3}{48}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2)$
	$A = b^2$	$z_c = y_c = \frac{b}{2}$	$I_{z_c} = \frac{b^4}{12}$	$I_{y_c} = \frac{b^4}{12}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{b^4}{6}$
	$A = b^2 - b_1^2$	$z_c = y_c = \frac{b}{2}$	$I_{z_c} = \frac{1}{12}(b^4 - b_1^4)$	$I_{y_c} = \frac{1}{12}(b^4 - b_1^4)$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{1}{6}(b^4 - b_1^4)$

из таблиц соответствующих сортаментов. Чтобы исключить возможные ошибки, связанные с неверным выбором табличных данных, внимательно сопоставляют расположение осей геометрических фигур на чертеже и в таблицах.

Используя формулы параллельного переноса осей, вычисляют осевые моменты I_{z_c} , I_{y_c} и центробежный момент $I_{z_c y_c}$ инерции относительно центральных осей z_c , y_c . Для элементов сечения, имеющих хотя бы одну ось симметрии, центробежный момент инерции относительно собственных центральных осей равен нулю.

Подставляя полученные значения I_{z_c} , I_{y_c} , $I_{z_c y_c}$ в формулу (6.30), вычисляют углы α_1 и α_2 , определяющие положение главных центральных осей v и u всего сечения.

Величины главных центральных осевых моментов инерции заданного сечения I_v и I_u определяют по формулам (6.26) и (6.27), используя значение угла $\alpha_1 = \alpha_0$. Правильность вычисления главных центральных моментов инерции проверяют по выполнению свойства инвариантности суммы осевых моментов инерции при повороте осей по формуле

$$I_{z_c} + I_{y_c} = I_v + I_u, \quad (6.33)$$

а также по условию равенства нулю центробежного момента инерции относительно главных центральных осей v и u :

$$I_{vu} = -\frac{I_{z_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_1 + I_{z_c y_c} \cos 2\alpha_1 = 0. \quad (6.34)$$

Погрешность не должна превышать 1–3 %.

Величины главных осевых моментов инерции I_v , I_u можно найти по формуле (6.32). В этом случае правильность вычислений данных величин проверяют путем определения величины центробежного момента инерции всего сечения относительно центральных осей z_c и y_c по формуле поворота осей (6.28), принимая главные оси v и u за исходные:

$$I_{z_c y_c} = \frac{I_v - I_u}{2} \sin 2\alpha_1. \quad (6.35)$$

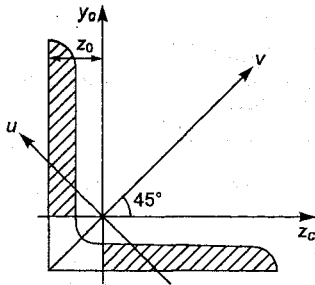


Рис. 6.14

Сравнение величины $I_{z_c y_c}$ с полученной ранее позволяет считать, что главные центральные моменты и положение главных центральных осей определены верно.

Пример 6.7. Определить центробежный момент инерции равнополочного уголка $140 \times 140 \times 10$ мм относительно центральных осей z_c , y_c , параллельных полкам уголка (рис. 6.14).

Решение. Выписываем все данные из сортамента прокатной стали для равнополочного уголка:

$$I_{z_c} = I_{y_c} = 512 \text{ см}^4; \quad b = 140 \text{ мм};$$

$$I_v = 814 \text{ см}^4; \quad I_u = 211 \text{ см}^4; \quad z_0 = 3,82 \text{ см}.$$

Принимаем в качестве исходных осей главные центральные оси v и u . Используя формулу (6.28) поворота осей, получим

$$I_{z_c y_c} = \frac{I_v - I_u}{2} \sin 2\alpha + I_{vu} \cos 2\alpha =$$

$$= \frac{814 - 211}{2} \sin 2(-45^\circ) = -301,5 \text{ см}^4.$$

В данном случае угол α подставляется в формулу со знаком минус, так как поворот осей v и u до совмещения с осями z_c и y_c производится по ходу часовой стрелки. Центробежный момент инерции I_{vu} равен нулю, поскольку оси v и u являются главными центральными осями. Правильность знака центробежного момента легко проверяется визуально. Из рис. 6.14 видно, что суммарная заштрихованная площадь во II и IV квадрантах системы координат z_c , y_c значительно больше незаштрихованной площади в III квадранте. Поэтому в данном случае $I_{z_c y_c} < 0$.

Пример 6.8. Определить центробежный момент инерции неравнополочного уголка $100 \times 63 \times 10$ мм относительно центральных осей z_c и y_c , параллельных полкам уголка (рис. 6.15).

Решение. Выписываем все необходимые данные из сортамента прокатной стали для неравнополочного уголка:

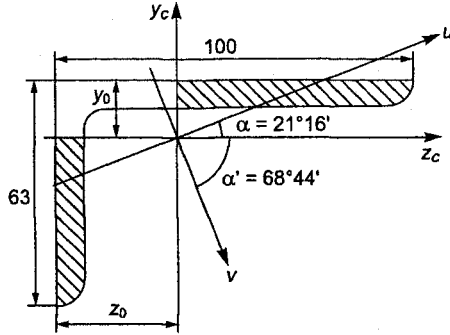


Рис. 6.15

$$I_{y_c} = 154 \text{ см}^4; \quad I_{z_c} = 47,1 \text{ см}^4;$$

$$z_0 = 3,4 \text{ см}; \quad y_0 = 1,58 \text{ см};$$

$$I_u = 28,3 \text{ см}^4; \quad \text{tg} \alpha = 0,387;$$

$$\alpha = 21^\circ 16'.$$

Принимаем за исходные оси v и u . Находим, используя формулу (6.33), значение I_v :

$$I_v = I_{z_c} + I_{y_c} - I_u = 47,1 + 154 - 28,3 = 172,8 \text{ см}^4.$$

По формуле для поворота осей получим

$$I_{z_c y_c} = \frac{I_v - I_u}{2} \sin 2\alpha' = \frac{172,8 - 28,3}{2} \sin 2(90 - 21^\circ 16') = 48,6 \text{ см}^4.$$

Визуально видно, что суммарная площадь заштрихованных частей сечения, расположенных в I и III квадрантах, больше части площади, находящейся во II квадранте. Поэтому центробежный момент инерции сечения относительно осей z_c, y_c будет положительным.

Пример 6.9. Для сечения, состоящего из двух уголков $80 \times 80 \times 8$ мм и $125 \times 80 \times 12$ мм, швеллера № 30 и прямоугольника 225×30 мм, определить положение главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции (рис. 6.16).

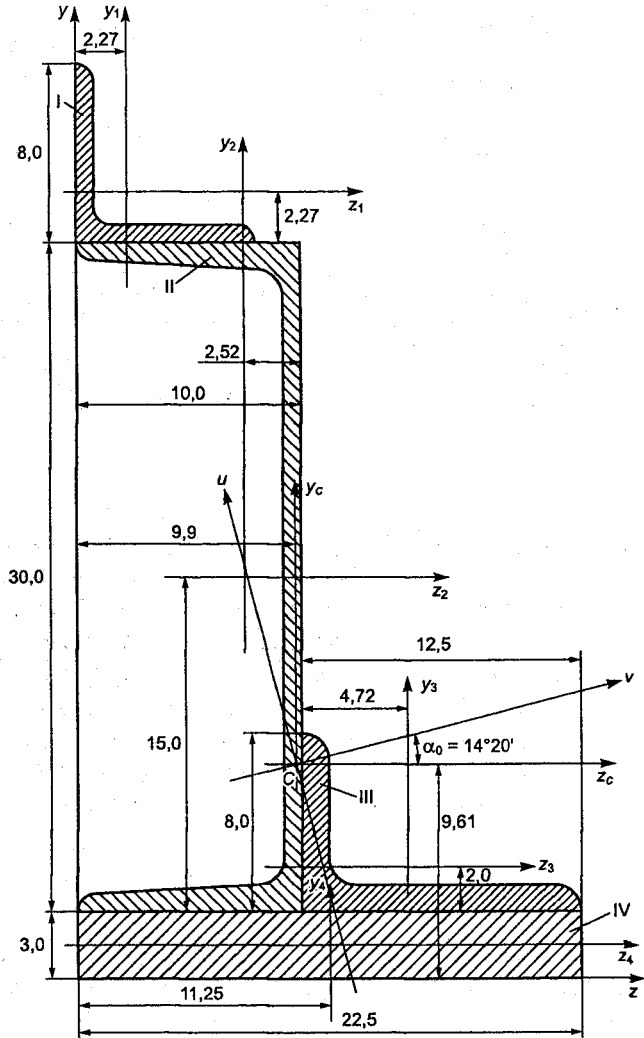


Рис. 6.16

Решение. Выбираем вспомогательные оси z, y , совпадающие с основным контуром сечения, и проставляем координаты центров тяжести всех элементов относительно выбранных осей. Проводим в каждом элементе сечения центральные оси параллельно осям z, y .

Выписываем для прокатных профилей необходимые геометрические характеристики из таблиц соответствующих сор-таментов.

Элемент I, уголок 80×80×8 мм:

$$A_1 = 12,3 \text{ см}^2; I_{z_1} = I_{y_1} = 73,4 \text{ см}^4.$$

Элемент II, швеллер № 30:

$$A_2 = 40,5 \text{ см}^2; I_{z_2} = 5810 \text{ см}^4; I_{y_2} = 327 \text{ см}^4.$$

Элемент III, уголок 125×80×12 мм:

$$A_3 = 23,4 \text{ см}^2; I_{z_3} = 117 \text{ см}^4; I_{y_3} = 365 \text{ см}^4;$$

Элемент IV, полоса 225×30 мм:

$$A_4 = 67,5 \text{ см}^2; I_{z_4} = \frac{22,5 \cdot 3^3}{12} = 50,625 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_4} = \frac{3,0 \cdot 22,5^3}{12} = 2847,66 \text{ см}^4.$$

Определяем координаты центра тяжести заданного сечения относительно вспомогательных осей z , y и проводим центральные оси z_c и y_c параллельно вспомогательным осям.

Координаты центров тяжести элементов сечения в осях z , y равны

$$z_1 = 2,27 \text{ см}; y_1 = 30 + 2,27 + 3 = 35,27 \text{ см};$$

$$z_2 = 10 - 2,52 = 7,48 \text{ см}; y_2 = 15 + 3 = 18 \text{ см};$$

$$z_3 = 10 + 4,22 = 14,22 \text{ см}; y_3 = 3 + 2 = 5 \text{ см};$$

$$z_4 = 11,25 \text{ см}; y_4 = 1,5 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{12,3 \cdot 35,27 + 40,5 \cdot 18 + 23,4 \cdot 5 + 67,5 \cdot 1,5}{12,3 + 40,5 + 23,4 + 67,5} = 9,61 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{12,3 \cdot 2,27 + 40,5 \cdot 7,48 + 23,4 \cdot 14,22 + 67,5 \cdot 11,25}{12,3 + 40,5 + 23,4 + 67,5} = 9,9 \text{ см}.$$

Вычисляем моменты инерции I_{z_c} , I_{y_c} , $I_{z_c y_c}$ всего сечения относительно центральных осей z_c , y_c .

Координаты центров тяжести каждого элемента относительно центральных осей z_c, y_c равны $a_i = z_i - z_c$; $b_i = y_i - y_c$.

$$a_1 = -(9,9 - 2,27) = -7,63 \text{ см}; \quad b_1 = 35,27 - 9,61 = 25,66 \text{ см};$$

$$a_2 = -(9,9 - 7,48) = -2,42 \text{ см}; \quad b_2 = 18 - 9,61 = 8,39 \text{ см};$$

$$a_3 = 14,22 - 9,9 = 4,32 \text{ см}; \quad b_3 = -(9,61 - 5) = -4,61 \text{ см};$$

$$a_4 = 11,25 - 9,9 = 1,35 \text{ см}; \quad b_4 = -(9,61 - 1,5) = -8,11 \text{ см}.$$

Вычисляем центробежные моменты инерции уголков относительно своих центральных осей z_i, y_i , пользуясь формулами поворота осей (рис. 6.17, 6.18). Оси v_1 и u_1 для уголка являются главными центральными осями, поэтому центробежный момент $I_{v_1 u_1} = 0$.

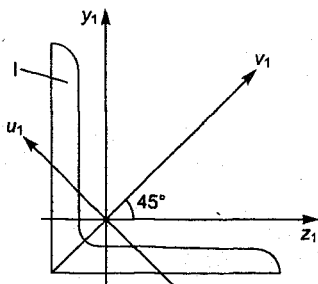


Рис. 6.17

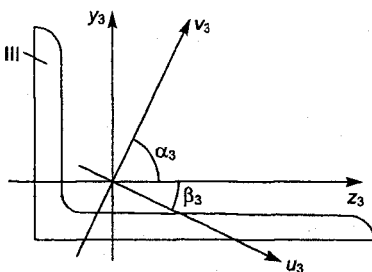


Рис. 6.18

Из таблиц сортамента

$$I_{v_1} = 116 \text{ см}^4;$$

$$I_{u_1} = 30,3 \text{ см}^4.$$

Тогда, используя формулу поворота осей, получим

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_{v_1} - I_{u_1}}{2} \sin 2\alpha = \frac{116 - 30,3}{2} \sin 2(-45^\circ) = -42,85 \text{ см}^4.$$

Оси v_3, u_3 - главные центральные оси инерции,

$$\operatorname{tg} \beta_3 = 0,4; \quad \beta_3 = 21^\circ 48'; \quad \alpha_3 = 90 - 21^\circ 48' = 68^\circ 12'.$$

Из таблиц сортамента

$$I_{u_3} = 69,5 \text{ см}^4.$$

Так как

$$I_{z_3} + I_{y_3} = I_{v_3} + I_{u_3},$$

то

$$I_{v_3} = I_{z_3} + I_{y_3} - I_{u_3} = 117 + 365 - 69,5 = 412,5 \text{ см}^4,$$

тогда

$$\begin{aligned} I_{z_3 y_3} &= \frac{I_{v_3} - I_{u_3}}{2} \sin 2(-\alpha_3) = \\ &= \frac{412,5 - 69,5}{2} \sin(-2 \cdot 68,12) = -118,34 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Пользуясь формулами параллельного переноса осей, находим:

$$\begin{aligned} I_{z_c} &= \sum (I_{z_i} + A_i b_i^2) = 73,4 + 12,3 \cdot 25,66^2 + 5810 + 40,5 \cdot 8,39^2 + \\ &+ 117 + 23,4 \cdot (-4,61)^2 + 50,625 + 67,5 \cdot (-8,11)^2 = 21937,58 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= \sum (I_{y_i} + A_i a_i^2) = 73,4 + 12,3 \cdot (-7,63)^2 + 327 + 40,5 \cdot (-2,42)^2 + \\ &+ 365 + 23,4 \cdot 4,32^2 + 2847,66 + 67,5 \cdot 1,35^2 = 5126,03 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c z_c} &= \sum (I_{z_i y_i} + A_i a_i b_i) = -42,85 + 12,3 \cdot (-7,63) \cdot (25,66) + 40,5 \cdot (-2,42) \times \\ &\times (8,39) - 118,34 + 23,4 \cdot 4,32 \cdot (-4,61) + 67,5 \cdot 1,35 \cdot (-8,11) = -4596,7 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Определяем положение главных центральных осей v, u :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{z_c y_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-4596,7)}{21937,58 - 5126,03} = 0,5468;$$

$$2\alpha_0 = 28^\circ 40'; \alpha_1 = \alpha_0 = 14^\circ 20'; \alpha_2 = \alpha_0 + 90^\circ = 104^\circ 20'.$$

Так как угол $\alpha_0 > 0$, то откладываем его против часовой стрелки от оси z_c и проводим главные центральные оси v, u . Поскольку $I_{z_c y_c} < 0$ и $I_{z_c} > I_{y_c}$, то ось v с максимальным моментом инерции будет определяться углом $\alpha_1 = \alpha_0 = 14^\circ 20'$ и пройдет через I и III квадранты.

Вычисляем величины главных центральных моментов инерции сечения, для чего подставим в формулы (6.26) и (6.27) значение угла $\alpha_1 = \alpha_0 = 14^\circ 20'$:

$$I_v = 21\,937,58 \cos^2 14^\circ 20' + 5\,126,03 \sin^2 14^\circ 20' + \\ + 4\,596,7 \sin 28^\circ 40' = 23\,119,2 \text{ см}^4;$$

$$I_u = 21\,937,58 \sin^2 14^\circ 20' + 5\,126,03 \cos^2 14^\circ 20' - \\ - 4\,596,7 \sin 28^\circ 40' = 3\,956 \text{ см}^4.$$

Проверяем правильность вычислений геометрических характеристик сечения по формулам (6.33) и (6.34):

$$I_{z_c} + I_{y_c} = I_v + I_u;$$

$$I_{z_c} + I_{y_c} = 21\,937,58 + 5\,126,03 = 27\,063,61 \text{ см}^4;$$

$$I_v + I_u = 23\,119,2 + 3\,956 = 27\,075,2 \text{ см}^4.$$

Расхождение $27\,075,2 - 27\,063,61 = 11,59 \text{ см}^4$. Погрешность:

$$\frac{11,59}{27\,063,61} 100 = 0,04\%;$$

$$I_{vu} = \frac{21\,937,58 - 5\,126,03}{2} \sin 28^\circ 40' - 4\,596,7 \cos 28^\circ 40' = \\ = 4\,033,09 - 4\,031,31 = 1,78 \text{ см}^4.$$

Погрешность:

$$\frac{1,78}{4\,031,31} 100 = 0,044\%,$$

что указывает на правильность решения.

Главные осевые моменты инерции можно также вычислить по формуле (6.32):

$$I_{\max, \min} = \frac{I_{z_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{z_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{z_c y_c}^2} = \\ = \frac{21\,937,59 + 5\,126,03}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(21\,937,59 - 5\,103)^2 + 4(-4\,596,7)^2} = \\ = 13\,531,81 \pm 9\,580,54;$$

$$I_v = I_{\max} = 23\,112,35 \text{ см}^4; \quad I_u = I_{\min} = 3\,951,27 \text{ см}^4.$$

Ранее найденные значения, $I_v=23\,119,2\text{ см}^4$; $I_u=3956\text{ см}^4$, отличаются незначительно.

Проведем проверку правильности вычисления геометрических характеристик сечения.

$$I_{z_c} + I_{y_c} = I_v + I_u;$$

$$I_{z_c} + I_{y_c} = 21\,937,58 + 5126,03 = 27\,063,61\text{ см}^4;$$

$$I_v + I_u = 23\,112,35 + 3951,27 = 27\,063,62\text{ см}^4.$$

Расхождений нет.

Определим величину центробежного момента инерции сечения относительно центральных осей z_c и y_c по формуле (6.35), принимая главные оси за исходные:

$$\begin{aligned} I_{z_c y_c} &= \frac{I_v - I_u}{2} \sin 2\alpha_0 = \frac{23\,112,35 - 3951,27}{2} \sin(-28^\circ 40') = \\ &= -4598,66\text{ см}^4. \end{aligned}$$

Расхождение составляет

$$4598,66 - 4596,7 = 1,96\text{ см}^4.$$

Погрешность:

$$\frac{1,96}{4596,7} 100 = 0,043\% ,$$

что указывает на правильность расчетов.

Таким образом, в обоих случаях расхождение в вычислении величин главных моментов инерции находится в пределах допускаемой ошибки.

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

7.1. Определение напряжений в поперечных сечениях стержня

Растяжением или сжатием называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только **нормальная сила**. Конструктивно приложение нагрузки к стержню может осуществляться различными способами (рис. 7.1, а).

Однако во всех случаях равнодействующая внешних сил, приложенных к стержню, будет направлена вдоль его оси, и расчетная схема для всех способов будет одинаковой (рис. 7.1, б).

Нормальная сила в любом сечении стержня легко определяется при помощи метода сечений, как это было показано ранее.

Рассмотрим ступенчатый стержень (рис. 7.2, а), находящийся под действием двух одинаковых сил F .

Используя метод сечений, определим нормальные силы N_1 и N_2 , действующие в сечениях I-I и II-II стержня. Из условия равновесия отсеченных частей найдем

$$N_1 = F \text{ и } N_2 = F. \quad (7.1)$$

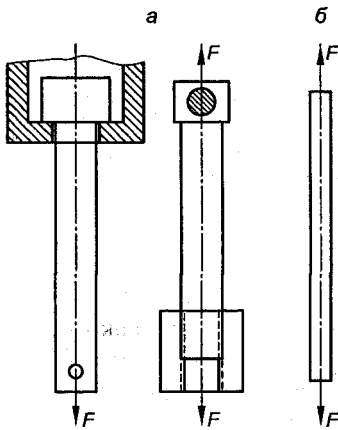


Рис. 7.1

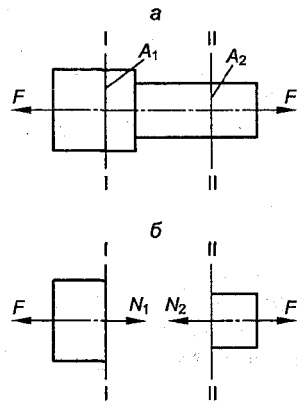


Рис. 7.2

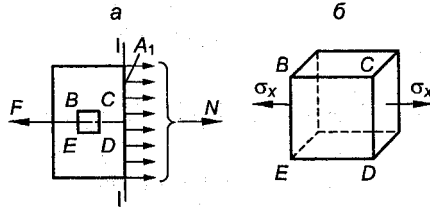


Рис. 7.3

Таким образом, во всех поперечных сечениях стержня возникает одинаковая нормальная сила N , равная внешней нагрузке F , независимо от изменения площади сечения:

$$N = F.$$

Одинаковая величина нормальных сил в сечениях I-I и II-II еще не указывает на то, что эти сечения равноопасны. Чтобы установить, какое сечение является более опасно нагруженным, необходимо перейти к определению напряжений, действующих в сечениях. Нормальная сила N является равнодействующей внутренних поверхностных сил в сечении (рис. 7.3, а).

Согласно гипотезе об однородности материала, естественно считать, что внутренние силы распределяются по сечению равномерно. Тогда нормальное напряжение в сечении стержня будет равно

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \quad (7.2)$$

В частном случае, когда стержень растягивается одинаковыми силами F , приложенными к концам стержня, $N = F$, и формулу (7.2) можно записать в виде

$$\sigma_x = \frac{F}{A}, \quad (7.2 \text{ а})$$

где A - площадь поперечного сечения стержня.

При растяжении нормальные напряжения считаются положительными, при сжатии - отрицательными. В формулу (7.2) нормальная сила должна подставляться со своим знаком.

Для ступенчатого стержня (см. рис. 7.2) по формуле (7.2 а) получим, что в первом сечении возникают напряжения

$$\sigma_{I-I} = \frac{F}{A_1},$$

а во втором сечении

$$\sigma_{II-II} = \frac{F}{A_2}.$$

Так как $A_1 > A_2$, то $\sigma_{II-II} > \sigma_{I-I}$ и, следовательно, второй участок более опасно нагружен, чем первый.

Выделим из растянутого стержня сечениями, параллельными и перпендикулярными оси, элемент $BCDE$ (рис. 7.3, б). Так как на гранях, перпендикулярных к оси, действуют только нормальные напряжения, а на гранях, параллельных оси, напряжения отсутствуют, то грани элемента будут главными площадками, а напряжение σ_x является главным напряжением. Следовательно, материал при растяжении (сжатии) испытывает линейное напряженное состояние.

Нормальные и касательные напряжения на площадках, наклоненных к оси стержня, определяются по формулам (2.30) – (2.33) для линейного напряженного состояния. Сечение, в котором действует максимальное напряжение, называется **опасным**. Для стержня постоянного поперечного сечения опасным будет являться сечение, в котором возникает наибольшая нормальная сила.

7.2. Определение перемещений сечений стержня

Рассмотрим стержень переменного сечения, растягиваемого силой F (рис. 7.4).

Выделим из стержня бесконечно малый элемент длиной dx . На его сечениях будут действовать одинаковые нормальные силы N_x , от которых элемент удлинится на величину Δdx .

Относительная продольная деформация элемента равна

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}. \quad (7.3)$$

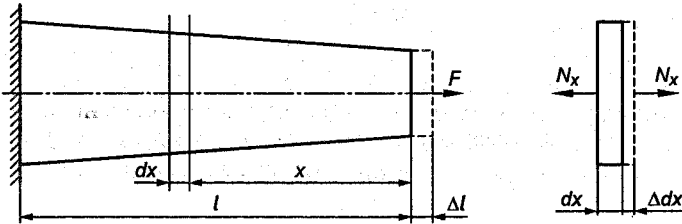


Рис. 7.4

Принимая удлинение элемента dx равным дифференциалу длины стержня, получим

$$\Delta(dx) = d(\Delta l) = \epsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx = \frac{N_x}{EA_{(x)}} dx, \quad (7.4)$$

где E - модуль продольной упругости материала; N_x - нормальная сила в сечении x ; $A_{(x)}$ - площадь поперечного сечения стержня в сечении x , являющаяся функцией координаты x .

Абсолютное удлинение стержня (перемещение конечного сечения) на длине l согласно (7.4) будет равно

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_x}{EA_{(x)}} dx. \quad (7.5)$$

При постоянных значениях N , A формула (7.5) принимает вид

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (7.6)$$

Когда стержень растягивается единственной силой F , приложенной к торцевому сечению стержня, то $N = F$ и формулу (7.6) можно записать таким образом:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}. \quad (7.7)$$

Из формулы (7.7) следует, что при постоянных нагрузке F и длине l удлинение стержня обратно пропорционально произведению EA . Чем это произведение больше, тем удлинение будет меньше, и наоборот. Поэтому произведение EA называется **жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии)**.

Если формулу (7.7) переписать в виде

$$\Delta l = \frac{F}{EA} = \frac{F}{C},$$

то удлинение стержня будет обратно пропорционально величине C . Чем больше величина C , тем при постоянной силе F удлинение стержня будет меньше. Поэтому выражение

$$C = \frac{EA}{l}$$

называется жесткостью стержня при растяжении (сжатии). Таким образом, удлинение прямо пропорционально растягивающей силе и обратно пропорционально жесткости стержня.

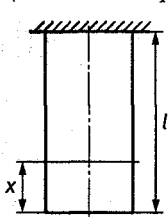


Рис. 7.5

Когда внешняя нагрузка представляет собой собственный вес стержня, то нормальная сила в сечении, расположенном на расстоянии x от свободного конца стержня, будет (рис. 7.5)

$$N_x = A\gamma x,$$

где A - площадь поперечного сечения; γ - удельный вес материала.

Подставляя N_x в (7.5) и принимая $A_{(x)} = A = \text{const}$, получим

$$\Delta l = \int_0^l \frac{A\gamma x}{EA} dx = \frac{A\gamma l^2}{2EA} = \frac{Gl}{2EA}, \quad (7.8)$$

где $G = A\gamma l$ - полный вес стержня.

Из (7.8) следует, что удлинение стержня, нагруженного собственным весом, равно удлинению стержня под действием его веса, приложенного посередине длины стержня.

Удлинение ступенчатых стержней, а также когда внешние силы приложены в разных точках продольной оси стержня, определяется суммированием удлинений отдельных участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i l_i}{E_i A_i} \right), \quad (7.9)$$

где N_i , l_i , E_i , A_i - соответственно нормальная сила, длина, модуль упругости и площадь поперечного сечения i -го участка.

7.3. Условие прочности и жесткости при растяжении и сжатии

Условие прочности выражает требование, чтобы максимальное расчетное напряжение в стержне не превышало значения допускаемого напряжения, и записывается в виде следующего неравенства:

$$\sigma_{x_{\max}} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (7.10)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение для заданного материала.

Условие жесткости выражает требование, чтобы расчетное удлинение стержня не превышало допустимого удлинения, и записывается в виде неравенства

$$\Delta l_{\max} \leq [\Delta l], \quad (7.11)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i l_i}{E_i A_i} \right) \leq [\Delta l], \quad (7.11 \text{ a})$$

где $[\Delta l]$ – допустимое удлинение, задаваемое техническими условиями.

Условия прочности и жесткости позволяют выполнить три вида расчетов.

1. Конструкторский, или проектный, расчет

В этом случае требуется по известным значениям внешней нагрузки, длине стержня, механическим характеристикам материала E , $[\sigma]$, $[\Delta l]$ подобрать размеры поперечного сечения:

$$A = \frac{N_{\max}}{[\sigma]}, \quad (7.12)$$

$$A = \frac{N_{\max} l}{E [\Delta l]}. \quad (7.13)$$

Из двух значений, полученных по формулам (7.12) и (7.13), выбирается большее.

2. Проверочный расчет

В этом случае все величины, входящие в формулы (7.2) и (7.6), известны и требуется проверить, выполняются ли условия прочности и жесткости (7.10) и (7.11).

3. Расчет грузоподъемности, или несущей способности

В этом случае известны геометрические размеры стержня, характеристики материала и требуется определить допустимую нагрузку

$$F_{\max} \leq A [\sigma]; \quad (7.14)$$

$$F_{\max} \leq \frac{EA [\Delta l]}{l}. \quad (7.15)$$

Из двух значений, найденных по формулам (7.14) и (7.15), принимается меньшее.

На практике, в зависимости от решаемой задачи, расчеты могут проводиться только по условию прочности или по условию жесткости.

Пример 7.1. Определить нормальные напряжения в поперечных сечениях каждого участка бруса (см. рис. 1.19).

Решение. Используя формулу (7.2), найдем

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A_1} = \frac{60 \cdot 10^3}{10} = -6000 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{30 \cdot 10^3}{10} = 3000 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{30 \cdot 10^3}{20} = 1500 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2};$$

$$\sigma_{IV} = \frac{N_4}{A_4} = \frac{10 \cdot 10^3}{20} = -500 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}.$$

Таким образом, максимальное напряжение возникает на первом участке, т. е. этот участок является наиболее нагруженным (опасным).

Пример 7.2. Построить эпюры изменения нормальных сил, напряжений и перемещений по длине ступенчатого бруса (рис. 7.6), нагруженного силами

$$F_1 = 20 \text{ кН}; F_2 = 40 \text{ кН}; l_1 = 0,4 \text{ м};$$

$$l_2 = 0,6 \text{ м}; l_3 = 0,5 \text{ м}; A_1 = A_2 = 10 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = 20 \text{ см}^2; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Решение. Реакцию в защемлении обозначим через B_x и определим ее величину из уравнения равновесия:

$$\sum F_x = B_x - F_2 - F_1 = 0;$$

$$B_x = F_1 + F_2 = 20 + 40 = 60 \text{ кН}.$$

Брус имеет три участка, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы и изменяются размеры поперечных сечений. Применяя метод сечений на каждом участ-

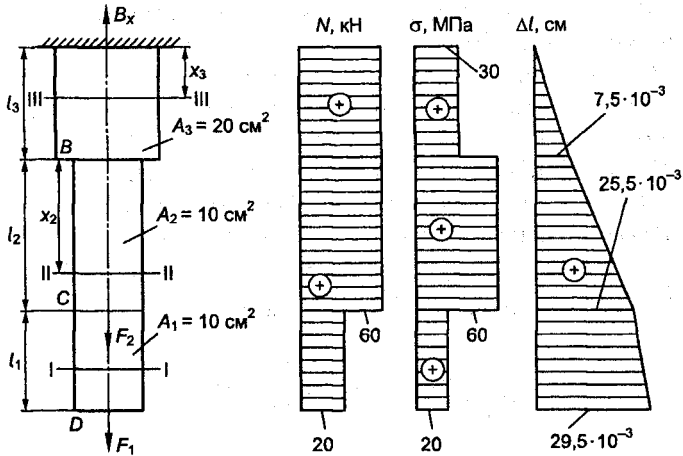


Рис. 7.6

ке, из уравнений равновесия, принимая нормальные силы в сечениях положительными, определим их величины:

$$N_1 - F_1 = 0, \quad N_1 = F_1 = 20 \text{ кН};$$

$$N_2 - F_1 - F_2 = 0, \quad N_2 = F_1 + F_2 = 20 + 40 = 60 \text{ кН};$$

$$N_3 - F_1 - F_2 = 0, \quad N_3 = F_1 + F_2 = 20 + 40 = 60 \text{ кН}.$$

По найденным значениям строим эпюру нормальных сил.

Находим нормальные напряжения в поперечных сечениях каждого участка:

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A_1} = \frac{20 \cdot 10^3}{10} = 20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{60 \cdot 10^3}{10} = 60 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{60 \cdot 10^3}{20} = 30 \text{ МПа}.$$

По полученным данным строим эпюру напряжений.

Эпюрой перемещений называется график, представляющий изменение перемещений поперечных сечений бруса вдоль оси. Поэтому, прежде чем находить перемещения сечений, необходи-

мо установить неподвижное сечение, принимаемое в дальнейшем за начало отсчета.

За начало отсчета в данном примере принимается сечение в заземлении.

Перемещение сечения III-III равно удлинению отрезка длиной x_3 . Согласно формуле (7.6), перемещение будет пропорционально x_3 , так как остальные величины на участке постоянны:

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 x_3}{EA_3}.$$

Следовательно, для построения эпюры перемещений достаточно найти перемещения характерных сечений, начиная от заземления:

$$\Delta l_B = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 50}{2 \cdot 10^7 \cdot 20} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Перемещение сечения II-II равно алгебраической сумме перемещения сечения B и удлинения отрезка длиной x_2 :

$$\Delta l_2 = \Delta l_B + \frac{N_2 x_2}{EA_2};$$

$$\Delta l_C = \Delta l_B + \frac{N_2 l_2}{EA_2} = 7,5 \cdot 10^{-3} + \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 60}{2 \cdot 10^7 \cdot 10} = 25,5 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Аналогично

$$\Delta l_D = \Delta l_C + \frac{N_1 l_1}{EA_1} = 25,5 \cdot 10^{-3} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 40}{2 \cdot 10^7 \cdot 10} = 29,5 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Пример 7.3. В некоторых случаях собственный вес конструкции соизмерим с внешними нагрузками и может вызывать значительные дополнительные напряжения, которые необходимо учитывать в расчетах, например при расчете колонн, длинных тросов, тег и т. д. Рассмотрим стальной стержень квадратного поперечного сечения, нагруженный силами собственного веса, и построим эпюры нормальных сил, напряжений и перемещений, если сторона квадрата $a = 10$ см, длина $l = 3$ м, удельный вес $\gamma = 0,078$ Н/см³, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^7$ МПа (рис. 7.7).

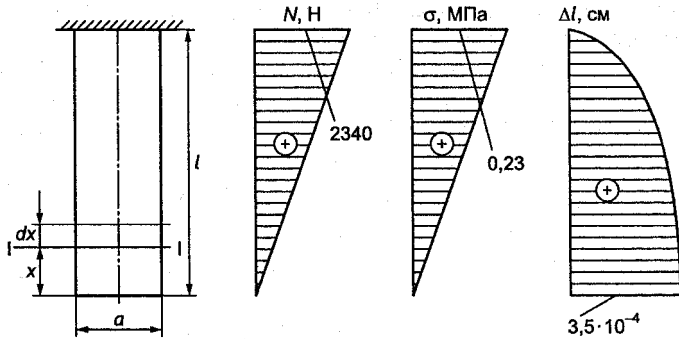


Рис. 7.7

Решение. Рассечем стержень сечением I-I на расстоянии x от свободного конца.

Нормальная сила N_x в сечении равна весу отсеченной части стержня:

$$N_x = A\gamma x.$$

Таким образом, нормальная сила в сечении увеличивается пропорционально расстоянию x . Эпюра нормальных сил будет линейной; для ее построения нужно положить $x = 0$ и $x = l$.

$$N_{x=0} = 0;$$

$$N_{x=l} = A\gamma l = 100 \cdot 0,078 \cdot 300 = 2340 \text{ Н.}$$

Эпюра показывает, что наибольшая нормальная сила действует в защемлении.

Нормальное напряжение в сечении I-I будет

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{A\gamma x}{A} = \gamma x.$$

Напряжение пропорционально расстоянию x и не зависит от площади поперечного сечения стержня. Эпюра нормальных напряжений будет линейной:

$$\sigma_{x=0} = 0; \sigma_{x=l} = \gamma l = 0,078 \cdot 300 = 23,4 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 0,234 \text{ МПа.}$$

Максимальное напряжение также действует в защемлении.

Перемещение сечения I-I равно удлинению верхнего участка стержня. Используя формулу (7.8), найдем

$$\Delta l = \int_x^l \frac{\gamma x}{E} dx = \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_x^l = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - x^2) = \frac{0,078}{2 \cdot 2 \cdot 10^7} (300^2 - x^2).$$

Следовательно, зависимость перемещения от длины представляет собой квадратичную функцию. Наибольшее перемещение будет на конце стержня при $x = 0$:

$$\Delta l_{\max} = \frac{0,078 \cdot 300^2}{2 \cdot 10^7} = 1,75 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Приведенный пример показывает, что если длина стержня невелика, то дополнительные напряжения и перемещения стержня от собственного веса незначительны и при расчетах ими можно пренебречь.

Пример 7.4. Определить предельную глубину, которую можно измерить с помощью стального каната диаметром 10 мм, если удельный вес каната $0,078 \text{ Н/см}^3$, а предел прочности 380 МПа.

Решение. Предельную длину каната найдем из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \gamma \cdot l_{\max} \leq [\sigma],$$

откуда

$$l_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\gamma} = \frac{38000}{0,078} = 487180 \text{ см} = 4872 \text{ м} = 4,9 \text{ км.}$$

Пример 7.5. Подобрать размеры поперечных сечений стержней фермы (рис. 7.8, а), нагруженной в узле В силой $F = 100 \text{ кН}$, а также перемещение узла В. Стержень BC стальной, круглого поперечного сечения, стержень BD стальной, квадратного сечения. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 16\,000 \text{ Н/см}^2$. При расчете считать, что устойчивость стержня BD обеспечена и он работает только на сжатие.

Решение. Мысленно вырежем сечениями узел В, введем внутренние усилия и составим уравнения равновесия (рис. 7.8, б):

$$\sum X = -N_{BC} + N_{BD} \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = N_{BD} \sin \alpha - F = 0.$$

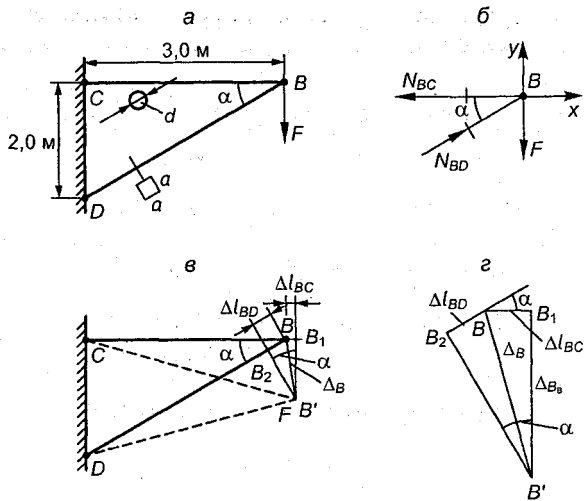


Рис. 7.8

Решив уравнения, найдем внутренние усилия N_{BD} и N_{BC} :

$$N_{BD} = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{100}{0,555} = 180,2 \text{ кН};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,0}{3,0} = 0,667; \alpha = 33,7^\circ; \sin \alpha = 0,555;$$

$$N_{BC} = N_{BD} \cos \alpha = 180,2 \cdot 0,832 = 150 \text{ кН}.$$

Таким образом, стержень BC растягивается, а стержень BD - сжимается.

Диаметр стержня BC найдем из условия прочности:

$$\frac{N_{BC}}{A_{BC}} \leq [\sigma],$$

где

$$A_{BC} = \frac{\pi \cdot d^2}{4};$$

откуда

$$d = \sqrt{\frac{4N_{BC}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 150 \cdot 1000}{3,14 \cdot 16000}} = 3,5 \text{ см}.$$

Размеры поперечного сечения стержня BD определим из условия прочности:

$$\frac{N_{BD}}{A_{BD}} \leq [\sigma],$$

где

$$A_{BD} = a^2;$$

откуда

$$a = \sqrt{\frac{N_{BD}}{[\sigma]}} = \sqrt{\frac{180,2 \cdot 1000}{16000}} = 3,4 \text{ см.}$$

Перемещение узла B найдем с помощью геометрического метода, для чего вычислим, используя закон Гука, абсолютные деформации стержней BC и BD , предполагая их свободными в точке B :

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{EA_{BC}} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 4}{2 \cdot 10^7 \cdot 3,14 \cdot 3,5^2} = 0,234 \text{ см;}$$

$$\Delta l_{BD} = \frac{N_{BD} l_{BD}}{EA_{BD}} = \frac{180,2 \cdot 10^3 \cdot 3,6 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^7 \cdot 3,4^2} = -0,281 \text{ см;}$$

$$l_{BD} = \frac{3,0}{\cos \alpha} = \frac{3,0}{0,832} = 3,6 \text{ м.}$$

Положение узла B после деформации стержней определится в результате построения деформированного треугольника по сторонам $l_{BC} + \Delta l_{BC}$ и $l_{BD} - \Delta l_{BD}$.

Стержень BC удлинился на величину Δl_{BC} , и концевое сечение переместилось в точку B_1 . Радиусом, равным CB_1 , проведем из точки C дугу окружности. Так как перемещения малы, то дугу можно заменить касательной, проведенной через B_1 перпендикулярно оси стержня BC (рис. 7.8, в).

Стержень BD укоротился на Δl_{BD} , и концевое сечение переместилось в точку B_2 . Заменяя дугу, описанную из точки D радиусом DB_2 , касательной, проведенной через B_2 перпендикулярно оси стержня BD , получим на пересечении перпендикуляров точку B' - новое положение узла B . Соединив точку B с B' , найдем перемещение Δ_B узла B . На рис. 7.8, в диаграмма пере-

мещений изображена в увеличенном масштабе. Диаграмму перемещений рекомендуется строить отдельно, как показано на рис. 7.8, з, из которого следует, что горизонтальная составляющая перемещения Δ_{B_r} узла B равна

$$\Delta_{B_r} = \Delta l_{BC} = 0,234 \text{ см.}$$

Вертикальную составляющую перемещения Δ_{B_v} узла B легко найти, воспользовавшись теоремой аналитической геометрии - *проекция замыкающей на любую ось равна алгебраической сумме проекций составляющих на ту же ось*. Принимая за ось проекций направление Δl_{BD} , получим

$$-\Delta l_{BD} = \Delta l_{BC} \cos \alpha - \Delta_{B_v} \sin \alpha;$$

откуда

$$\Delta_{B_v} = \frac{\Delta l_{BD} + \Delta l_{BC} \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{0,281 + 0,234 \cdot 0,832}{0,555} = 0,857 \text{ см.}$$

Знак Δl_{BD} учтен при построении диаграммы перемещений. Полное перемещение узла B будет равно

$$\Delta_B = \sqrt{\Delta_{B_r}^2 + \Delta_{B_v}^2} = \sqrt{0,234^2 + 0,857^2} = 0,888 \text{ см.}$$

Диаграммы перемещений являются важным средством определения перемещений узлов ферм. Они называются еще **диаграммами Виллио**, так как впервые были предложены французским инженером Д. В. Виллио в 1877 г.

Пример 7.6. Подобрать размеры круглых поперечных сечений стержней BC и CD , нагруженных в узле C силой $F=100$ кН (рис. 7.9, а). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 16\ 000$ Н/см². Определить также горизонтальное, вертикальное и полное перемещение узла C .

Решение. Вырежем узел C , введем внутренние силы и составим уравнения равновесия (рис. 7.9, б):

$$\sum X = -N_{CB} \sin 40^\circ + N_{CD} = 0;$$

$$\sum Y = N_{CB} \cos 40^\circ - F = 0.$$

Решая уравнения, получим

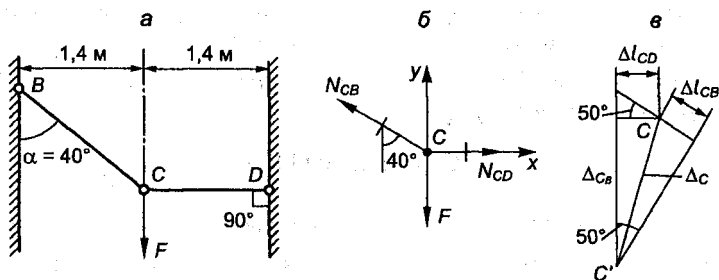


Рис. 7.9

$$N_{CB} = \frac{F}{\cos 40^\circ} = \frac{100}{0,766} = 130,5 \text{ кН};$$

$$N_{CD} = N_{CB} \sin 40^\circ = 130,5 \cdot 0,643 = 83,9 \text{ кН}.$$

Следовательно, оба стержня растягиваются.
Из условия прочности находим диаметры стержней.
Диаметр стержня *CB*

$$d_{CB} = \sqrt{\frac{4N_{CB}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 130,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 16000}} = 3,22 \text{ см}.$$

Диаметр стержня *CD*

$$d_{CD} = \sqrt{\frac{4N_{CD}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 83,9 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 16000}} = 2,58 \text{ см}.$$

Принимаем диаметры стержней $d_{CB} = 34 \text{ мм}$; $d_{CD} = 26 \text{ мм}$.

Для построения диаграммы перемещений определим абсолютные удлинения стержней:

$$\Delta l_{CB} = \frac{N_{CB} l_{CB}}{EA_{CB}} = \frac{130,5 \cdot 10^3 \cdot 2,18 \cdot 10^2 \cdot 4}{2 \cdot 10^7 \cdot 3,14 \cdot 3,4^2} = 0,157 \text{ см};$$

$$l_{CB} = \frac{1,4}{\sin 40^\circ} = \frac{1,4}{0,643} = 2,18 \text{ м};$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} l_{CD}}{EA_{CD}} = \frac{83,9 \cdot 10^3 \cdot 1,4 \cdot 10^2 \cdot 4}{2 \cdot 10^7 \cdot 3,14 \cdot 2,6^2} = 0,111 \text{ см}.$$

По удлинениям стержней строим диаграмму перемещений узла C (рис. 7.9, e).

Из рис. 7.9, e следует, что горизонтальная составляющая перемещения узла C равна

$$\Delta_{C_r} = \Delta l_{CD} = 0,111 \text{ см.}$$

Принимая за ось проекций направление Δl_{CB} , согласно приведенной теореме аналитической геометрии, получим

$$\Delta l_{CB} = -\Delta l_{CD} \cos 50^\circ + \Delta_{C_b} \sin 50^\circ.$$

Откуда

$$\Delta_{C_b} = \frac{\Delta l_{CB} + \Delta l_{CD} \cos 50^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{0,157 + 0,111 \cdot 0,643}{0,766} = 0,298 \text{ см.}$$

Полное перемещение узла будет равно

$$\Delta_C = \sqrt{\Delta_{C_r}^2 + \Delta_{C_b}^2} = \sqrt{0,111^2 + 0,298^2} = 0,318 \text{ см.}$$

7.4. Гибкие нити

Гибкой нитью называется тело постоянного поперечного сечения, у которого длина на несколько порядков больше поперечного размера (диаметра).

Вследствие большой длины нити способны сопротивляться только растяжению и не могут работать при других видах нагружения: изгибе, сжатии, кручении.

Следовательно, единственной внутренней силой в поперечных сечениях нити будет нормальная растягивающая сила. Отсюда происходит название нити - гибкая.

Элементы конструкций, приближающиеся по своим свойствам к гибкой нити, широко используются на практике в качестве канатов, тросов канатных дорог и других устройств. Наиболее характерным и массовым примером применения гибких нитей являются линии воздушных электропередач, провода телеграфных сетей, кабели, подвешенные между двумя неподвижными опорами, и др.

На практике точки подвеса нити могут располагаться на одинаковом или на разных уровнях (рис. 7.10, $a, б$).

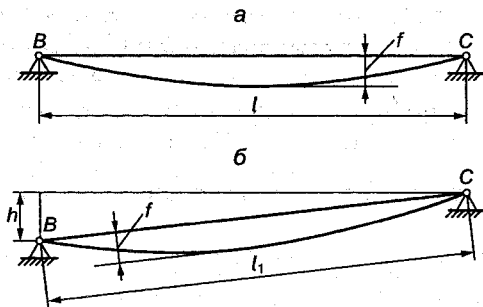


Рис. 7.10

Как теория, так и практика показывают, что натянуть провод точно по прямой нельзя: всегда под действием собственного веса нить удлиняется и провисает по некоторой кривой.

Обозначим: l_1 – расстояние между точками B и C подвеса нити; l – длина пролета, равная горизонтальной проекции расстояния между точками B и C подвеса нити; h – разность уровней точек подвеса нити; L – длина нити в свободном состоянии; f – расстояние по вертикали между прямой BC , соединяющей точки подвеса и проведенной параллельно касательной к кривой провисания нити. Если точки B и C находятся на одинаковом уровне, то f определяет наибольшее провисание нити в середине пролета и называется **стрелой провисания**; p – интенсивность нагрузки на единицу длины нити. В общем случае нагрузка p , кроме собственного веса, может дополнительно включать вес льда при обледенении проводов, давление ветра. Дополнительные нагрузки также считаются равномерно распределенными по длине нити.

Когда нагрузкой является собственный вес нити, интенсивность нагрузки равна

$$p = p_n = \rho g A = \gamma A, \quad (7.16)$$

где p_n – вес единицы длины провода; ρ – плотность материала; g – ускорение силы тяжести; A – площадь поперечного сечения; γ – удельный вес материала провода.

При обледенении проводов интенсивность нагрузки будет

$$p = p_n + p_{\text{л}}, \quad (7.17)$$

где $p_{\text{л}}$ - вес льда на единицу длины провода. В зависимости от климатической зоны толщина льда принимается от 0,5 до 1,5 см.

Нагрузки p_n и $p_{\text{л}}$ действуют в вертикальной плоскости. Давление ветра на провод проявляется в горизонтальной плоскости. Интенсивность ветровой нагрузки определяют, умножая давление ветра q на площадь диаметрального сечения единицы длины провода:

$$p_{\text{в}} = q \cdot d, \quad (7.18)$$

где d - диаметр провода с учетом его увеличения за счет обледенения.

Суммарная интенсивность нагрузки

$$p = \sqrt{(p_n + p_{\text{л}})^2 + p_{\text{в}}^2}, \quad (7.19)$$

а плоскость ее действия будет располагаться под некоторым углом β к вертикальной плоскости:

$$\text{tg} \beta = \frac{p_{\text{в}}}{p_n + p_{\text{л}}}.$$

Обычно провисание нити бывает небольшим и ее длина отличается от длины пролета не более, чем на 10 %. Поэтому для упрощения расчетов принимается, что нагрузка p равномерно распределена не по длине нити, а по длине пролета l .

Рассмотрим элемент нити длиной dS (рис. 7.11).

Нагрузка, действующая на элемент, равна $p dS$. Интенсивность этой нагрузки по длине горизонтальной проекции элемента

$$p' = \frac{p dS}{dx} = p \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dx} = p \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (7.20)$$

Из (7.20) следует, что чем меньше провисание нити, т.е. чем ближе нить к горизонту, тем меньше $(y')^2$ отличается от нуля, а длина нити отличается от длины пролета. Для пологих нитей отношение

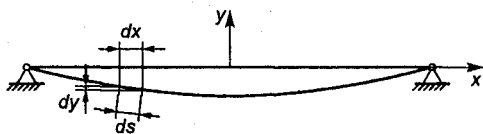


Рис. 7.11

$\frac{f}{l} \leq \frac{1}{5}$, поэтому величиной $(y')^2$ по сравнению с единицей можно пренебречь и с достаточной степенью точности считать

$$p' = p. \quad (7.21)$$

Рассмотрим пологую нить с точками подвеса, расположенными на одном уровне, принимая нагрузку p равномерно распределенной по длине горизонтальной проекции l нити (рис. 7.12, а).

Начало координат расположим в нижней точке O кривой провисания. Ось x направим горизонтально, а ось y - вертикально вверх. Выделим элемент нити OD и рассмотрим его равновесие как равновесие свободного тела (рис. 7.12, б).

Обозначим провисание нити на расстоянии x от начала координат через y .

Элемент нити OD находится в равновесии под действием вертикальной силы p_{OD} , представляющей равнодействующую распределенной нагрузки на участке x и растягивающих усилий H и N , направленных по касательной к кривой провисания. Три силы H , p_{OD} , N образуют замкнутый треугольник, из которого следует, что

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{p_{OD}}{H}. \quad (7.22)$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}. \quad (7.23)$$

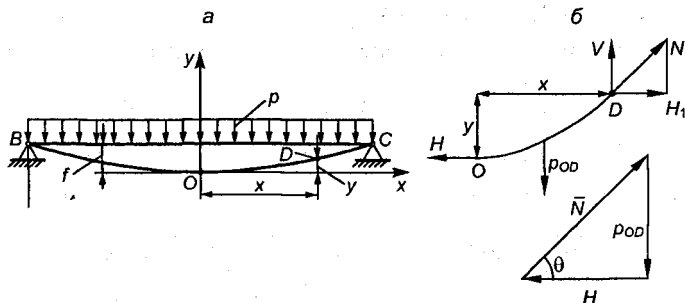


Рис. 7.12

Приравнявая (7.22) к (7.23) и учитывая, что $p_{OD} = p \cdot x$, получим дифференциальное уравнение нити в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p \cdot x}{H}. \quad (7.24)$$

Разлагая усилие N в точке D на составляющие V и H_1 , из уравнения проекций на ось x , найдем

$$H = H_1. \quad (7.25)$$

Таким образом, горизонтальная составляющая растягивающего усилия в любом поперечном сечении нити равна усилию H в точке O .

Интегрируя (7.24) и принимая во внимание, что усилие H не зависит от координаты x и одинаково во всех сечениях нити, а

значит, $\frac{p}{H} = \text{const}$, получим

$$y = \frac{p}{2H} x^2 + C. \quad (7.26)$$

Так как при $x=0, y=0$, то произвольная интегрирования $C=0$ и уравнение (7.26) примет вид

$$y = \frac{p}{2H} x^2. \quad (7.27)$$

Таким образом, при равномерном распределении нагрузки вдоль пролета кривая провисания нити представляет собой участок параболы с вертикальной осью.

Усилие N называется горизонтальным натяжением нити. Из силового треугольника (рис. 7.12) нормальная сила в произвольном сечении нити равна

$$N = \sqrt{H^2 + (px)^2}. \quad (7.28)$$

Из (7.28) следует, что наименьшее значение растягивающая нормальная сила N имеет в нижней точке O (при $x=0$), а наибольшее - в сечении подвеса нити (при $x = \pm \frac{l}{2}$).

Подставляя в (7.27) значение $x = \frac{l}{2}$, получим

$$y_{\max} = f = \frac{p}{2H} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{pl^2}{8H}. \quad (7.29)$$

Откуда горизонтальное натяжение нити

$$H = \frac{pl^2}{8f}. \quad (7.30)$$

Наибольшее значение растягивающей нормальной силы N_{\max} определим по формуле (7.28):

$$\begin{aligned} N_{\max} &= \sqrt{H^2 + \frac{p^2 l^2}{4}} = \sqrt{\frac{p^2 l^4}{64 f^2} + \frac{p^2 l^2}{4}} = \frac{pl^2}{8f} \sqrt{\frac{16f^2}{l^2} + 1} = \\ &= H \sqrt{\frac{16f^2}{l^2} + 1} = H \left(1 + \frac{8f^2}{l^2} \right) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Для пологих нитей различие между максимальным и минимальными значениями растягивающего усилия невелико и, как показывают расчеты, не превышает 3 %.

Отсюда с достаточной для практики точностью можно считать растягивающее усилие в нити постоянным, равным величине горизонтального натяжения H . По величине H производится расчет нити на прочность.

Условие прочности для нити запишется в виде

$$\sigma = \frac{H}{A} \leq [\sigma], \quad (7.32)$$

или

$$\sigma = \frac{pl^2}{8fA} \leq [\sigma], \quad (7.33)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение на растяжение нити.

В процессе эксплуатации провода подвергаются воздействию различных нагрузок и изменению температуры, вызывающих изменение их длины и натяжения.

Связь между длиной L подвешенной нити, пролетом l и стрелой провисания f найдем, используя уравнение кривой провисания (7.27).

Длина элемента кривой равна

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Отсюда

$$S = \int_l \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (7.34)$$

Подставляя в (7.34) $\frac{dy}{dx}$ из уравнения (7.24) и интегрируя по всей длине пролета, получим

$$S = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{p^2 x^2}{H^2} \right] dx = l + \frac{8 f^2}{3 l}. \quad (7.35)$$

Удлинение нити длиной L после подвески будет

$$\Delta L = S - L = l + \frac{8 f^2}{3 l} - L. \quad (7.36)$$

Удлинение нити равно сумме упругого удлинения от растяжения силой H и температурного удлинения от изменения температуры:

$$\Delta L = \Delta l_{\text{упр}} + \Delta l_t. \quad (7.37)$$

Упругое удлинение, согласно закону Гука, равно

$$\Delta l_{\text{упр}} = \frac{H \cdot l}{EA}, \quad (7.38)$$

где E - продольный модуль упругости материала проволоки.

Температурное удлинение нити

$$\Delta l_t = \alpha l (t - t_0), \quad (7.39)$$

где α – коэффициент температурного линейного расширения; t_0, t – соответственно температура в начальный момент и температура, для которой производится расчет.

Подставляя значения $\Delta l_{\text{упр}}$ и Δl_t в (7.37), найдем суммарное изменение исходной длины нити:

$$\Delta L = \frac{H \cdot l}{EA} + \alpha l(t - t_0). \quad (7.40)$$

Приравнявая правые части выражений (7.36) и (7.40), получим начальную длину провода до подвешивания:

$$L = l + \frac{8 f^2}{3 l} - \frac{Hl}{EA} - \alpha l(t - t_0). \quad (7.41)$$

Подставляя в (7.41) выражение для стрелы провисания и вводя понятие удельной нагрузки $\bar{\gamma}$, представляющей отношение интенсивности нагрузки p к площади поперечного сечения провода ($\bar{\gamma} = \frac{p}{A}$), а также учитывая, что отношение натяжения H к площади провода равно напряжению в проводе, получим

$$L = l + \frac{\bar{\gamma}^2 l^3}{24 \sigma^2} - \sigma \frac{l}{E} - \alpha l(t - t_0). \quad (7.42)$$

В случае если нагрузкой является собственный вес нити, то удельная нагрузка будет равняться удельному весу материала нити.

При расчете проводов учитывают их два состояния: при монтаже и при эксплуатации.

Пусть в первом состоянии температура равна t_1 , удельная нагрузка $\bar{\gamma}_1$ и напряжение σ_1 ; во втором состоянии, соответственно, $t_2, \bar{\gamma}_2, \sigma_2$. Величины $t_1, \bar{\gamma}_1, t_2, \bar{\gamma}_2$ принимаются известными, так как могут быть измерены или установлены по климатическим условиям. Считается, что для худших условий эксплуатации напряжения в нити не должны превышать допустимого значения $\sigma_2 \leq [\sigma]$. Подставляя параметры обоих состояний в (7.42) и приравнявая полученные выражения, так как они определяют одну величину – длину нити L к моменту подвеса, будем иметь

$$\frac{\bar{\gamma}_1^2 l^2 E}{24\sigma_1^2} - \sigma_1 = \frac{\bar{\gamma}_2^2 l^2 E}{24[\sigma]^2} - [\sigma] + \alpha E(t_1 - t_2). \quad (7.43)$$

Обозначая известные величины через

$$B_1 = \frac{\bar{\gamma}_1^2 l^2 E}{24}; \quad B_2 = \frac{\bar{\gamma}_2^2 l^2 E}{24}; \quad D = \frac{B_2}{[\sigma]^2} - [\sigma] + \alpha E(t_1 - t_2),$$

запишем уравнение (7.43) в виде

$$\frac{B_1}{\sigma_1^2} - \sigma_1 = D. \quad (7.44)$$

Уравнение (7.44) называется **уравнением состояния провода**. Оно обычно решается графическим способом. Уравнение имеет один действительный и два мнимых корня.

При графическом решении уравнение (7.44) записывается в виде

$$\frac{B_1}{\sigma_1^2} = \sigma_1 + D. \quad (7.44 \text{ а})$$

В прямоугольных координатах y и σ строим графики $y_1 = \frac{B_1}{\sigma_1^2}$ и $y_2 = \sigma_1 + D$ (рис. 7.13).

Абсцисса точки пересечения графиков представляет искомый корень уравнения.

Определив σ_1 , находят необходимую стрелу провисания провода при монтаже:

$$f_{\text{монт}} = \frac{\bar{\gamma}_1 l^2}{8\sigma_1}. \quad (7.45)$$

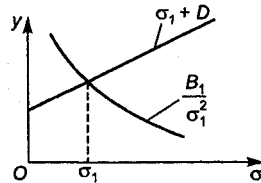


Рис. 7.13

Стрела провисания при эксплуатации будет

$$f_{\text{экспл}} = \frac{\bar{\gamma}_2 l^2}{8[\sigma]}. \quad (7.46)$$

Полученные уравнения позволяют решать задачи в случае, если провод изготовлен из одного материала, например меди, алюминия, стали и т. д.

7.5. Расчет биметаллических проводов

Биметаллический провод состоит из двух частей, имеющих разные механические характеристики. В этом случае для решения задачи требуется определить приведенные механические характеристики $\alpha_{\text{пр}}$, $E_{\text{пр}}$, $\sigma_{\text{впр}}$ биметаллического провода, а также $\bar{\gamma}_{\text{пр}}$ - приведенную удельную нагрузку. Например, биметаллический провод AC состоит из стального троса-сердечника и алюминиевой оплетки.

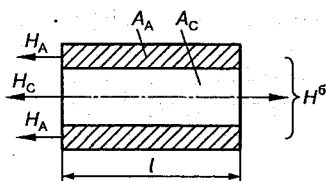


Рис. 7.14

Расчетной схемой такой статически неопределимой системы будет совокупность двух цилиндров - пустотелого алюминиевого площадью сечения A_A и стального сердечника площадью сечения A_C (рис. 7.14).

Напишем уравнение равновесия провода

$$H^6 = H_A + H_C \quad (7.47)$$

и уравнение совместности деформаций, учитывая, что оба материала деформируются одинаково:

$$\epsilon_A = \epsilon_C = \epsilon^6, \quad (7.48)$$

где ϵ^6 - общая, совместная деформация материала.

В каждом материале возникают разные напряжения σ_A и σ_C :

$$H_A = \sigma_A \cdot A_A; \quad H_C = \sigma_C \cdot A_C.$$

Отсюда

$$H^6 = \sigma_A \cdot A + \sigma_C \cdot A_C.$$

Введем понятие приведенного, или фиктивного, напряжения $\sigma_{\text{пр}}$, равного отношению общего натяжения H^6 к общей площади сечения $A^6 = A_A + A_C$:

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{H^6}{A^6} = \frac{\sigma_A \cdot A_A + \sigma_C \cdot A_C}{A_A + A_C}. \quad (7.49)$$

Уравнение (7.49) справедливо до пределов прочности материала частей провода, поэтому приведенный предел прочности биметаллического провода можно определить как

$$\sigma_{\text{впр}} = \frac{\sigma_{\text{вА}} \cdot A_A + \sigma_{\text{вС}} \cdot A_C}{A_A + A_C}, \quad (7.50)$$

где $\sigma_{\text{вА}}$ и $\sigma_{\text{вС}}$ - соответственно пределы прочности алюминия и стали.

Принимая значение коэффициентов безопасности n_6 , найдем величину допускаемого напряжения для биметаллического провода:

$$[\sigma_{\text{впр}}] = \frac{\sigma_{\text{впр}}}{n_6}. \quad (7.51)$$

На основании закона Гука уравнение совместности деформаций (7.47) запишется в виде

$$\varepsilon^6 = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{E_{\text{пр}}} = \frac{\sigma_A}{E_A} = \frac{\sigma_C}{E_C}. \quad (7.52)$$

Из (7.52) получим

$$\sigma_A = \sigma_{\text{пр}} \frac{E_A}{E_{\text{пр}}}; \quad \sigma_C = \sigma_{\text{пр}} \frac{E_C}{E_{\text{пр}}}. \quad (7.53)$$

Уравнение (7.53) показывает, что напряжения в составных частях провода прямо пропорциональны модулю упругости материалов частей. Следовательно, напряжения в стальном тросе будет выше, чем в алюминиевой оплетке.

Подставляя (7.53) в (7.49), найдем усредненный модуль упругости биметаллического провода:

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{\sigma_{\text{пр}} \frac{E_A}{E_{\text{пр}}} + \sigma_{\text{пр}} \frac{E_C}{E_{\text{пр}}}}{A_A + A_C} = \frac{\sigma_{\text{пр}} A_A E_A + \sigma_{\text{пр}} A_C E_C}{E_{\text{пр}} (A_A + A_C)},$$

или

$$E_{\text{пр}} = \frac{A_A E_A + A_C E_C}{A_A + A_C}. \quad (7.54)$$

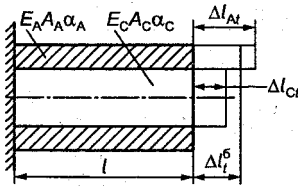


Рис. 7.15

Для определения приведенного коэффициента температурного линейного удлинения рассмотрим ненапряженный участок биметаллического провода длиной l при нагревании на Δt^0 (рис. 7.15).

Уравнение перемещений для системы имеет вид

$$\Delta l_t^{\delta} = \Delta l_{A_t} = \Delta l_{C_t}. \quad (7.55)$$

Если бы алюминиевый цилиндр при нагреве был свободен, то он удлинился бы на величину

$$\Delta l_{A_t} = \alpha_A l \Delta t. \quad (7.56)$$

Стальной стержень в свободном состоянии удлинился бы на величину

$$\Delta l_{C_t} = \alpha_C l \Delta t. \quad (7.57)$$

Так как $\alpha_A > \alpha_C$, то увеличение температуры вызовет удлинение стального сердечника и укорочение алюминиевого цилиндра равными и противоположно направленными силами, действующими в стали и алюминии:

$$N_C = -N_A.$$

Отсюда удлинение биметаллического провода, удлинения алюминия и стали при изменении температуры будут определяться следующими выражениями:

$$\Delta l_t^{\delta} = \alpha_{\text{пр}} l \Delta t; \quad (7.58)$$

$$\Delta l_{A1} = \alpha_A l \Delta t - \frac{N_A l}{E_A A_A}; \quad (7.59)$$

$$\Delta l_C = \alpha_C l \Delta t + \frac{N_C l}{E_C A_C}. \quad (7.60)$$

Приравняв правые части выражений (7.58) и (7.59); (7.58) и (7.60), согласно уравнению (7.55) получим

$$(\alpha_{\text{пр}} - \alpha_A) \Delta t = -\frac{N_A}{E_A A_A}; \quad (7.61)$$

$$(\alpha_{\text{пр}} - \alpha_C) \Delta t = -\frac{N_C}{E_C A_C}. \quad (7.62)$$

Рассмотрим отношения (7.61) и (7.62), учитывая, что $N_C = N_A$:

$$\frac{\alpha_{\text{пр}} - \alpha_A}{\alpha_{\text{пр}} - \alpha_C} = -\frac{E_C A_C}{E_A A_A}. \quad (7.63)$$

Из (7.63) определим

$$\alpha_{\text{пр}} = \frac{E_A A_A \alpha_A + E_C A_C \alpha_C}{E_A A_A + E_C A_C}. \quad (7.64)$$

Найдем приведенную удельную нагрузку $\bar{\gamma}_{\text{пр}}$ биметаллического провода. Для участка провода длиной l (см. рис. 7.15) справедливо выражение

$$A_A \cdot \gamma_A \cdot l + A_C \cdot \gamma_C \cdot l = \bar{\gamma}_{\text{пр}} l (A_A + A_C).$$

Откуда

$$\bar{\gamma}_{\text{пр}} = \frac{A_A \gamma_A + A_C \gamma_C}{A_A + A_C}. \quad (7.65)$$

Используя найденные обобщенные характеристики биметаллического провода $\alpha_{\text{пр}}$, $E_{\text{пр}}$, $\sigma_{\text{пр}}$, по уравнению состояния (7.43) определяется общее напряжение σ_1^{δ} и натяжение H_1^{δ} в первом состоянии:

$$H_1^{\delta} = \sigma_1^{\delta} (A_A + A_C). \quad (7.66)$$

Заменяя в уравнении (7.52) напряжение σ_A и σ_C через внутренние силы H_A и H_C , получим

$$\frac{H_A}{E_A A_A} = \frac{H_C}{E_C A_C}. \quad (7.67)$$

Из уравнения (7.67) следует, что внутренние силы в составных частях провода прямо пропорциональны жесткостям соответствующих сечений.

Решая совместно (7.46) и (7.67), найдем натяжение в алюминии и стали в первом состоянии:

$$H_{1A} = H_{1C} \frac{E_A A_A}{E_C A_C}; \quad H_1^{\delta} = H_{1C} \frac{E_A A_A}{E_C A_C} + H_{1C} = H_{1C} \left(\frac{E_A A_A}{E_C A_C} + 1 \right).$$

Откуда

$$H_{1C} = \frac{H_1^{\delta}}{\frac{E_A A_A}{E_C A_C} + 1} = H_1^{\delta} \left(\frac{E_C A_C}{E_A A_A + E_C A_C} \right); \quad (7.68)$$

$$H_{1A} = H_1^{\delta} \left(\frac{E_A A_A}{E_A A_A + E_C A_C} \right) \quad (7.69)$$

Так как внутренние усилия в частях провода пропорциональны жесткостям сечений этих частей, то представляет интерес установить условия, при которых натяжение в алюминиевой части провода будет больше, чем в стальной.

Из (7.67) следует, что

$$\frac{H_A}{H_C} = \frac{E_A A_A}{E_C A_C} > 1,0.$$

Когда $E_A A_A > E_C A_C$, то

$$\frac{A_A}{A_C} > \frac{E_C}{E_A}. \quad (7.70)$$

Принимая $E_C = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$; $E_A = 0,7 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$, получим

$$\frac{A_A}{A_C} > \frac{2 \cdot 10^7}{0,7 \cdot 10^7} \approx 3, \text{ или } A_A > 3 A_C.$$

Таким образом, если площадь сечения алюминия превышает площадь сечения стали более чем в 3 раза, то сила натяжения в алюминиевой части будет больше силы натяжения в стальной части.

Обычно на практике $A_A = (3-9)A_C$, т. е. условие выполняется. Следовательно, повреждение алюминиевой оплетки провода может явиться причиной аварии воздушной линии электропередачи.

Пример 7.7. Выполнить механический расчет биметаллического провода. Определить стрелы провисания при монтаже в летних условиях и при эксплуатации в зимних. Определить натяжение провода и напряжение в стали и алюминии, а также фактические коэффициенты безопасности стали и алюминия. Исходные данные приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Материал		$E, \text{ Н/см}^2$	$\gamma, \text{ Н/см}^3$	$\alpha_t, \text{ 1/град}$	$\sigma_b, \text{ Н/см}^2$	Коэффициент безопасности
Алюминий		$0,7 \cdot 10^7$	0,027	$23 \cdot 10^{-6}$	20 000	
Сталь		$2,0 \cdot 10^7$	0,078	$125 \cdot 10^{-6}$	80 000	
$A, \text{ мм}^2$	$l, \text{ м}$	$t_1, \text{ }^\circ\text{C}$	$t_2, \text{ }^\circ\text{C}$	$\frac{A_A}{A_C}$	$\frac{\bar{\gamma}_{\text{пр}2}}{\bar{\gamma}_{\text{пр}1}}$	n_6
442	200	30	-20	7,5	3	2

Решение. Находим площадь стали и алюминия в проводе:

$$A = A_A + A_C;$$

$$A_C = \frac{A}{1 + \frac{A_A}{A_C}} = \frac{4,42}{1 + 7,5} = 0,52 \text{ см}^2; A_A = 4,42 - 0,52 = 3,9 \text{ см}^2.$$

Определяем приведенные удельные нагрузки для обоих состояний:

$$\bar{\gamma}_{\text{пр}_1} = \frac{\gamma_A A_A + \gamma_C A_C}{A_A + A_C} = \frac{0,027 \cdot 3,9 + 0,078 \cdot 0,52}{3,9 + 0,52} = 0,033 \text{ Н/см}^3;$$

$$\bar{\gamma}_{\text{пр}_2} = \bar{\gamma}_{\text{пр}_1} \cdot 3 = 0,033 \cdot 3 = 0,099 \text{ Н/см}^3.$$

Приведенный предел прочности провода

$$\sigma_{\text{впр}} = \frac{\sigma_B^A A_A + \sigma_B^C A_C}{A_A + A_C} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 3,9 + 8 \cdot 10^4 \cdot 0,52}{3,9 + 0,52} = 27059 \text{ Н/см}^2.$$

Допускаемое напряжение при $n_6 = 2$:

$$[\sigma_{\text{впр}}] = \frac{\sigma_{\text{впр}}}{n_6} = \frac{27059}{2} = 13530 \text{ Н/см}^2.$$

Находим приведенный модуль упругости

$$E_{\text{пр}} = \frac{E_A A_A + E_C A_C}{A_A + A_C} = \frac{0,7 \cdot 10^7 \cdot 3,9 + 2 \cdot 10^7 \cdot 0,52}{3,9 + 0,52} = 0,85 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2.$$

Приведенный коэффициент температурного расширения

$$\alpha_{\text{пр}} = \frac{E_A \alpha_A A_A + E_C \alpha_C A_C}{E_A A_A + E_C A_C} =$$

$$= \frac{0,7 \cdot 10^7 \cdot 23 \cdot 10^{-6} \cdot 3,9 + 2 \cdot 10^7 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,52}{0,7 \cdot 10^7 \cdot 3,9 + 2 \cdot 10^7 \cdot 0,52} = 20,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град.}$$

Определяем коэффициенты уравнения состояния:

$$B_1 = \frac{E_{\text{пр}} \cdot \bar{\gamma}_{\text{пр}_1}^2 \cdot l^2}{24} = \frac{0,85 \cdot 10^7 \cdot 0,033^2 \cdot 20000^2}{24} = 15,4 \cdot 10^{10} \left(\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \right)^3;$$

$$B_2 = B_1 \left(\frac{\bar{\gamma}_{\text{пр}_2}}{\bar{\gamma}_{\text{пр}_1}} \right)^2 = 15,4 \cdot 10^{10} \cdot 3^2 = 138,6 \cdot 10^{10} \left(\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \right)^3.$$

Вычисляем величину D для уравнения состояния, принимая

$$\sigma_2 = [\sigma_{\text{впр}}]:$$

$$D = \frac{B_2}{[\sigma_{\text{впр}}]^2} - [\sigma_{\text{впр}}] \nu + \alpha_{\text{пр}} E_{\text{пр}} (t_1 - t_2) = \frac{138,6 \cdot 10^{10}}{13530^2} - 13530 +$$

$$+ 0,85 \cdot 10^7 \cdot 20,1 \cdot 10^{-6} (30 + 20) = 2583,6 \text{ Н/см}^2.$$

Уравнение состояния провода имеет вид

$$\frac{15,4 \cdot 10^{10}}{\sigma_1^2} - \sigma_1 = 2583,6.$$

Решая уравнение методом подбора, получим

$$\sigma_1 = 4620 \text{ Н/см}^2.$$

Таким образом, при подвеске провода в летних условиях напряжение σ_1 не должно превышать значения $\sigma_1 = 4620 \text{ Н/см}^2$.

Тогда в зимних условиях оно достигнет величины $\sigma_2 = [\sigma_{\text{впр}}]$ и тем самым для биметаллического провода будет обеспечен коэффициент безопасности $n_6 = 2,0$.

Найдем стрелы провисания провода при монтаже в летних условиях и при эксплуатации в зимних:

$$f_1 = \frac{\bar{\gamma}_{\text{пр}_1} l^2}{8\sigma_1} = \frac{0,033 \cdot 20000^2}{8 \cdot 4620} = 357 \text{ см} = 3,6 \text{ м};$$

$$f_2 = \frac{\bar{\gamma}_{\text{пр}_2} l^2}{8[\sigma_{\text{впр}}]} = \frac{0,099 \cdot 20000^2}{8 \cdot 13530} = 366 \text{ см} = 3,7 \text{ м}.$$

Стрелы провисания нити практически оказались одинаковыми.

Определим внутренние усилия в материалах провода в точке наибольшего его провисания (рис. 7.16).

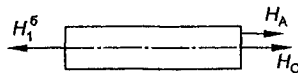


Рис. 7.16

В первом состоянии при подвеске провода

$$H_1^6 = H_{1A} + H_{1C}; \quad H_1^6 = 4620 \cdot 4,42 = 20420 \text{ Н};$$

$$H_{1C} = H_1^6 \left(\frac{E_C A_C}{E_A A_A + E_C A_C} \right) = 20420 \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 0,52}{0,7 \cdot 10^7 \cdot 3,9 + 2 \cdot 10^7 \cdot 0,52} =$$

$$= 5633 \text{ Н};$$

$$H_{1A} = H_1^6 \left(\frac{E_A A_A}{E_A A_A + E_C A_C} \right) = 20420 \left(\frac{0,7 \cdot 10^7 \cdot 3,9}{0,7 \cdot 10^7 \cdot 3,9 + 2 \cdot 10^7 \cdot 0,52} \right) =$$

$$= 14787 \text{ Н}.$$

Соответственно в алюминиевой и стальной частях провода будут

$$\sigma_{1A} = \frac{H_{1A}}{A_A} = \frac{14787}{3,9} = 3792 \text{ Н/см}^2; \quad \sigma_{1C} = \frac{H_{1C}}{A_C} = \frac{5633}{0,52} = 10833 \text{ Н/см}^2.$$

Во втором состоянии при эксплуатации линии передач

$$H_2^6 = H_{2A} + H_{2C}; \quad H_2^6 = [\sigma_{\text{впр}}] \cdot A = 13530 \cdot 4,42 = 59803 \text{ Н};$$

$$H_{2C} = 59803 \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 0,52}{0,7 \cdot 10^7 \cdot 3,9 + 2 \cdot 10^7 \cdot 0,52} = 16494 \text{ Н};$$

$$H_{2A} = 59803 \frac{0,7 \cdot 10^7 \cdot 3,9}{0,7 \cdot 10^7 \cdot 3,9 + 2 \cdot 10^7 \cdot 0,52} = 43306 \text{ Н};$$

$$\sigma_{2C} = \frac{H_{2C}}{A_C} = \frac{16494}{0,52} = 31719 \text{ Н/см}^2; \quad \sigma_{2A} = \frac{H_{2A}}{A_A} = \frac{43306}{3,9} =$$

$$= 11104 \text{ Н/см}^2.$$

Определяем фактические коэффициенты безопасности для стали и алюминия

$$n_{6A} = \frac{\sigma_{вА}}{\sigma_{2A}} = \frac{20000}{11104} = 1,8; \quad n_{6C} = \frac{\sigma_{вС}}{\sigma_{2C}} = \frac{80000}{31719} = 2,5.$$

Следовательно, условия прочности для стальной и алюминиевой частей провода обеспечены.

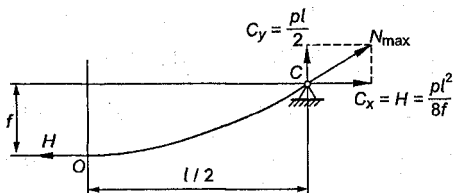


Рис. 7.17

Вычислим максимальное натяжение провода в точке подвеса (рис. 7.17), используя формулу (7.31):

$$\begin{aligned}
 N_{\max} &= \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{H^2 + \frac{p^2 l^2}{4}} = H \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}} = H \left(1 + 8 \frac{f^2}{l^2} \right) = \\
 &= H \left(1 + 8 \frac{360^2}{20000^2} \right) = H(1 + 0,0021).
 \end{aligned}$$

Таким образом, максимальное натяжение провода может превышать расчетное значение в пределах 3 % за счет влияния вертикальной составляющей реакции C_y .

Глава 8

КРУЧЕНИЕ

8.1. Напряжения в поперечных сечениях прямого круглого бруса

Кручением называется вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент. Такой вид нагружения имеет место, когда на брус действуют пары сил, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси.

Рассмотрим прямой круглый брус радиусом r , заделанный одним концом и нагруженный на свободном конце моментом m (рис. 8.1).

В поперечных сечениях бруса возникает постоянный крутящий момент $T = m$. Выделим двумя поперечными сечениями и

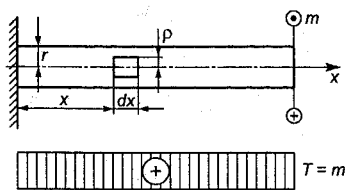


Рис. 8.1

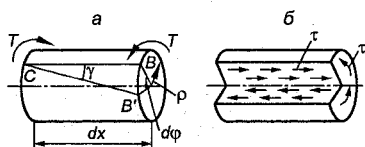


Рис. 8.2

цилиндрической поверхностью радиусом r элемент бруса длиной dx (рис. 8.2, а).

При расчете используются следующие положения, хорошо согласующиеся с экспериментом.

1. Ось бруса при кручении остается прямой.

2. В пределах малых углов закручивания поперечные сечения бруса плоские до деформации остаются плоскими и после деформации, поворачиваясь в своей плоскости как абсолютно жесткие диски на некоторый угол закручивания. Это положение называется гипотезой Бернулли¹⁵ или гипотезой плоских сечений.

3. Диаметры сечений и расстояния между ними при закручивании остаются постоянными.

Таким образом, деформация бруса при кручении заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга при сохранении расстояния между ними постоянным. Согласно гипотезе плоских сечений, в поперечных сечениях будут действовать только касательные напряжения. Под действием момента T правое сечение элемента повернется относительно левого на угол $d\varphi$, при этом образующая CB повернется на угол γ и займет положение CB' .

Дуга BB' будет равна

$$BB' = r d\varphi = \gamma dx, \quad (8.1)$$

откуда

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}. \quad (8.2)$$

Угол γ характеризует изменение прямого угла и является углом сдвига.

Величина $\frac{d\varphi}{dx}$ представляет собой угол закручивания, приходящийся на единицу длины, и называется **относительным углом закручивания**, обозначается θ .

Тогда, вводя в (8.2) обозначение θ , получим

$$\gamma = \rho\theta. \quad (8.3)$$

Заменяя угол γ по закону Гука для сдвига

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

получим формулу для касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении бруса,

$$\tau = \theta G \rho, \quad (8.4)$$

где G - модуль сдвига.

По закону парности такие же касательные напряжения будут возникать в продольных плоскостях, проходящих через ось бруса (рис. 8.2, б). Так как для данного сечения θG - величина постоянная, то касательные напряжения, согласно (8.4), в поперечном сечении при кручении изменяются по линейному закону от ρ . При $\rho=0$ $\tau=0$; при $\rho=\rho_{\max}=r$ $\tau=\tau_{\max}$. Максимальное значение касательные напряжения имеют на контуре сечения. Эпюра распределения касательных напряжений в поперечном сечении показана на рис. 8.3.

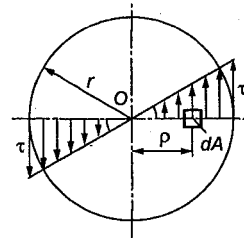


Рис. 8.3

Выделим в сечении элементарную площадку dA на расстоянии ρ от оси бруса. Элементарный крутящий момент, создаваемый элементарной силой τdA , будет

$$dT = \tau \rho dA. \quad (8.5)$$

Крутящий момент, действующий в сечении, получим, проинтегрировав выражение (8.5) по площади:

$$T = \int_A \tau \rho dA. \quad (8.6)$$

Подставляя в (8.6) напряжение τ из (8.4), получим

$$T = \int_A \theta G \rho^2 dA = \theta G \int_A \rho^2 dA. \quad (8.7)$$

Интеграл $\int_A \rho^2 dA$ представляет собой полярный момент инерции и обозначается I_p .

Тогда выражение (8.7) запишется в виде

$$T = \theta G I_p,$$

откуда

$$\theta = \frac{T}{G I_p}. \quad (8.8)$$

Произведение $G I_p$ называется **жесткостью сечения бруса при кручении**, так как, согласно (8.8), чем оно больше, тем меньше будет относительный угол закручивания, и наоборот.

Подставляя в выражение (8.4) значение θ , получим формулу для определения касательных напряжений в поперечном сечении круглого бруса:

$$\tau = \frac{T \rho}{I_p}. \quad (8.9)$$

Максимальные касательные напряжения возникают в точках контура сечения, наиболее удаленных от оси стержня.

При $\rho = r$

$$\tau_{\max} = \frac{T r}{I_p},$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\left(\frac{I_p}{r}\right)} = \frac{T}{W_p}, \quad (8.10)$$

где $\frac{I_p}{r} = W_p$ называется **полярным моментом сопротивления**.

Формулы (8.9) и (8.10) справедливы как для сплошного, так и для полого кругового сечения.

8.2. Определение углов закручивания сечений бруса при кручении

Заменяя в формуле (8.8) относительный угол закручивания θ его значением, получим

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \quad (8.11)$$

Откуда

$$d\varphi = \frac{T}{GI_p} dx \quad (8.12)$$

Взаимный угол поворота между сечениями, расположенными на расстоянии l , будет определяться интегрированием выражения (8.12):

$$\varphi = \int_0^l \frac{T}{GI_p} dx \quad (8.13)$$

Если $T = \text{const}$, $GI_p = \text{const}$, то получим

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \quad (8.14)$$

Формула (8.14) выражает угол закручивания в радианах. Чтобы получить угол закручивания в градусах, нужно умножить его на $\frac{180}{\pi}$:

$$\varphi^\circ = \frac{180}{\pi} \frac{Tl}{GI_p} \quad (8.14 \text{ а})$$

Когда брус закручивается внешним моментом m , приложенным в конечном сечении (см. рис. 8.1), имеем $T = m$. В этом случае формула (8.14) может быть записана в виде

$$\varphi = \frac{ml}{GI_p} \quad (8.15)$$

Полученные формулы (8.13) – (8.15) справедливы как для сплошных, так и для полых круговых стержней.

8.3. Условия прочности и жесткости при кручении. Допускаемые напряжения

Выделим двумя поперечными и двумя осевыми сечениями из наружных слоев нагруженного скручивающими моментами m бруса элемент $BCDE$ (рис. 8.4, *a*).

На гранях элемента BE и CD , перпендикулярных оси, действуют касательные напряжения, определяемые по формуле (8.10). По закону парности касательных напряжений такие же по величине касательные напряжения будут действовать на гранях BC и DE . Таким образом, элемент испытывает двухосное (плоское) напряженное состояние чистого сдвига. Как было показано ранее (см. § 2.5), при чистом сдвиге главные напряжения равны

$$\sigma_1 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau$$

и действуют на главных площадках, расположенных под углом 45° к начальным площадкам. Следовательно, на гранях элемента $B'C'D'E'$, составляющего с образующей угол 45° , будут действовать главные напряжения, равные по величине τ , при этом на одной паре граней они растягивающие, а на другой – сжимающие (рис. 8.4, *б*).

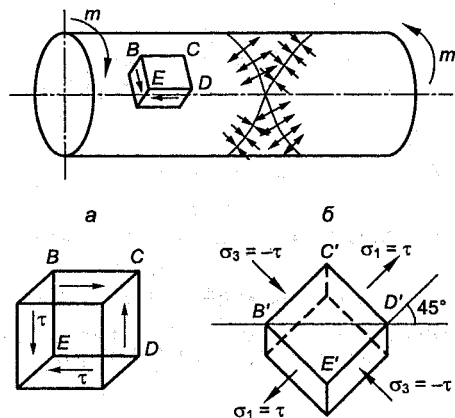


Рис. 8.4

Можно сделать вывод, что при кручении круглых брусьев (валов), в зависимости от способности материала сопротивляться действию касательных и нормальных напряжений, опасными будут либо касательные напряжения, действующие в поперечных и продольных сечениях, либо нормальные напряжения, действующие в площадках, расположенных под углом 45° к оси бруса. Например, древесина плохо сопротивляется действию касательных напряжений вдоль волокон; при кручении деревянных валов с продольным расположением волокон трещины будут возникать вдоль образующих. Чугун плохо сопротивляется растягивающим напряжениям: при кручении трещины пройдут по винтовым линиям, касательные к которым составляют угол 45° с осью бруса, т. е. расположенным нормально к главным растягивающим напряжениям. Стальные валы под действием касательных напряжений обычно разрушаются по сечениям, перпендикулярным оси вала.

На практике валы и другие элементы конструкций, работающих на кручение, изготавливают из пластичных материалов (сталь обыкновенная, легированная и т. д.).

Для таких материалов целесообразно использовать третью и четвертую теории прочности. По *третьей* теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставляя значения σ_1 и σ_3 , получим

$$2\tau \leq [\sigma].$$

Тогда *условие прочности по третьей теории* запишется в виде

$$\tau_{\text{max}} \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau]. \quad (8.16)$$

Откуда допускаемое напряжение при сдвиге равно

$$[\tau] = 0,5[\sigma]. \quad (8.17)$$

По *четвертой* теории прочности для плоского напряженного состояния

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma].$$

Подставляя значения главных напряжений, получим

$$\tau\sqrt{3} \leq [\sigma].$$

Условие прочности по четвертой теории запишется в виде

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = [\tau]. \quad (8.18)$$

Из (8.18) допускаемое напряжение при сдвиге равно

$$[\tau] = 0,6[\sigma]. \quad (8.19)$$

Используя выражения (8.16) и (8.18), условие прочности при кручении запишем в виде

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (8.20)$$

где τ_{\max} - максимальное расчетное напряжение; $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение, которое согласно (8.17) и (8.19) равно $(0,5-0,6)[\sigma]$; $[\sigma]$ - допускаемое напряжение на растяжение.

Условие жесткости скручиваемого стержня состоит в том, что максимальный угол закручивания стержня не должен превышать допускаемого значения:

$$\varphi_{\max} = \frac{T_{\max} l}{GI_p} \leq [\varphi], \quad (8.21)$$

где $[\varphi]$ - допускаемый угол закручивания, рад.

Так как допускаемый угол закручивания обычно задается в градусах на метр длины, то формула (8.21) запишется в виде

$$\frac{180 T_{\max} l}{\pi GI_p} \leq [\theta^\circ]. \quad (8.22)$$

Практикой установлены следующие допускаемые углы закручивания в машиностроении:

$[\theta^\circ]$ - $0,3^\circ$ на метр длины при спокойной работе вала;

$[\theta^\circ]$ - $0,25^\circ$ на метр длины при переменных нагрузках;

$[\theta^\circ]$ - $0,15^\circ$ на метр длины при ударных нагрузках.

Условия прочности и жесткости при кручении позволяют выполнять, как и при растяжении (сжатии), три вида расчетов: конструкторский или проектный, проверочный, определение грузоподъемности или несущей способности.

8.4. Напряжения при кручении прямых брусьев некруглого поперечного сечения

При кручении брусьев *некруглого* поперечного сечения гипотеза плоских сечений Бернулли неприменима. У некруглых брусьев происходит искривление (депланация) поперечных сечений, что существенно изменяет характер распределения напряжений по сечению. На рис. 8.5 показано искривление сечений при закручивании прямого бруса из резины, на грани которого предварительно была нанесена прямоугольная сетка. Из рис. 8.5 видно, что искажение поперечных сечений имеет наибольшее значение в середине сторон и равняется нулю в углах. Отсюда естественно принять, что распределение касательных напряжений происходит соответственно искажению сечения.

Расчет на кручение некруглых стержней представляет собой сложную задачу и рассматривается в теории упругости. Исследование распределения касательных напряжений в брусое прямоугольного поперечного сечения методами теории упругости показало, что наибольшее значение касательные напряжения имеют в серединах длинных сторон (рис. 8.6), в серединах малых сторон напряжения меньше, в центре и углах они равны нулю. Нормальные напряжения в сечении отсутствуют. Следовательно, материал испытывает *чистый сдвиг*.

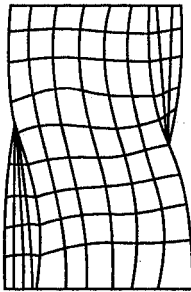


Рис. 8.5

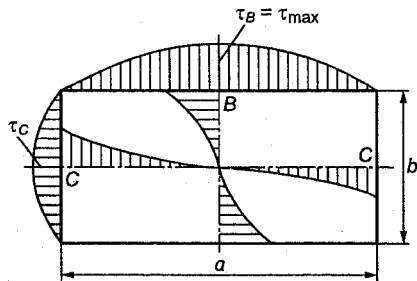
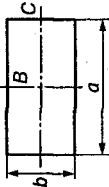
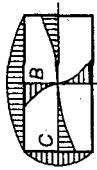
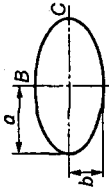
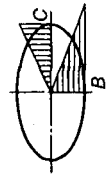
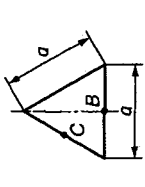
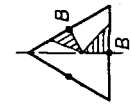
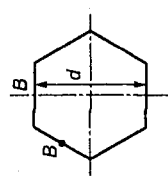
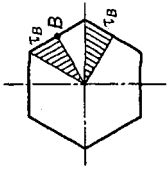


Рис. 8.6

Таблица 8.1

Форма поперечного сечения бруса	Касательное напряжение в точке B	Касательное напряжение в точке C	Угол закручивания для бруса φ	Эпюра распределения касательных напряжений
	$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{T}{\alpha_1 ab^2}$	$\tau_C = \tau_B = \frac{T}{\alpha_2 ab^2}$	$\varphi = \frac{Tl}{\beta G ab^3}$	
	$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{2T}{\pi ab^2}$	$\tau_C = \frac{2T}{\pi ba^2}$	$\varphi = \frac{Tl}{G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}$	
	$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{20T}{a^3}$	-	$\varphi = \frac{Tl}{G \sqrt{3} \frac{a^4}{80}}$	
	$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{T}{0,217 Ad}$ A - площадь сечения; d - диаметр вписанного круга	-	$\varphi = \frac{\pi l}{0,133 G Ad^2}$	

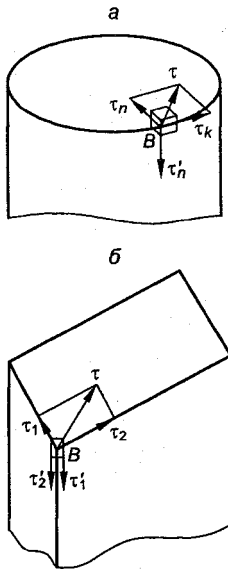


Рис. 8.7

Касательные напряжения в поперечных сечениях некруговой формы в точках, расположенных у контура, направлены по касательной к дуге. Допустим, в точке B вблизи контура (рис. 8.7, a) касательное напряжение направлено под углом к контуру. Разложим напряжение τ на составляющие по касательной к контуру (τ_k) и по нормали к контуру (τ_n). Тогда по закону парности на свободной поверхности бруса должно существовать напряжение $\tau'_n = \tau_n$. Но внешняя поверхность бруса свободна от нагрузки, поэтому $\tau'_n = 0$, а значит, и $\tau_n = 0$. Таким образом, касательное напряжение в точке B направлено по касательной к дуге контура в этой точке. Касательные напряжения во внешних углах сечения равны нулю (рис. 8.7, b). Разложим касательное напряжение τ , приложенное к точке B , на две составляющие τ_1 и τ_2 , направленные по сторонам внешнего угла. По закону парности касательных напряжений на свободной поверхности бруса должны существовать парные напряжения $\tau_1 = \tau'_1$ и $\tau_2 = \tau'_2$. Но так как внешняя поверхность бруса свободна от нагрузок, то напряжения τ'_1 и τ'_2 равны нулю, а следовательно, равно нулю и касательное напряжение в точке B , расположенной вблизи внешнего угла.

Расчетные формулы, полученные методами теории упругости для наиболее распространенных форм поперечных некруговых сечений брусев, а также эпюры распределения касательных напряжений приведены в табл.8.1.

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \eta$ зависят от отношения сторон

$\frac{a}{b}$. Их числовые значения даны в табл.8.2.

Таблица 8.2

$\frac{a}{b}$	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	~
α_1	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,232	0,299	0,307	0,313	0,333
α_2	0,208	0,269	0,291	0,309	0,337	0,355	0,379	0,402	0,414	0,422	0,449
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Из табл. 8.1 следует, что формулы для расчета брусьев некруглого поперечного сечения по своей структуре аналогичны формулам для расчета брусьев круглого поперечного сечения.

8.5. Расчет валов по заданной мощности и числу оборотов

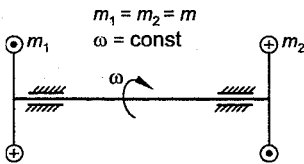


Рис. 8.8

На практике часто требуется рассчитать диаметр вала, когда известна мощность P , кВт, передаваемая валом, и частота вращения n , мин⁻¹. Расчетная схема показана на рис. 8.8.

Как известно, мощность

$$P = 10^{-3} m \omega,$$

где P – передаваемая мощность, кВт.

Откуда вращающий момент, равный крутящему моменту, определяется выражением

$$m = T = \frac{10^3 P}{\omega} = \frac{10^3 P \cdot 30}{\pi n} = 9554 \frac{P}{n} \text{ Н} \cdot \text{м} = 955400 \frac{P}{n} \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Из условия прочности (8.20), подставляя значение W_p , находим диаметр вала:

$$d = 3 \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 955400 P}{3,14 [\tau] n}} = 169,5 \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{P}{n [\tau]}} \text{ см}. \quad (8.23)$$

В формулу (8.22) P подставляется в кВт; n в мин⁻¹; $[\tau]$ в Н/см².

Пример 8.1. Определить диаметр стального бруса, представленного на рис. 1.34, если $[\tau]=80$ МПа.

Решение. Используя формулу (8.20), найдем

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{T_{\max}}{[\tau]} = \frac{32 \cdot 10^5}{8000} = 400 \text{ см}^3.$$

Откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 400}{3,14}} = 12,6 \text{ см.}$$

Пример 8.2. На стальной вал через пять шкивов действуют моменты (рис. 8.9, а). Определить диаметр вала при допуске напряжении $[\tau]=70$ МПа и допуске угле закручивания $1,0^\circ$ на 1 м длины вала. Построить также эпюры крутящих моментов, углов закручивания, относительных углов закручивания.

Решение. Составляем расчетную схему.

Проверяем равномерность вращения вала:

$$\sum m_x = m_1 - m_2 - m_3 + m_4 - m_5 = 4 - 5 - 4 + 8 - 3 = 0.$$

Строим эпюру крутящих моментов:

$$T_1 = 0; T_2 = m_1 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; T_3 = m_1 - m_2 = 4 - 5 = -1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_4 = m_1 - m_2 - m_3 = 4 - 5 - 4 = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_5 = m_1 - m_2 - m_3 + m_4 = 4 - 5 - 4 + 8 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_6 = m_1 - m_2 - m_3 + m_4 - m_5 = 4 - 5 - 4 + 8 - 3 = 0.$$

По вычисленным величинам построена эпюра крутящих моментов (рис. 8.9, б). Максимальный крутящий момент равен $T_{\max} = 5$ кН·м. По условию прочности (формула (8.20)) определяем диаметр сплошного круглого вала:

$$W_p = \frac{T_{\max}}{[\tau]} = \frac{5 \cdot 10^5}{7000} = 71,4 \text{ см}^3; \quad \frac{\pi d^3}{16} = 71,4 \text{ см}^3.$$

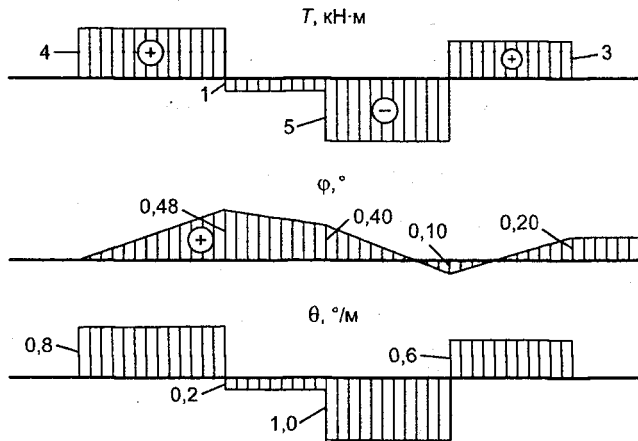
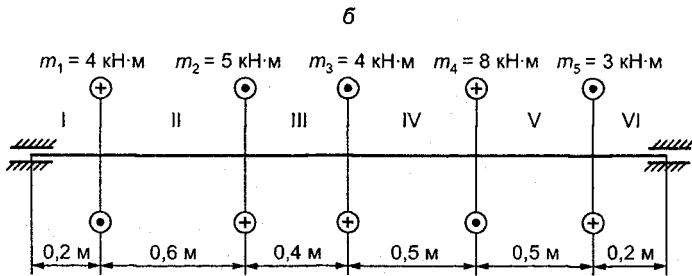
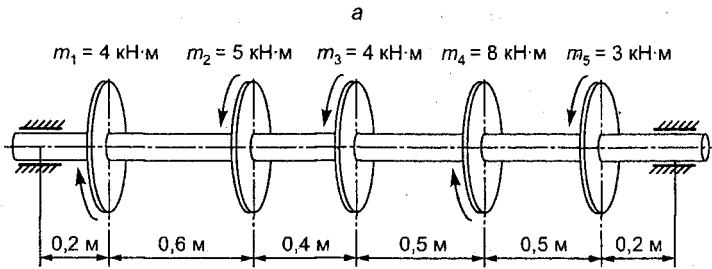


Рис. 8.9

Откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{71,4 \cdot 16}{3,14}} = 7,12 \text{ см.}$$

Проверяем выполнение условия жесткости по формуле (8.22) для наиболее нагруженного участка вала:

$$\frac{180}{3,14} \cdot \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 3,14 \cdot 7,12^4} = 1,4^\circ > [\theta^\circ] = 1,0^\circ.$$

Так как условие жесткости не удовлетворяется, то находим диаметр из данного условия:

$$I_p = \frac{180 \cdot T_{\max} \cdot 100}{\pi G [\theta^\circ]} = \frac{180 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 100}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^7 \cdot 1,0} = 358,3 \text{ см}^4;$$

$$\frac{\pi d^4}{32} = 358,3 \text{ см}^4.$$

Откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{358,3 \cdot 32}{3,14}} = 7,77 \text{ см.}$$

Принимаем $d = 77,7$ мм.

Используя формулу (8.14 а), построим эпюру углов закручивания сечений вала под шкивами, принимая сечение под крайним левым шкивом за неподвижное:

$$\varphi_1^\circ = 0; \varphi_2^\circ = \frac{180 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 60}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^7 \cdot 358,3} = 0,48^\circ;$$

$$\varphi_3^\circ = 0,48^\circ - \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 180}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^7 \cdot 358,3} = 0,40^\circ;$$

$$\varphi_4^\circ = 0,40^\circ - \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 180}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^7 \cdot 358,3} = -0,1^\circ;$$

$$\varphi_5^\circ = -0,1^\circ + \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 180}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^7 \cdot 358,3} = 0,2^\circ.$$

По полученным величинам построена эпюра углов закручивания (см. рис. 8.9, б).

Вычисляем относительные углы закручивания:

$$\theta_{21}^{\circ} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l_{12}} = \frac{0,48}{0,6} = 0,8^{\circ}/\text{м}; \quad \theta_{32}^{\circ} = \frac{0,4 - 0,48}{0,4} = -0,2^{\circ}/\text{м};$$

$$\theta_{43}^{\circ} = \frac{-0,1 - 0,4}{0,5} = -1,0^{\circ}/\text{м}; \quad \theta_{54}^{\circ} = \frac{0,2 + 0,1}{0,5} = 0,6^{\circ}/\text{м}; \quad \theta_{65}^{\circ} = 0.$$

По данным построена эпюра относительных углов закручивания (см. рис. 8.9, б). Из эпюры следует, что условие жесткости на всех участках вала удовлетворяется.

Пример 8.3. К стальному полому валу приложены скручивающие моменты $m_1 = 125\,000$ Н·см, $m_2 = 320\,000$ Н·см, $m_3 = 500\,000$ Н·см, $m_4 = 55\,000$ Н·см (рис. 8.10). Определить наружный и внутренний диаметры вала при отношении $d_{\text{в}}/d_{\text{н}} = 0,6$, если допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 60$ МПа. Определить величину угла закручивания правого конечного сечения вала по отношению к левому.

Решение. Проверяем равномерность вращения вала:

$$\sum m_x = m_1 + m_2 - m_3 + m_4 = 125000 + 320000 - 500000 + 55000 = 0.$$

Вал вращается равномерно: $\omega = \text{const}$. Строим эпюру крутящих моментов:

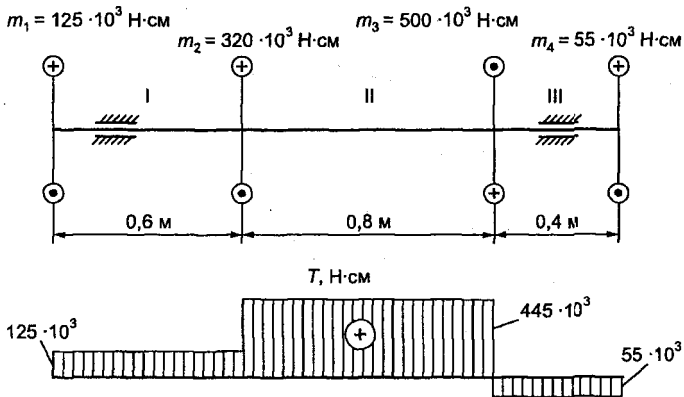


Рис. 8.10

$$T_1 = m_1 = 125000 \text{ Н·см}; T_2 = m_1 + m_2 = 125000 + 320000 = 445000 \text{ Н·см};$$

$$T_3 = m_1 + m_2 - m_3 = 125000 + 320000 - 500000 = -50000 \text{ Н·см}.$$

По вычисленным величинам строим эпюру крутящих моментов. Максимальный крутящий момент $T_{\max} = 445000 \text{ Н·см}$.

Определяем из условия прочности требуемый полярный момент сопротивления сечения:

$$W_p = \frac{T_{\max}}{[\tau]} = \frac{445000}{6000} = 74,17 \text{ см}^3.$$

Полярный момент сопротивления для сечения в форме кольца с внутренним диаметром d_b и наружным d_H следующий:

$$W_p = \frac{\frac{\pi}{32}(d_H^4 - d_b^4)}{\frac{d_H}{2}} = \frac{\pi d_H^4(1-c^4) \cdot 2}{32 d_H} = \frac{\pi d_H^3(1-c^4)}{16},$$

где $c = d_b/d_H$.

Подставляя вместо W_p его значение, найдем

$$\frac{3,14 \cdot d_H^3}{16} (1 - 0,6^4) = 74,17; d_H = 3 \sqrt{\frac{74,17 \cdot 16}{3,14 \cdot (1 - 0,6^4)}} = 7,56 \text{ см};$$

$$d_H = 75,6 \text{ мм}, d_b = 0,6 d_H = 0,6 \cdot 75,6 = 45,4 \text{ мм}.$$

Вычислим угол закручивания, принимая левое сечение неподвижным:

$$\varphi^\circ = \frac{180}{3,14} \left[\frac{320 \cdot 10^3 \cdot 60}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 278,9} - \frac{500 \cdot 10^3 \cdot (60+80)}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 278,9} + \frac{55 \cdot 10^3 \cdot (60+80+40)}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 278,9} \right] =$$

$$= -1,37^\circ;$$

$$I_p = \frac{3,14 \cdot 7,56^4}{32} (1 - 0,6^4) = 278,9 \text{ см}^4.$$

Направление угла закручивания по ходу часовой стрелки считается положительным, отрицательным - против хода часовой стрелки, если смотреть с правого торца вала.

Пример 8.4. Определить мощность, передаваемую стальным полым валом, имеющим наружный диаметр $d_H=25$ см, внутренний $d_B=17$ см, если угол закручивания на длине 6 м равен $1,2^\circ$, частота вращения $n=250$ мин⁻¹. Определить также наибольшие касательные напряжения.

Решение. Вычислим крутящий момент, действующий в сечениях вала, используя формулу (8.14 а)

$$\frac{180 T l}{\pi G I_p} = \varphi^\circ,$$

откуда

$$T = \frac{\pi \varphi^\circ G I_p}{180 l} = \frac{3,14 \cdot 1,2 \cdot 0,8 \cdot 10^7 \cdot 30135}{180 \cdot 600} = 8411432 \text{ Н} \cdot \text{см}^4,$$

$$I_p = \frac{\pi}{32} (d_H^4 - d_B^4) = \frac{3,14}{32} (25^4 - 17^4) = 30135 \text{ см}^4.$$

Угловая скорость

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 250}{30} = 26,2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Передаваемая мощность

$$P = T \omega = 84114,3 \cdot 26,2 = 2203795 \text{ Вт} = 2204 \text{ кВт}.$$

Максимальные касательные напряжения следующие:

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{8411432}{2411} = 34,9 \text{ МПа}, \quad W_p = \frac{30135,2}{25} = 2411 \text{ см}^3.$$

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ) И КРУЧЕНИИ

9.1. Составление уравнений перемещения и расчет статически неопределимых систем

Система, у которой для определения неизвестных реакций и внутренних силовых факторов уравнений равновесия недостаточно, называется **статически неопределимой**. У такой системы количество наложенных связей больше числа независимых уравнений статики, которые можно составить для данной системы. Разность между числом наложенных на систему связей и числом независимых уравнений равновесия называется **степенью статической неопределимости системы**. Практически степень статической неопределимости указывает количество недостающих уравнений. Система может быть 1, 10, 100, вообще, n раз статически неопределимой. Для решения таких систем или, как говорят, для раскрытия статической неопределимости необходимо составлять дополнительные уравнения, учитывающие действительные условия деформирования элементов системы и называемые **уравнениями перемещений** или **уравнениями совместности деформаций**. Выработаны общие рекомендации по решению статически неопределимых задач и приемы, упрощающие составление уравнений перемещения, с позиций которых мы и будем в дальнейшем рассматривать отдельные группы статически неопределимых систем. Общий метод решения таких систем требует:

- 1) изобразить заданную систему и заменить опорные связи неизвестными силами;
- 2) составить для системы возможные уравнения равновесия и определить степень ее статической неопределимости;
- 3) выбрать основную систему, под которой понимается статически определимая, кинематически неизменяемая система, получаемая из заданной путем удаления внешней нагрузки и лишних связей;
- 4) составить, рассматривая отдельно деформации в основной системе под действием внешних нагрузок и неизвестных сил, уравнения перемещений;

5) представить, используя закон Гука, уравнения перемещений в уравнения между силовыми факторами;

6) решить полученную систему уравнений, найти неизвестные силы, определить внутренние силовые факторы и выполнить прочностной расчет системы.

Для стержневых систем вместо п. 4 рекомендуется представить систему в деформированном состоянии и, с учетом деформаций элементов системы, составить уравнения перемещений.

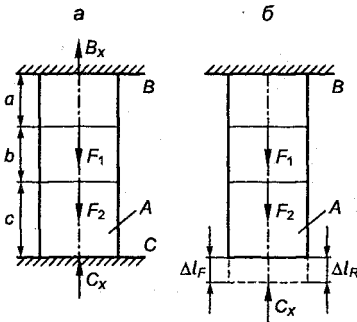


Рис. 9.1

Рассмотрим стержень, жестко закрепленный по концам и нагруженный силами F_1 и F_2 (рис. 9.1, а).

Заменим опорные связи реакциями B_x и C_x и составим уравнения равновесия статики. В данном случае уравнение равновесия будет одно в виде суммы проекций сил на ось x :

$$B_x + C_x - F_1 - F_2 = 0. \quad (а)$$

Таким образом, имеем две неизвестные силы и одно уравнение для их определения, т. е. задача является 1 раз статически неопределимой. Мысленно отбрасываем нижнюю опору, как лишнюю, и принимаем в качестве основной системы стержень, закрепленный в верхнем сечении (рис. 9.1, б).

Под действием приложенных к основной системе внешних сил F_1 и F_2 стержень удлинится на некоторую величину Δl_F . Чтобы основная система соответствовала заданной, сила C_x должна сжать стержень на величину Δl_R . Отсюда уравнение перемещений будет

$$\Delta l_F + \Delta l_R = 0. \quad (б)$$

Уравнение перемещений должно выражать условие отсутствия перемещения сечения стержня в месте отброшенной связи.

Представим Δl_F и Δl_R через силы с учетом знака:

$$\Delta l_F = \frac{F_1 a}{EA} + \frac{F_2 (a+b)}{EA}; \quad (в)$$

$$\Delta l_R = -\frac{C_x(a+b+c)}{EA}. \quad (\text{г})$$

Подставляя (с) и (г) в (б), получим

$$\frac{F_1 a}{EA} + \frac{F_2(a+b)}{EA} - \frac{C_x(a+b+c)}{EA} = 0.$$

Откуда

$$C_x = \frac{F_1 a + F_2(a+b)}{a+b+c}.$$

Подставляя C_x в уравнение равновесия (а), найдем реакцию B_x :

$$B_x = \frac{F_2 c + F_1(c+b)}{a+b+c}.$$

Дальше, применяя метод сечений, находим внутренние силовые факторы.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из трех стержней, нагруженную силой F (рис. 9.2), и определим усилия в стержнях N_1, N_2, N_3 .

Мысленно проведем сечения через три стержня, отделим узел B , введем внутренние силы и составим уравнения равновесия:

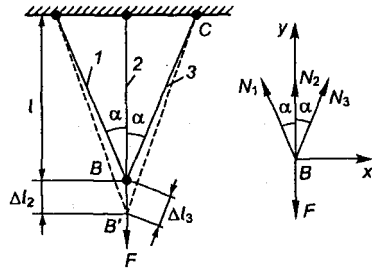


Рис. 9.2

$$\sum X = -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0; \quad N_1 = N_3; \quad (\text{а})$$

$$\sum Y = 2N_3 \cos \alpha + N_2 - F = 0. \quad (\text{б})$$

Система 1 раз статически неопределима. Для решения необходимо составить дополнительно одно уравнение перемещений.

Представим себе систему в деформированном состоянии. Под действием силы F узел B переместится вниз и займет положение B' . Тогда отрезок BB' является полным удлинением

Δl_2 стержня 2. Удлинение стержня 3 получим, проведя дугу окружности из центра C радиусом, равным длине стержня 3. Так как удлинения весьма малы, дугу можно заменить перпендикуляром, опущенным из B на прямую CB' , а также принять, что угол изменился незначительно. Тогда

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 \cos \alpha. \quad (б)$$

Выражение (б) представляет собой необходимое уравнение перемещений, отражающее условие, что при деформации системы длины стержней должны измениться так, чтобы узловая точка B после деформации оставалась общей.

Выразим удлинение стержней через усилия по закону Гука:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA \cos \alpha}. \quad (в)$$

Подставив (в) в (б), получим

$$N_3 = N_2 \cos^2 \alpha. \quad (г)$$

Решая (г) совместно с уравнениями равновесия, окончательно найдем

$$N_1 = N_3 = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N_2 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

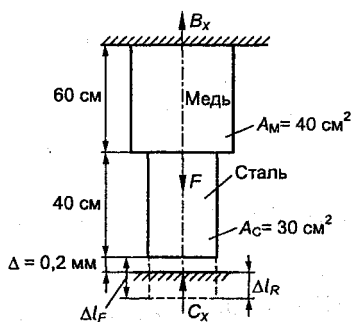


Рис. 9.3

Пример 9.1. Определить напряжения в верхней и нижней частях составного бруса (рис. 9.3). Верхняя медная часть бруса имеет площадь поперечного сечения $A_M = 40 \text{ см}^2$, нижняя стальная часть имеет площадь поперечного сечения $A_C = 30 \text{ см}^2$. Приложенная нагрузка $F = 240 \text{ кН}$. Между нижним концом и опорой имеется зазор $\Delta = 0,2 \text{ мм}$. Опоры неподатливые.

Решение. При приложении нагрузки F до тех пор, пока не закроется зазор, будет деформироваться только верхняя мед-

ная часть бруса. После закрытия зазора брус будет вести себя как жестко заземленный по концам; в верхней и нижней опорах возникнут опорные реакции B_x и C_x . Дальше задача решается аналогично рассмотренному стержню с закрепленными концами.

Напишем уравнение равновесия:

$$B_x + C_x - F = 0. \quad (a)$$

Выбираем основную систему, мысленно отбросив нижнюю опору. Тогда стержень удлинится под действием силы F на величину Δl_F . Под действием реакции C_x брус сожмется на величину Δl_R . Отсюда *уравнение перемещений* запишется в виде

$$\Delta l_F - \Delta + \Delta l_R = 0, \text{ или } \Delta l_F + \Delta l_R = \Delta. \quad (б)$$

Уравнение перемещений констатирует тот факт, что фактическое удлинение стержня равно только величине зазора Δ .

Выразим перемещения Δl_F и Δl_R через силы и подставим в уравнение (б), получим

$$\frac{240 \cdot 10^3 \cdot 60}{40 \cdot 1 \cdot 10^7} - \frac{C_x \cdot 40}{30 \cdot 2 \cdot 10^7} - \frac{C_x \cdot 60}{40 \cdot 1 \cdot 10^7} = 0,02.$$

Откуда $C_x = 168898,6$ Н.

Подставляя значение C_x в уравнение равновесия, найдем

$$B_x = F - C_x = 240000 - 168898,6 = 71101,4 \text{ Н.}$$

Нормальная сила в верхней части $N_M = B_x$, в нижней части $N_C = -C_x$. *Напряжения в медной части бруса*

$$\sigma_M = \frac{N_M}{A_M} = \frac{71101,4}{40} = 17,8 \text{ МПа.}$$

Напряжения в стальной части бруса

$$\sigma_C = \frac{N_C}{A_C} = \frac{168898,6}{30} = -56,3 \text{ МПа.}$$

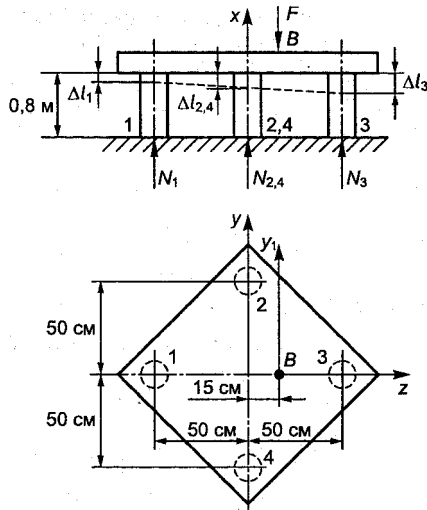


Рис. 9.4

Пример 9.2. Определить усилие в четырех ножках стола (рис. 9.4) от нагрузки $F=2000$ Н, приложенной в точке B , смещенной от центра на 15 см. Крышку стола и пол считать абсолютно твердыми. Следует отметить, что задача определения усилий в ножках стола была первой статически неопределимой системой, которую впервые решил и исследовал Л. Эйлер в 1774 г.

Решение. Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = F; \quad (a)$$

$$\sum m_z = N_2 \cdot 50 - N_4 \cdot 50 = 0,$$

$$N_2 = N_4,$$

$$\sum m_{y_1} = 65N_1 + 15N_4 + 15N_2 - 35N_3 = 0.$$

Уравнение моментов $\sum m_{y_1}$ составлено относительно оси y_1 , параллельной y и проходящей через точку B .

Задача 1 раз статически неопределима.

Для составления уравнения перемещений предположим, что под действием силы F крышка стола несколько опустилась и повернулась, как показано на рис. 9.4 пунктирной линией,

что соответствует принятому направлению сил N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , вызывающих сжатие в ножках стола.

Уравнение перемещений получим, выразив перемещения $\Delta l_4 = \Delta l_2$ через Δl_1 и Δl_3 :

$$\Delta l_4 = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_3}{2} \quad (\text{как средняя линия трапеции}),$$

или

$$2\Delta l_4 = \Delta l_1 + \Delta l_3. \quad (б)$$

Выразим перемещения через усилия и, подставив в уравнение (б), получим

$$2N_4 = N_1 + N_3. \quad (в)$$

Решая уравнение (в) с уравнениями равновесия, найдем усилия в ножках:

$$N_4 = N_2 = \frac{F}{4} = \frac{2000}{4} = 500 \text{ Н},$$

$$N_3 = \frac{2}{5}F = 800 \text{ Н}, \quad N_1 = \frac{1}{10}F = 200 \text{ Н}.$$

Пример 9.3. Стальной болт сжимает медную трубку. Какие усилия и напряжения возникнут в болте и трубке, если гайку повернуть на $1/4$ оборота? Шаг резьбы $t=2,5$ мм, длина болта $l=75$ см, площадь поперечного сечения болта $A_C=6 \text{ см}^2$, а трубки $A_M=12 \text{ см}^2$ (рис. 9.5).

Решение. Так как внешние силы отсутствуют, то при повороте гайки образуется система внутренних самоуравновешенных сил, которые имеют такие направления и величину, что удовлетворяют условиям равновесия сами по себе. Растягивающее усилие в болте и сжимающее усилие в трубке будут равны, но противоположны по направлению. Проведем мысленно сечение I-I (рис. 9.5, б) через болт и трубку и введем силы $N_б$ и $N_{тр}$.

Уравнение равновесия будет:

$$N_C - N_M = 0, \quad N_C = N_M. \quad (а)$$

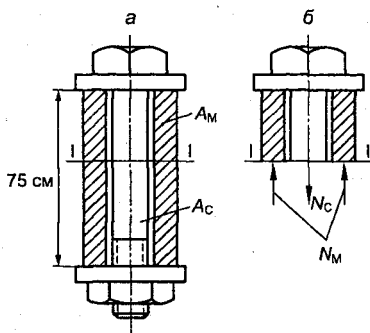


Рис. 9.5

Уравнение перемещений запишется в виде

$$\Delta l_C + (-\Delta l_M) = \frac{1}{4}t.$$

Уравнение перемещений выражает условие: удлинение болта, сложенного с укорочением трубки, равняется перемещению гайки вдоль болта.

Применяя закон Гука, получим

$$\frac{N_C l}{E_C A_C} + \frac{N_M l}{E_M A_M} = \frac{1}{4}t. \quad (6)$$

Решая уравнения (а) и (б) совместно, найдем

$$N_C = N_M = \frac{l(E_M A_M E_C A_C)}{4(E_M A_M + E_C A_C)l} = \frac{0,25 \cdot (1 \cdot 10^7 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 6)}{4 \cdot (1 \cdot 10^7 \cdot 12 + 2 \cdot 10^7 \cdot 6) \cdot 75} = 50000 \text{ Н} = 50 \text{ кН}.$$

Растягивающее напряжение в болте

$$\sigma_C = \frac{N_C}{A_C} = \frac{50000}{6} = 83,3 \text{ МПа}.$$

Сжимающее напряжение в трубке

$$\sigma_M = \frac{-N_M}{A_M} = -\frac{50000}{12} = -41,7 \text{ МПа}.$$

Если бы мы приняли усилия в болте и трубке растягивающими, что во многих случаях представляет определенные удобства, то знаки найденных усилий указали бы на то, что усилие в трубке является сжимающим.

Пример 9.4. Концы круглого вала жестко защемлены на двух неподатливых опорах (рис. 9.6). К валу приложены пары сил с моментами $m_1 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m_2 = 42 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Определить наибольшие касательные напряжения на участках и построить

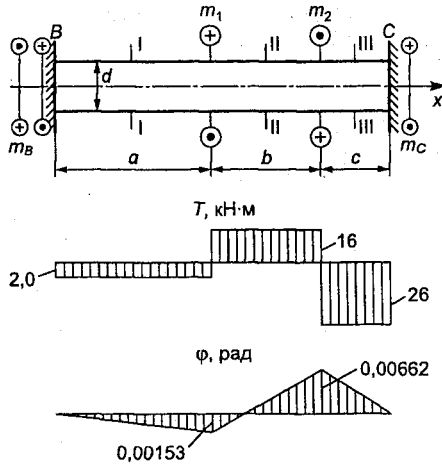


Рис. 9.6

эпюру углов закручивания, если диаметр $d=10$ см, $a=60$ см, $b=40$ см, $c=20$ см.

Решение. Заменяем опорные связи реактивными моментами m_B , m_C и составляем уравнения равновесия:

$$\sum m_x = m_B + m_C + m_1 - m_2 = 0. \quad (a)$$

В единственное уравнение (а) входят две неизвестные (m_B и m_C); задача 1 раз статически неопределима. Дополнительное уравнение перемещений составим, рассматривая основную систему, полученную путем отбрасывания правой опоры C . Под действием моментов m_1 и m_2 сечение C повернется на некоторый угол ϕ_F . Чтобы основная система соответствовала заданной системе, реактивный момент m_C должен привести сечение C в начальное состояние, повернув его на угол ϕ_C . Уравнение перемещений запишется в виде

$$\phi_F + \phi_C = 0 \quad (б)$$

и будет выражать условие отсутствия поворота сечения C относительно сечения B . Выразим ϕ_C и ϕ_F через моменты с учетом знаков:

$$\varphi_F = \frac{m_1 a}{GI_p} - \frac{m_2(a+b)}{GI_p}; \quad \varphi_C = \frac{m_C(a+b+c)}{GI_p}. \quad (\text{в})$$

Подставив выражение (в) в уравнение перемещений (б), после упрощения получим

$$m_C = \frac{m_2(a+b) - m_1 a}{a+b+c} = \frac{42 \cdot 10^5(60+40) - 18 \cdot 10^5 \cdot 60}{60+40+20} = 26 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{см} = 26 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Подставляя m_C в уравнение (а), находим

$$m_B = m_2 - m_1 - m_C = 42 - 18 - 26 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad m_B = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Знак (-) указывает на то, что направление момента выбрано неверно и его необходимо изменить на обратное.

Проводим на участках вала сечения и определяем в сечениях *крутящие моменты*:

$$T_1 = -m_B = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad T_2 = -m_B + m_1 = -2 + 18 = 16 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_3 = -m_B + m_1 - m_2 = -2 + 18 - 42 = -26 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюры крутящих моментов.

Вычисляем *наибольшие касательные напряжения* на участках вала:

$$\tau_{I-I} = \frac{T_1}{W_p} = \frac{2 \cdot 10^5}{196,25} = -10,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{II-II} = \frac{16 \cdot 10^5}{196,25} = 81,5 \text{ МПа}; \quad \tau_{III-III} = \frac{26 \cdot 10^5}{196,25} = -13,2 \text{ МПа};$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 10^3}{16} = 196,25 \text{ см}^3.$$

Строим эпюру углов закручивания, принимая сечение *B* за неподвижное:

$$\varphi_1 = \frac{T_1 a}{GI_p} = -\frac{2 \cdot 10^5 \cdot 60}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 981,25} = -0,00153 \text{ рад};$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 10^4}{32} = 981,25 \text{ см}^4;$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{T_2 b}{GI_p} = -0,00153 + \frac{16 \cdot 10^5 \cdot 40}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 981,25} = 0,00662 \text{ рад};$$

$$\varphi_C = 0,00662 - \frac{26 \cdot 10^5 \cdot 20}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 981,25} = 0,00662 - 0,00662 = 0.$$

Эпюра углов закручивания показана на рис. 9.6. Эпюра показывает, что угол поворота сечения C равен нулю, что удовлетворяет условию задачи.

9.2. Начальные (монтажные) и температурные напряжения

В статически неопределимых системах возможно возникновение напряжений при сборке, из-за неточности изготовления деталей. Такие напряжения называются **начальными** или **монтажными**. Иногда эти напряжения создаются специально, чтобы повысить прочностные характеристики детали из материала, по-разному работающего на растяжение и сжатие.

Обозначим начальное напряжение в опасной точке через $\sigma_{\text{нач}}$, тогда условие прочности в общем виде запишется так:

$$\sigma_{\text{пол}} = \sigma_{\text{нач}} + \sigma_p \leq [\sigma].$$

Если начальное напряжение $\sigma_{\text{нач}}$ и рабочее напряжение σ_p будут противоположных знаков, то рабочее напряжение можно увеличить при том же значении допускаемого напряжения. Так, в строительстве широко применяют армированный, предварительно напряженный бетон. Стальная арматура растягивается с определенным усилием и в таком состоянии заливается бетоном. После затвердевания бетона арматура разгружается, и в бетоне возникают напряжения сжатия. Несущая способность конструкций, работающих на растяжение, увеличивается до 30 %.

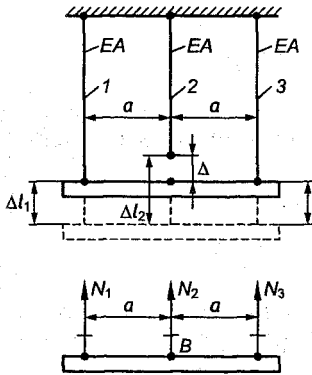


Рис. 9.7

Начальные напряжения зависят от размеров поперечных сечений элементов, свойств материалов и величины неувязки в размерах.

Рассмотрим жесткую балку, которая должна быть подвешена на трех стержнях, причем средний стержень короче крайних на величину Δ . Требуется определить начальные напряжения в стержнях (рис. 9.7).

После принудительной сборки в стержнях возникнут внутренние усилия, которые являются самоуравновешенными. Мысленно проведем сечения через три стержня и составим уравнения равновесия:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 0; \quad N_1 = N_3. \quad (9.1)$$

Имеем два уравнения с тремя неизвестными. Для их решения необходимо составить одно уравнение перемещений. Так как мы приняли, что в стержнях действуют растягивающие усилия, то должны считать балку после сборки сместившейся вниз. Поскольку система симметрична, можно предположить перемещение балки параллельным начальному положению.

Тогда уравнение перемещений будет

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 - \Delta, \text{ или } \Delta l_1 - \Delta l_2 = -\Delta.$$

Используя закон Гука, получим

$$\frac{N_1 l}{EA} - \frac{N_2 l}{EA} = -\Delta;$$

$$N_1 - N_2 = -\frac{\Delta}{l} EA. \quad (9.2)$$

Заметим, что неувязка в размерах вошла в уравнение перемещений. При определении внутренних сил в статически определимых системах уравнения перемещений не требуются. Значит, начальные или монтажные напряжения возникают только в статически неопределимых системах; в статически определимых системах они возникать не могут. Решая уравнения равновесия (9.1) и (9.2) совместно, найдем

$$N_1 = N_3 = -\frac{\Delta}{3l} EA; \quad N_2 = \frac{2}{3} \frac{\Delta}{l} EA.$$

Таким образом, усилия в крайних стержнях оказались сжимающими, а в среднем - растягивающим. Монтажные напряжения соответственно будут

$$\sigma_1 = \sigma_3 = -\frac{\Delta}{3l} E; \quad \sigma_2 = \frac{2}{3} \frac{\Delta}{l} E.$$

При определении усилий и напряжений в элементах стержневых систем часто необходимо наряду с деформациями стержней, вызываемыми силами, учитывать еще деформации, связанные с *температурным воздействием*. Из курса физики известно, что при изменении температуры длина стержней изменяется: при повышении температуры увеличивается, при понижении - уменьшается. Температурные удлинения стержней, если им препятствуют реакции, будут вызывать возникновение внутренних сил, а следовательно, и напряжений, связанных с температурным воздействием. Силы, возникающие в результате температурных удлинений, могут достигать больших величин, нередко являющихся причиной поломок. Чтобы избежать нежелательного действия этих сил, их необходимо учитывать в расчетах конструкций. Рассмотрим стержень с зашпеленными концами (рис. 9.8). Если температура стержня повышается от t_0 до t , а температурному удлинению препятствуют реакции, то в стержне возникнут температурные напряжения.

Обозначим реакции и запишем уравнения равновесия:

$$B_x - C_x = 0; \quad B_x = C_x.$$

Для составления уравнения перемещений выберем основную систему, мысленно отбросив опору C . Тогда стержень получит температурное удлинение, равное

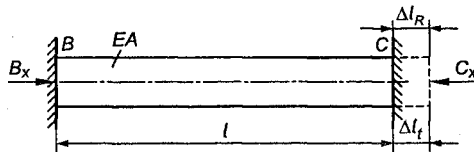


Рис. 9.8

$$\Delta l_t = \alpha l (t - t_0) = \alpha l \Delta t,$$

где α - коэффициент линейного температурного расширения.

Под действием реакции стержень сожмется на величину

$$\Delta l_R = -\frac{C_x l}{EA}.$$

Отсюда *уравнение перемещений* должно выражать условие сохранения положения сечения стержня в месте отброшенной связи неизменным:

$$\Delta l_t + \Delta l_R = 0.$$

Подставляя значения Δl_t и Δl_R в уравнение перемещений, получим

$$C_x = \alpha EA \Delta t.$$

Продольные силы во всех поперечных сечениях стержня будут одинаковыми и равными опорным реакциям.

Температурные сжимающие напряжения будут равны

$$\sigma = -\frac{C_x}{A} = -\alpha E \Delta t. \quad (9.3)$$

Из выражения (9.3) следует, что температурные напряжения пропорциональны модулю продольной упругости материала и коэффициенту линейного температурного расширения.

Рассмотрим жесткую балку, закрепленную на одном шарнире и двух стержнях разной длины и разной площади поперечного сечения (рис. 9.9). Требуется определить усилия в стержнях при повышении температуры на Δt° .

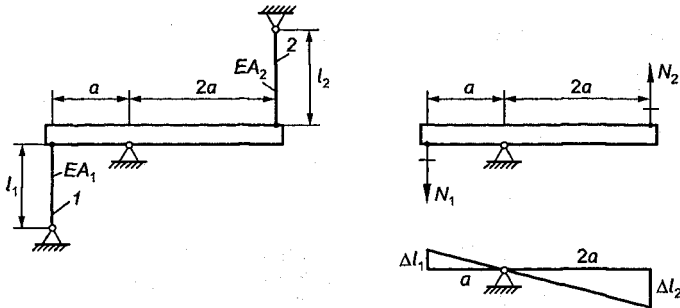


Рис. 9.9

Если бы стержни 1 и 2 были свободными, то при повышении температуры они получили бы определенные удлинения. Наличие жесткой балки вызовет изменение удлинений стержней, в результате чего в них возникнут растягивающие и сжимающие усилия. Образуется система внутренних самоуравновешенных сил.

Проведем мысленно сечение через оба стержня и введем в рассмотрение внутренние силы N_1 и N_2 , при этом для простоты будем принимать их растягивающими. Запишем уравнение равновесия в виде суммы моментов сил относительно шарнира:

$$N_1 a + N_2 2a = 0; \quad N_1 + 2N_2 = 0.$$

Можно еще написать уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на вертикальную ось, но для этого нужно освободить балку от шарнира и ввести в рассмотрение реакцию опоры. Получим еще одно уравнение и новую неизвестную силу – реакцию опоры, которая практически нас не интересует. Итак, имеем 1 раз статически неопределимую систему. Для составления уравнения перемещений сообщим балке некоторый угол поворота согласно принятому направлению сил. Из подобия треугольников получим

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2a}, \text{ или } 2\Delta l_1 = \Delta l_2. \quad (9.4)$$

Удлинение каждого стержня будет складываться из силового и температурного:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} + l_1 \alpha \Delta t; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} + l_2 \alpha \Delta t, \quad (9.5)$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения.

Выражения (9.5) справедливы для сталей до температуры 300–400 °С, так как при большей температуре модуль упругости и коэффициент α изменяются, кроме того, начинают проявляться свойства ползучести. Подставляя значения Δl_1 и Δl_2 из (9.5) в (9.4), получим

$$2 \left(\frac{N_1 l_1}{EA_1} + l_1 \alpha \Delta t \right) = \frac{N_2 l_2}{EA_2} + l_2 \alpha \Delta t,$$

или после преобразований

$$\frac{2N_1 l_1}{A_1} - \frac{N_2 l_2}{A_2} = E\alpha\Delta t(l_2 - 2l_1). \quad (9.6)$$

Уравнение (9.6) показывает, что возникновение температурных напряжений характерно только для статически неопределимых систем, так как изменения температуры входят только в уравнения перемещений, которые для определения усилий в статически определимых системах не требуются.

Решая совместно уравнение (9.6) и уравнение равновесия, найдем

$$N_2 = \frac{E\alpha\Delta t(2l_1 - l_2)A_2 A_1}{4l_1 A_2 + l_2 A_1}; \quad N_1 = -\frac{2E\alpha\Delta t(2l_1 - l_2)A_2 A_1}{4l_1 A_2 + l_2 A_1}$$

Температурные напряжения в стержнях будут:

$$\sigma_1 = \frac{-2E\alpha\Delta t(2l_1 - l_2)A_2}{4l_1 A_2 + l_2 A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{E\alpha\Delta t(2l_1 - l_2)A_1}{4l_1 A_2 + l_2 A_1}$$

Таким образом, в общем случае температурные напряжения определяются не только свойствами материала и разностью температур, но существенно зависят от размеров и площади поперечного сечения стержней, при этом, в зависимости от геометрических размеров, напряжения в стержнях могут менять знак.

Проведем анализ полученных формул:

1) если $2l_1 < l_2$, то $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 < 0$;

2) если $2l_1 > l_2$, то $\sigma_1 < 0$; $\sigma_2 > 0$;

3) если $A_1 = A_2$, $l_1 = l_2$, то $\sigma_1 = -\frac{2}{5}E\alpha\Delta t$; $\sigma_2 = \frac{1}{5}E\alpha\Delta t$.

Температурные напряжения могут достигать больших значений, однако для оценки их опасности важна не величина предела прочности, а деформация материала при разрушении. Поэтому температурные напряжения наиболее опасны для хрупких материалов, разрушение которых происходит при малых деформациях. Если температурная деформация имеет величину, одинаковую с предельной деформацией для данного материала, то разрушение реально. У стали деформации при разрушении очень велики, поэтому температурные напряжения для стальных конструкций не опасны, в пределах могут возникнуть небольшие остаточные деформации. У такого хрупкого мате-

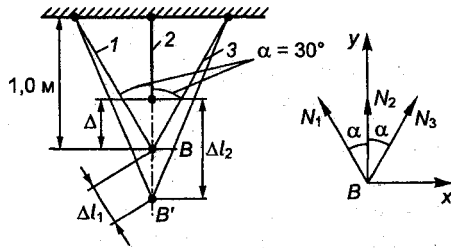


Рис. 9.10

риала, как стекло, деформация при разрыве незначительна, поэтому стекло очень чувствительно к резкому изменению температуры, так как температурные удлинения могут легко достигать значения предельных деформаций при разрыве.

Пример 9.5. Трехстержневая стальная ферма имеет длину вертикального стержня короче на $\Delta=0,5$ мм. При сборке он был установлен на место с начальным натяжением. Определить начальные напряжения в стержнях, если площади стержней одинаковы и $A=3$ см² (рис. 9.10).

Решение. После принудительной сборки в среднем стержне возникнет растягивающее усилие, в крайних стержнях – сжимающие. Так как внешние силы отсутствуют, внутренние силы являются самоуравновешенными.

Проведем мысленно через три стержня сечение, введем силы N_1, N_2, N_3 и составим уравнения равновесия в виде суммы проекций сил на оси x и y . Хотя мы поняли, что внутренние силы будут разных знаков, формально примем их растягивающими, действительные знаки усилий получим, выполнив решение задачи. Из уравнений равновесия получим

$$N_1 = N_3;$$

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = 0. \quad (a)$$

Составим уравнение перемещений, для чего представим, что узел B переместился вниз, что соответствует принятому направлению внутренних сил в стержнях. Тогда уравнение перемещений будет

$$\Delta l_1 = (\Delta l_2 - \Delta) \cos \alpha,$$

или

$$\frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} - \Delta l_2 = -\Delta.$$

Представим удлинения через силы:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 100}{\cos \alpha EA}; \Delta l_2 = \frac{N_2 100}{EA}; \frac{N_1 100}{\cos^2 \alpha EA} - \frac{N_2 100}{EA} = -\Delta,$$

или

$$\frac{N_1 100}{2 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot \cos^2 30} - \frac{N_2 100}{2 \cdot 10^7 \cdot 3} = -0,05.$$

$$1,33N_1 - N_2 = -0,3 \cdot 10^5. \quad (6)$$

Решая уравнения (а) и (б) совместно, найдем

$$N_1 = N_3 = -9804 \text{ Н}; N_2 = 16980 \text{ Н}.$$

Начальные напряжения будут следующими:

$$\sigma_I = \sigma_{III} = -\frac{9804}{3} = -32,7 \text{ МПа}; \sigma_{II} = \frac{16980}{3} = 56,6 \text{ МПа}.$$

Таким образом, боковые стержни сжимаются, средний стержень растягивается.

Пример 9.6. Медная пластинка площадью $A_M = 0,3 \text{ см}^2$ спаяна с двумя стальными пластинками площадью каждая $A_C = 0,8 \text{ см}^2$. Определить температурные напряжения в стали и меди при повышении температуры пластинок на $\Delta t = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ (рис. 9.11, а).

Решение. Так как коэффициент линейного расширения у меди больше, чем у стали $\alpha_M > \alpha_C$, то увеличение температуры вызовет сжатие медной пластинки и растяжение стальных пластинок. Внутренние силы являются самоуравновешенными. Проведем сечение I-I и составим уравнение равновесия (рис. 9.11, б):

$$N_C - N_M = 0; N_C = N_M.$$

Уравнение перемещений должно выражать факт равенства удлинения медной и стальных пластинок. Если бы пластинки

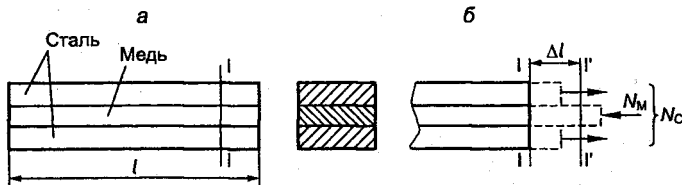


Рис. 9.11

были свободными, то они получили бы температурные удлинения разной величины, показанные пунктиром. Но поскольку пластинки спаяны, их удлинения должны быть равны (см. рис. 9.11, б):

$$\Delta_M = \Delta_C = \Delta l.$$

Заменяя Δ_M и Δ_C их значениями, получим

$$\alpha_M l \Delta t - \frac{N_M l}{E_M A_M} = \alpha_C l \Delta t + \frac{N_C l}{E_C A_C}.$$

Отсюда, используя уравнение равновесия, найдем

$$\begin{aligned} N_C = N_M &= \frac{(\alpha_M - \alpha_C) \Delta t E_M E_C A_M A_C}{E_C A_C + E_M A_M} = \\ &= \frac{(16,5 - 12,5) \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 0,8 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^7 \cdot 0,8 + 1 \cdot 10^7 \cdot 0,3} = 606,3 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Напряжения от изменения температуры

$$\sigma_M = -\frac{606,3}{0,3} = 20,2 \text{ МПа}; \quad \sigma_C = \frac{606,3}{0,8} = 75,8 \text{ МПа.}$$

Результат был бы тем же, если бы мы формально приняли, что в медной и стальных пластинках действуют растягивающие усилия. В этом случае получили бы силу N_M отрицательной.

Пример 9.7. Медная трубка плотно, без давления, надета на стальную трубку при температуре $t = 200^\circ \text{C}$. Определить напряжения, которые возникнут в меди и стали при охлаждении обеих трубок до температуры $t_0 = 20^\circ \text{C}$, если внешний диаметр

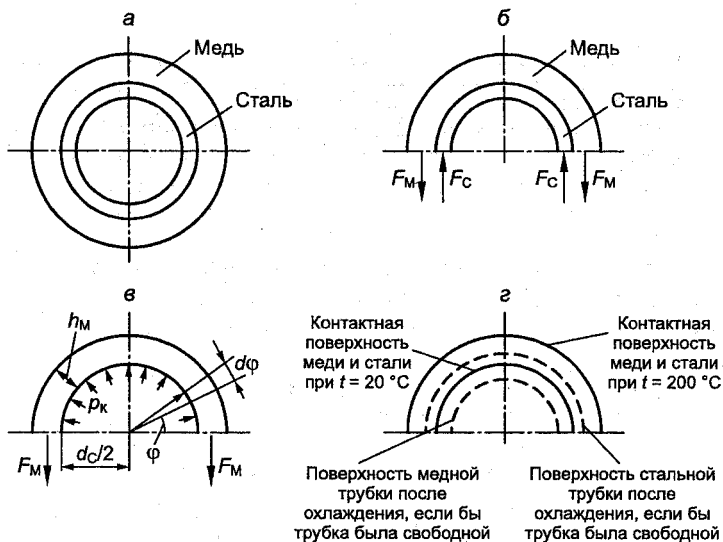


Рис. 9.12

стальной трубки $d_C=14$ см, толщина стальной трубки $h_C=0,4$ см, а медной трубки $h_M=0,6$ см (см. рис. 9.12, а).

Решение. Так как $\alpha_M > \alpha_C$, то при охлаждении возникнет контактное давление p_k между внешней и внутренней трубками. Растягивающее усилие в медной трубке F_M и сжимающее усилие в стальной трубке F_C будут равны (см. рис. 9.12, б):

$$2F_M - 2F_C = 0; \quad 2F_M = 2F_C.$$

Определим растягивающее усилие в медном кольце шириной 1 см и толщиной $h_M=0,6$ см, вырезанном из трубки и нагруженном внутренним давлением p_k , для чего рассмотрим равновесие половины кольца (рис. 9.12, в). Сумма проекций всех сил на вертикальную ось равна

$$2F_M = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_k \frac{d_C}{2} \sin \varphi d\varphi = 2 \frac{p_k d_C}{2}.$$

Откуда

$$F_M = \frac{p_k d_C}{2}$$

Уравнение совместности деформаций должно выражать следующие условия: после охлаждения в медном и стальном кольцах относительные удлинения по окружности одинаковы (рис. 9.12, з):

$$\varepsilon_M = \varepsilon_C,$$

или

$$-\varepsilon_{t_M} + \varepsilon_{p_M} = -\varepsilon_{t_C} - \varepsilon_{p_C}.$$

Подставляя значения, получим

$$-\alpha_M(t-t_0) + \frac{p_k d_C}{2E_M h_M 1,0} = -\alpha_C(t-t_0) - \frac{p_k d_C}{2E_C h_C 1,0}.$$

Откуда находим давление

$$p_k = \frac{2(\alpha_M - \alpha_C)(t-t_0)E_C h_C E_M h_M}{d_C(E_M h_M + E_C h_C)} =$$

$$= \frac{2(16,5 - 12,5)10^{-6} \cdot 180 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 0,4 \cdot 1 \cdot 10^7 \cdot 0,6}{14(1 \cdot 10^7 \cdot 0,6 + 2 \cdot 10^7 \cdot 0,4)} = 352,7 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 3,53 \text{ МПа}.$$

Температурные растягивающее напряжение в медной и сжимающее напряжение в стальной трубках будут

$$\sigma_M = \frac{F_M}{1h_M} = \frac{p_k d_C}{2h_M 1,0} = \frac{352,7 \cdot 14}{2 \cdot 0,6 \cdot 1,0} = 4115 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 41,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = \frac{F_C}{1h_C} = -\frac{p_k d_C}{2h_C 1,0} = -\frac{352,7 \cdot 14}{2 \cdot 0,4 \cdot 1,0} = -6172 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = -61,7 \text{ МПа}.$$

Пример 9.8. Составное кольцо состоит из внутреннего медного кольца и наружного стального. Внешний диаметр медного кольца больше внутреннего диаметра стального кольца на величину $\Delta = 0,15$ мм, поэтому сборка осуществляется путем нагревания наружного кольца. Определить напряжения в стали и меди после сборки, если кольца имеют поперечные сечения:

медное - ширина 1 см, толщина $h_M=0,6$ см, стальное - ширина 1 см, толщина $h_C=0,4$ см. Диаметр поверхности соприкосновения $d=14$ см (рис. 9.13, а).

Решение. Обозначим давление, возникающее на поверхности соприкосновения, через p_k . Растягивающее усилие в стальном кольце и сжимающее усилие в медном кольце будут равны (см. пример 9.7):

$$F_C = F_M = \frac{p_k d}{2}.$$

Уравнение перемещений должно выражать следующее условие: увеличение внутреннего диаметра стального кольца, сложенное с уменьшением внешнего диаметра медного кольца, равняется Δ (рис. 9.13, б):

$$\Delta d_C + (-\Delta d_M) = \Delta.$$

Увеличение внутреннего диаметра стального кольца

$$\Delta d_C = \frac{\sigma_C}{E_C} d = \frac{p_k d^2}{2E_C h_C 1,0}.$$

Уменьшение внешнего диаметра медного кольца

$$\Delta d_M = -\frac{\sigma_M}{E_M} d = -\frac{p_k d^2}{2E_M h_M 1,0}.$$

Подставляя значения Δd_C и Δd_M в уравнение перемещений, найдем давление p_k :

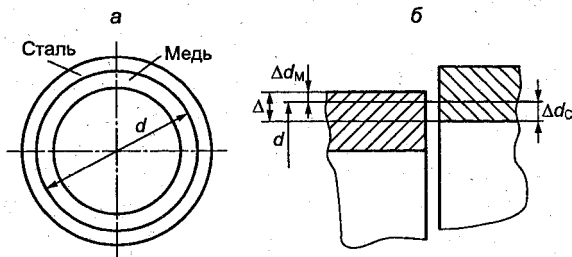


Рис. 9.13

$$\frac{p_K d^2}{2E_C h_C 1,0} + \frac{p_K d^2}{2E_M h_M 1,0} = \Delta;$$

$$p_K = \frac{2\Delta E_M h_M E_C h_C}{d^2 (E_M h_M + E_C h_C)} = \frac{2 \cdot 0,015 \cdot 1 \cdot 10^7 \cdot 0,6 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 0,4}{14^2 (1 \cdot 10^7 \cdot 0,6 + 2 \cdot 10^7 \cdot 0,4)} = 5,25 \text{ МПа.}$$

Напряжение в медном кольце

$$\sigma_M = -\frac{F_M}{1h_M} = -\frac{p_K d}{2h_M 1,0} = -\frac{525 \cdot 14}{2 \cdot 0,6 \cdot 1,0} = -61,3 \text{ МПа.}$$

Напряжение в стальном кольце

$$\sigma_C = \frac{F_C}{1h_C} = \frac{p_K d}{2h_C 1,0} = \frac{525 \cdot 14}{2 \cdot 0,4 \cdot 1,0} = 91,9 \text{ МПа.}$$

Пример 9.9. Определить усилия и напряжение в стержнях системы. Сечение стержня I - 2 см²; стержня II - 3; стержня III - 4 см². Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см² (рис. 9.14).

Решение. Обозначим горизонтальное и вертикальное перемещение узла B соответственно через u и v , считая, что во всех стержнях действуют растягивающие усилия. Шарнир B перейдет в положение B_1 . Запишем удлинения стержней, которые будут равняться проекциям u и v на исходное положение осей стержней:

$$\Delta l_1 = BB'_1 = BC + CB'_1 = u \cos \alpha + v \sin \alpha$$

(см. рис. 9.14, а);

$$\Delta l_2 = u;$$

$$\Delta l_3 = BB''_1 = BC'' - B''_1 C'' = u \cos \alpha -$$

$-v \sin \alpha$ (см. рис. 9.14, б).

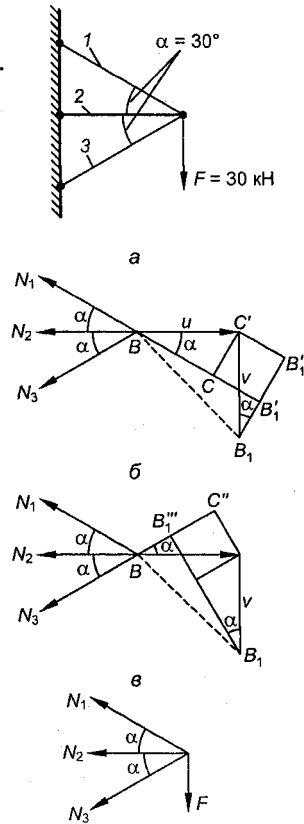


Рис. 9.14

Запишем уравнения равновесия для узла (рис. 9.14, в):

$$\begin{aligned}\sum Y &= N_1 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha - F = 0; \\ \sum X &= N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Исключим из уравнений (а) величины u и v и перейдем к усилиям в стержнях:

$$\Delta l_1 + \Delta l_3 - 2\Delta l_2 \cos \alpha = 0; \quad (в)$$

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1} + \frac{N_3 l_3}{EA_3} - 2\frac{N_2 l_2}{EA_2} \cos \alpha = 0. \quad (г)$$

Выразим длину стержней через длину среднего стержня, которую обозначим через l , получим

$$\frac{N_1}{A_1} + \frac{N_3}{A_3} - 2\frac{N_2 \cos^2 \alpha}{A_2} = 0,$$

или

$$0,5N_1 + 0,25N_3 - 0,66N_2 \cos^2 \alpha = 0. \quad (д)$$

Решая совместно уравнения (д) и уравнения равновесия, найдем усилия в стержнях:

$$N_1 = 25360 \text{ Н}; N_2 = 8040 \text{ Н}; N_3 = -34640 \text{ Н}.$$

Напряжения в стержнях будут следующими:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{25360}{2} = 12680 \text{ Н/см}^2; \sigma_2 = \frac{8040}{3} = 2680 \text{ Н/см}^2; \\ \sigma_3 &= \frac{34640}{4} = -8660 \text{ Н/см}^2.\end{aligned}$$

Глава 10

СДВИГ

10.1. Практические расчеты на срез и смятие

На практике постоянно ведутся расчеты различных соединений, в которых элементы испытывают **сдвиг**. Под сдвигом будем понимать такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях, перпендикулярных к оси стержня, материал находится в напряженном состоянии чистого сдвига или действуют только касательные напряжения.

Такой вид нагружения, можно считать, имеет место при разрезании ножницами тонких стержей, полос и т.д., когда на стержень действуют две равные и противоположно направленные силы F , перпендикулярные к оси стержня (рис. 10.1, *а*).

Под действием сил F в начальный момент элемент $abcd$ несколько изменит свою форму (рис. 10.1, *б*), затем произойдет его разделение на две части по линии NN .

Разрушение от сдвига металлических элементов обычно называют **срезом**, а деревянных и каменных элементов - **скальванием**. Используя метод сечений, найдем, что на участке bc поперечная сила

$$Q = F. \quad (10.1)$$

Поперечная сила создает касательные напряжения τ , которые принимаются равномерно распределенными по площади поперечного сечения стержня (рис. 10.1, *в*).

Как следует из рис. 10.1, *а*, сдвиг всегда сопровождается растяжением (сжатием) и изгибом. Поэтому в поперечных сечени-

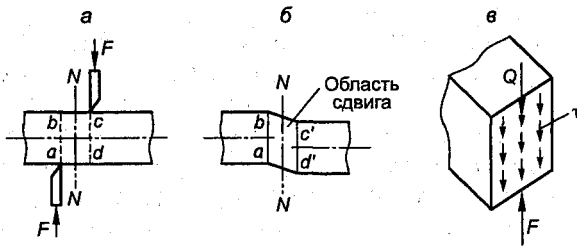


Рис. 10.1

ях соединительных элементов, кроме касательных напряжений, будут действовать еще нормальные напряжения.

Поскольку нормальные напряжения незначительны, ими пренебрегают и расчеты ведут только на сдвиг по величине действующих в сечении касательных напряжений.

Типичными элементами конструкций, рассчитываемых на срез, являются *заклепки, штифты, болты повышенной точности*, устанавливаемые в отверстие без зазоров.

Рассмотрим болтовое соединение, нагруженное силами F (рис. 10.2, а).

Под действием сил F листы будут давить на болт, вызывая на контактной поверхности болта распределенные силы, равнодействующие которых равняются внешним силам F . Кроме того, в результате затяжки гайки со стороны листов на головку болта и гайку будут действовать вертикальные реакции R . На рис. 10.2, а, б, видно, что усилия стремятся срезать болт по сечению $m-n$. Для определения внутренних силовых факторов в сечении $m-n$ рассмотрим равновесия верхней части болта как свободного тела (рис. 10.2, в). В сечении $m-n$ в общем случае действуют поперечная сила Q , нормальная сила N и изгибающий момент M . Из уравнений равновесия получим

$$\begin{aligned} R - N &= 0; N = R; \\ Q - F &= 0; Q = F; \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$M - F \frac{h}{2} = 0; M = F \frac{h}{2}.$$

Исследования показывают, что нормальная сила и изгибающий момент являются малыми по сравнению с Q , поэтому ими пренебрегают и считают, что в сечении $m-n$ действует только одна поперечная сила. Справедливость такого допущения под-

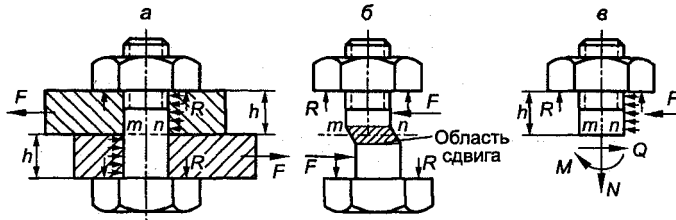


Рис. 10.2

тверждается также тем, что при увеличении нагрузки разрушение болта происходит путем среза.

Поперечная сила вызывает касательные напряжения, распределенные по поперечному сечению m - n болта. Точно характер распределения напряжений не известен. В расчетах принимают, что касательные напряжения равномерно распределяются в поперечном сечении, подверженном сдвигу.

Тогда

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}, \quad (10.3)$$

где $A = \frac{\pi d^2}{4}$ - площадь поперечного сечения болта.

Формула (10.3) используется также при расчете штифтов, заклепок и т.д. Если в соединении нагрузку F воспринимают несколько болтов (заклепок), при этом каждый соединительный элемент имеет несколько плоскостей среза, то общая площадь среза будет равна

$$A = \frac{\pi d^2}{4} nk, \quad (10.4)$$

где n - количество соединительных элементов (болтов, заклепок, шпилек) в соединении; k - число плоскостей среза у одного соединительного элемента.

При расчете болтовых и заклепочных соединений необходимо учитывать, что нагрузка, приложенная к элементам соединений, вызывает **смятие** их поверхностей соприкосновения. Под смятием понимают пластическую деформацию, возникающую на поверхностях соприкосновения в результате местного сжатия давящих друг на друга элементов поверхности. Распределенные по поверхности соприкосновения силы условно называются напряжением смятия. Так как закон распределения напряжений смятия по цилиндрической поверхности контакта неизвестен, то для упрощения принято считать их равномерно распределенными и нормальными в каждой точке к поверхности. Принятое допущение позволяет определять расчетную площадь смятия как произведение диаметра цилиндрической поверхности на длину ее образующей (на толщину соединяемой детали) или как площадь проекции поверхности контакта на плоскость, перпендикулярную к направлению силы, приложенной к соединению.

Рассмотрим цилиндрическую поверхность высотой h , на которой действует $\sigma_{\text{см}}$ (рис. 10.3).

Сила F - равнодействующая распределенных по поверхности соприкосновения сил, будет равна

$$F = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_{\text{см}} h r \sin \varphi d\varphi = -2\sigma_{\text{см}} h r \cos \varphi \Big|_0^{\pi/2} = 2\sigma_{\text{см}} h r = \sigma_{\text{см}} h d. \quad (10.5)$$

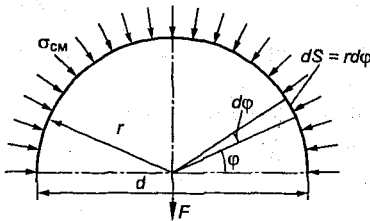


Рис. 10.3

Из (10.5) следует, что напряжение смятия на цилиндрической поверхности

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}}, \quad (10.6)$$

где $A_{\text{см}} = dh$ - площадь проекции сминаемой поверхности на плоскость, перпендикулярную силе F .

Если в соединении нагрузку воспринимают несколько болтов (заклепок), то общая площадь смятия будет равна

$$A_{\text{см}} = dhn, \quad (10.7)$$

где n - число соединительных элементов (болтов, заклепок и т.д.).

Когда в соединение входит несколько деталей, изготовленных из разных материалов, то проверку по напряжениям смятия следует вести для менее прочного материала.

Так как болты (заклепки) ослабляют соединяемые детали (листы, полосы, уголки и т.д.), то последние необходимо проверить по ослабленному отверстиями сечению:

$$\sigma = \frac{F}{\delta(b-n'd)} \leq [\sigma], \quad (10.8)$$

где δ и b - размеры сечения листа; n' - число отверстий в ослабленном сечении; d - диаметр отверстия; $[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

Следует помнить, что расчет заклепочных соединений ведется по диаметру отверстия, т.е. по диаметру уже расклепанного цилиндрического тела заклепки. Уменьшение прочности со-

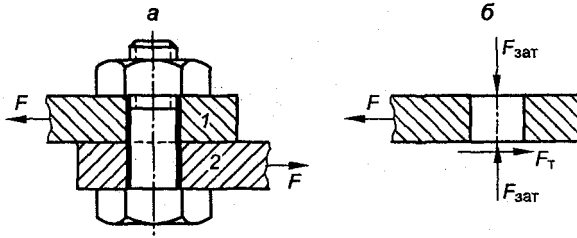


Рис. 10.4

единяемых деталей заклепочными отверстиями является главным недостатком заклепочных соединений. Поэтому в металлоконструкциях расчетная площадь увеличивается на 10–20 % по сравнению с сечениями, не ослабленными заклепочными отверстиями:

$$A_{расч} = (1,1-1,2) \cdot A, \quad (10.9)$$

где A - площадь сечения, определяемая из условия прочности на разрыв, без учета отверстий под заклепки.

В том случае, когда болт устанавливается в отверстие с зазором (рис. 10.4, а), исключаяющим соприкосновение тела болта с поверхностью отверстия, внешняя нагрузка F воспринимается силами трения F_T в стыке, создаваемом затяжкой $F_{зат}$ болта.

Условие отсутствия сдвига деталей в стыке получим, рассматривая равновесие детали 1 (рис. 10.4, б):

$$K_1 F \leq K F_T = K f F_{зат}, \quad (10.10)$$

где K_1 - коэффициент запаса по сдвигу деталей ($K_1 = 1,3-1,5$ при статической нагрузке и $K_1 = 1,8-2,0$ при переменной нагрузке); K - число плоскостей среза в соединении (в данном случае $K = 1$); f - коэффициент трения в стыке ($f = 0,15-0,20$).

Так как внешняя нагрузка на болт не передается, то болт рассчитывается на прочность по силе затяжки:

$$F_{зат} = \frac{K_1 F}{K f}. \quad (10.11)$$

При затяжке гайки стержень болта растягивается нормальной силой $N = F_{зат}$ и закручивается моментом T_p сил трения в резьбе.

Нормальное напряжение от продольной силы равно

$$\sigma = \frac{F_{\text{зат}}}{A_1}, \quad (10.12)$$

где A_1 - площадь сечения болта, ослабленного резьбой.

Касательные напряжения от момента T_p будут

$$\tau = \frac{T_p}{W_p}, \quad (10.13)$$

где W_p - полярный момент сопротивления поперечного сечения болта.

Расчет болта обычно ведется по третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (10.14)$$

Расчеты по формуле (10.13) показывают, что для стандартных болтов с метрической резьбой касательные напряжения приближенно можно принять равными $\tau = (0,41-0,43) \sigma$.

Тогда

$$\sigma_{\text{экв}} = (1,29-1,32)\sigma \approx 1,3\sigma. \quad (10.15)$$

Условие прочности болта, поставленного в отверстие с зазором и работающего на растяжение с кручением, будет

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1,3F_{\text{зат}}}{A_1} = \frac{1,3 \cdot 4 \cdot F_{\text{зат}}}{\pi d_1^2} = \frac{5,2F_{\text{зат}}}{\pi d_1^2} \leq [\sigma], \quad (10.16)$$

где d_1 - внутренний диаметр резьбы болта.

Болты общего назначения изготавливают из низко- и среднеуглеродистых сталей ст. 10, ст. 35.

Легированные стали 35Х, 30ХГСА применяют для высоконагруженных болтов при переменных, ударных нагрузках и высоких температурах.

На сдвиг (срез) рассчитываются также сварные соединения.

Сварное соединение - неразъемное соединение деталей, образуемое с помощью сварного шва. Сварные конструкции являются наиболее экономичными по сравнению с клепаными и литыми. Основными типами сварных соединений являются соединения стыковые, соединения нахлесточные и соединения тавровые.

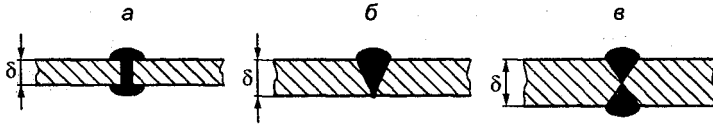


Рис. 10.5

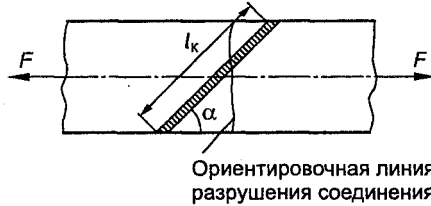


Рис. 10.6

Стыковые соединения применяют, когда листы расположены в одной плоскости. При толщине листов $\delta \leq 8$ мм их кромки перед сваркой не обрабатывают (рис. 10.5, а); при $\delta = 8-20$ мм кромки скашивают и сварка ведется V-образным швом (рис. 10.5, б); при $\delta \geq 20$ мм кромки обрабатывают с двух сторон и сварка ведется X-образным швом (рис. 10.5, в).

Практикой установлено, что при сварке встык соединение стальных деталей разрушается преимущественно на участках основного металла, прилегающих к шву. Поэтому расчет сварного соединения встык выполняется по нормальным напряжениям и размерам сечения детали в зоне шва. Так расчет стыкового шва, расположенного под углом α к действующему усилию (как правило, $\alpha = 45^\circ$) ведется по размерам сечения детали, без учета длины шва, в предположении, что шов равнопрочен основному металлу (рис. 10.6).

Условие прочности сварного стыкового соединения, работающего на растяжение (сжатие), имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{F}{l_{\text{ш}} \delta} \leq [\sigma_3], \quad (10.17)$$

где $l_{\text{ш}}$ - длина шва, равная ширине листа (детали); δ - толщина свариваемого листа; $[\sigma_3]$ - допускаемое напряжение на растяжение (сжатие) сварного соединения.

При сварке стальных деталей принимают $[\sigma_3] = [\sigma]$.

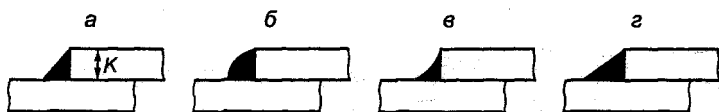


Рис. 10.7

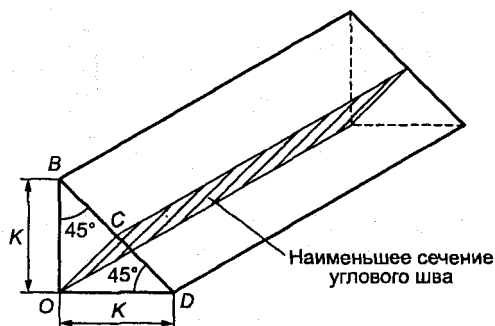


Рис. 10.8

Нахлесточные и тавровые соединения выполняются с помощью угловых или валиковых швов. По форме сечения угловые (валиковые) швы бывают нормальные, условно принимаемые за равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 10.7, а), выпуклые (рис. 10.7, б) и вогнутые (рис. 10.7, в). В элементах конструкций, работающих при переменных напряжениях, применяются швы, имеющие форму неравнобедренных треугольников с отношением основания к высоте 1,5:1; 2:1 (рис. 10.7, г).

На практике наибольшее распространение получили угловые швы нормальной формы. Размер катета K равнобедренного треугольника является основной геометрической характеристикой шва (рис. 10.8).

Выпуклые швы вызывают перерасход наплавленного металла, создают концентрацию напряжений и считаются нецелесообразными как с экономической, так и с технической стороны.

В машиностроительных конструкциях швы с катетом $K < 3,0$ мм практически не применяются; верхний предел катета шва обычно не превышает 20 мм. В местах зажигания и обрыва дуги механические свойства швов ухудшаются, поэтому швы короче 30 мм не применяются. Швы меньших размеров применяются только в качестве нерабочих соединений.

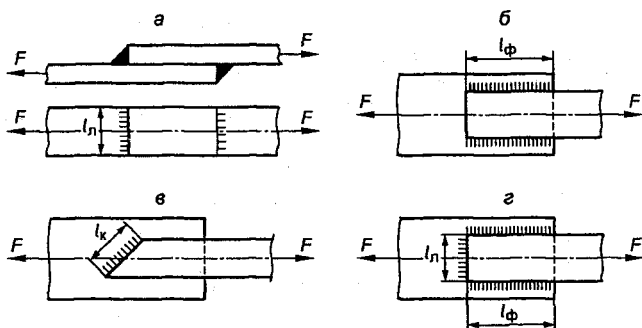


Рис. 10.9

В зависимости от расположения шва по отношению к линии действия силы различают швы: лобовые (рис. 10.9, а), фланговые (рис. 10.9, б), косые (рис. 10.9, в) и комбинированные (рис. 10.9, з).

По методу, принятому в инженерной практике, расчет лобовых и фланговых швов производится на срез.

В основу метода положено допущение о равномерном распределении касательных напряжений по расчетной высоте шва, совпадающей при ручной сварке с биссектрисой ОС прямого угла условного равнобедренного треугольника *ОВД* (см. рис. 10.8), а при других технологических процессах определяемой величиной *Кβ*. Расчетная высота шва *Кβ* зависит от глубины проплавления, от технологического процесса сварки (ручная, автоматическая и др.). При ручной и многопроходной автоматической и полуавтоматической сварке $\beta = 0,7$; при двух- и трехпроходной полуавтоматической сварке $\beta = 0,8$; при двух- и трехпроходной автоматической и однопроходной полуавтоматической сварке $\beta = 0,9$ и при однопроходной автоматической сварке $\beta = 1,1$.

Условие прочности для лобовых и фланговых швов определяется выражением

$$\tau = \frac{F}{\beta K l_p} \leq [\tau_s], \quad (10.18)$$

где βK - расчетная высота шва; l_p - суммарная длина шва; расчетная длина фланговых швов с учетом концентрации напряжений не должна превышать $l_p \leq 50 K$; $[\tau_s]$ - допускаемое напряжение на срез для сварного шва.

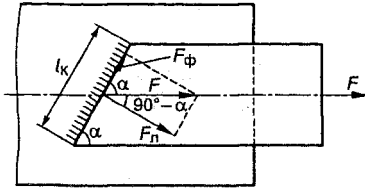


Рис. 10.10

Лобовые швы обладают значительной жесткостью, они разрушаются при очень малых остаточных деформациях, поэтому плохо сопротивляются действию повторно-переменных и ударных нагрузок.

Фланговые швы относятся к вязким, разрушаются при больших остаточных деформациях и имеют на практике широкое применение.

Косые швы направлены под углом α к действующему усилию (рис. 10.10). Они обычно применяются одновременно с лобовыми и фланговыми швами.

Разложим силу F по направлению, перпендикулярному к шву и вдоль шва:

$$\begin{aligned} F_n &= F \cos(90-\alpha) = F \sin\alpha; \\ F_\phi &= F \cos\alpha. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Используя формулы для лобового и флангового швов, получим

$$\tau_n = \frac{F \sin\alpha}{\beta K l_K}; \quad \tau_\phi = \frac{F \cos\alpha}{\beta K l_K}. \quad (10.20)$$

Условие прочности для косого шва получим, складывая геометрически касательные напряжения от действия сил F_n и F_ϕ :

$$\tau = \sqrt{\tau_n^2 + \tau_\phi^2} = \sqrt{\frac{F^2 \sin^2 \alpha}{(\beta K l_K)^2} + \frac{F^2 \cos^2 \alpha}{(\beta K l_K)^2}} = \frac{F}{\beta K l_K} \leq [\tau_\sigma]. \quad (10.21)$$

Расчет комбинированных швов производится согласно принципу независимости действия сил. Считается, что в соединении нагрузка распределяется пропорционально несущей способности отдельных швов. Условие прочности для соединений с лобовыми и фланговыми швами, нагруженных силой F , определяется по выражению

$$\tau = \frac{F}{\beta K_n l_n + \beta K_\phi l_\phi} \leq [\tau_\sigma], \quad (10.22)$$

где l_{Φ} и l_{Δ} - соответственно длины фланговых и лобовых швов; K_{Δ} и K_{Φ} - соответственно катеты флангового и лобового швов.

Если катеты всех швов, входящих в состав комбинированного соединения, равны, то расчет ведется по длине периметра шва L :

$$\tau = \frac{F}{\beta KL} \leq [\tau_{\text{э}}]. \quad (10.23)$$

Тавровые соединения применяются при соединении элементов, расположенных во взаимно перпендикулярных плоскостях. Эти соединения выполняются угловыми швами без разделки кромок (рис. 10.11, а) или стыковым швом с разделкой кромок (рис. 10.11, б): односторонней при толщине листов 4-26 мм и двухсторонней при толщине элементов 12-60 мм.

При работе таврового соединения на растяжение (сжатие), выполненного двумя угловыми швами без разделки кромок, разрушение угловых швов происходит по косому сечению с расчетной высотой βK .

Условие прочности соединения имеет следующий вид:

$$\tau = \frac{F}{2\beta Kl} \leq [\tau_{\text{э}}]. \quad (10.24)$$

Если шов выполнен с разделкой кромок, то его размеры считаются одинаковыми с размерами привариваемого элемента и условие прочности получается из предположения, что нагрузка передается через шов:

$$\sigma = \frac{F}{\delta l} \leq [\sigma], \quad (10.25)$$

где δ - толщина листа; l - длина шва.

Когда свариваемые элементы нагружены поперечными силами, напряжения в сварных швах находят, считая, что поперечная сила воспринимается только швами, параллельными си-

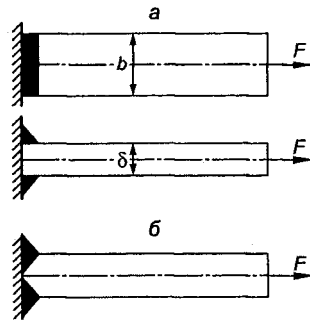


Рис. 10.11

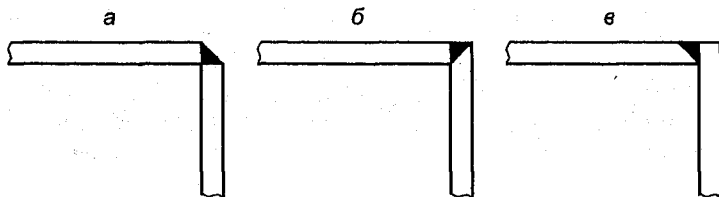


Рис. 10.12

ле, и что напряжения по сечению шва распределяются равномерно. Условие прочности будет таково:

$$\tau_Q = \frac{Q}{2\beta Kl} \quad (10.26)$$

Угловые соединения (рис. 10.12) применяются в основном в связующих элементах конструкций и расчету не подлежат.

Расчет сварных соединений строительных конструкций производится согласно СНиПу по предельному состоянию, соответствующему потере несущей способности конструкции или непригодности ее к дальнейшей эксплуатации. В основу расчета по предельному состоянию положено нормативное сопротивление, в качестве которого принято наименьшее значение предела текучести стали.

Расчетное сопротивление R получают путем деления нормативного сопротивления на коэффициент безопасности по материалу K_M , учитывающему неоднородность свойств материала. В табл. П.24 приведены расчетные сопротивления для сварных соединений.

При расчете строительных конструкций по этому методу величина допускаемых напряжений определяется с учетом коэффициента надежности K_H и коэффициента условий работы m :

$$[\sigma] = \frac{R \cdot m}{K_H}, \text{ или } [\tau] = \frac{R_y \cdot m}{K_H}, \quad (10.27)$$

где R - расчетное сопротивление на растяжение (сжатие); R_y - расчетное сопротивление на срез.

Коэффициенты условий работы m для некоторых элементов конструкций имеют следующие значения: для балок и сжатых элементов ферм $m = 0,9$; для сжатых раскосов, пространственных конструкций $m = 0,9$; для сжатых одиночных уголков плоских систем $m = 0,75$; для колонн зданий, подкрановых балок кранов грузоподъемностью более 50 кН $m = 0,9$.

Анализ разрушений сварных соединений при действии переменных нагрузок показывает, что разрушение обычно происходит в прилегающих ко шву зонах. Это объясняется наличием в зоне концентраторов напряжений от шва, а также понижением предела выносливости в сравнении с основным металлом, не подвергшимся отпуску. Наличие технологических дефектов (шлаковых включений, пор, непроваров и т.п.) резко снижает прочность сварных соединений при переменных нагрузках. Существенное влияние на предел выносливости оказывает конструктивная форма углового шва. Предел выносливости сварного соединения, выполненного угловым швом с отношением катетов 1,5:1 и 2,0:1, намного выше, чем выполненного нормальным угловым швом. Это объясняется тем, что в первом случае обеспечивается более плавный переход от шва к основному металлу. Сопротивление усталости сварных соединений из низкоуглеродистых и низколегированных сталей увеличивается при механической зачистке швов, при этом чем выше в сварном соединении коэффициент концентрации напряжений, тем эффективнее поверхностная обработка швов.

На рис. 10.13 приведены рекомендуемые конструктивные формы соединений со стыковыми и угловыми швами, работающими при переменных нагрузках.

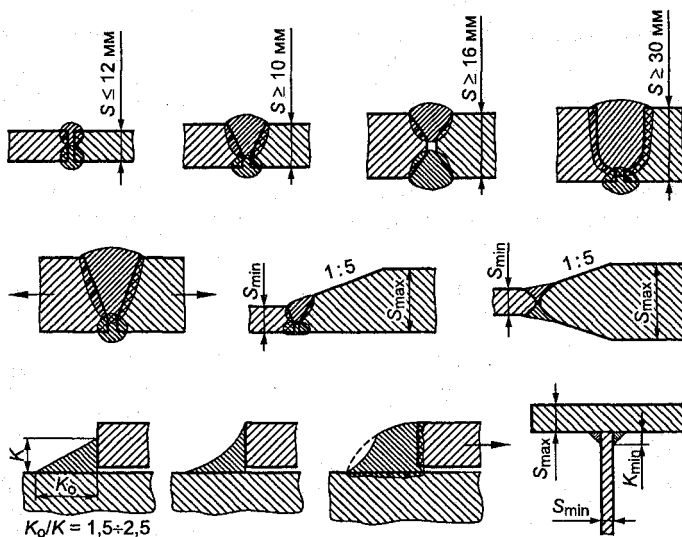


Рис. 10.13

Приведенные на рис. 10.13 типы соединений являются рациональными, так как обеспечивают максимальное снижение концентрации напряжений.

10.2. Допускаемые напряжения для сварных, болтовых и заклепочных соединений

Расчет сварных соединений машиностроительных конструкций проводится по допускаемым напряжениям. Допускаемые напряжения при статических нагрузках $[\sigma]$ устанавливаются с учетом свойств материала, качества технологического процесса сварки, характера нагрузки (постоянная, переменная) и принимаются в зависимости от допускаемых напряжений основного металла при растяжении:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}, \quad (10.28)$$

где σ_T – предел текучести; n – коэффициент безопасности, принимаемый в пределах 1,4–1,6.

Допускаемые напряжения для сварных соединений низко- и среднеуглеродистых сталей, а также низколегированных сталей (типа 14ХГС, 15ГС, 15ХСНД, 19Г и других обыкновенного качества при статических нагрузках) определяются как производные от $[\sigma]$ (табл. 10.1).

Таблица 10.1

Вид нагружения	Тип шва	Технологический процесс	Допускаемое напряжение
Растяжение, сжатие	Стыковой	Дуговая, автоматическая и полуавтоматическая под флюсом, в среде углекислого газа	$[\sigma]$
« »	Стыковой	Дуговая электродами Э42А, Э46А, Э50А, контактная	$[\sigma]$
Срез	Угловой	Дуговая, автоматическая и полуавтоматическая под флюсом, в среде углекислого газа	$0,8[\sigma]$
« »	Стыковой	« »	$0,65[\sigma]$

Примечание. $[\sigma]$ – допускаемое напряжение основного металла, соединяемых элементов на растяжение. При переменных нагрузках допускаемое напряжение понижается по сравнению со статическими значениями.

Допускаемые напряжения на срез берутся в пределах $[\tau_s] = (0,5-0,6)[\sigma]$. Допускаемые напряжения при сжатии коротких элементов принимаются равными $[\sigma]$, при сжатии длинных элементов – принимаются равными $[\sigma]$, φ – коэффициент продольного изгиба.

В настоящее время единой методики расчета прочности сварных соединений при переменных нагрузках для всех отраслей не имеется. Нормативные материалы, предлагаемые различными ведомствами, имеют различия, связанные с условиями работы конструкций.

В *строительных конструкциях* при переменных нагрузках допускаемые напряжения уменьшаются по сравнению с их статическими значениями:

$$[\sigma]_p = [\sigma] \cdot \gamma, \quad (10.29)$$

где $\gamma \leq 1,0$ - коэффициент, зависящий от коэффициента асимметрии цикла r .

Коэффициент γ , если наибольшее напряжение растягивающее, будет

$$\gamma = \frac{c}{a - br}, \quad (10.30)$$

если наибольшее напряжение *сжимающее*:

$$\gamma = \frac{c}{b - ar}. \quad (10.31)$$

Значения коэффициентов a , b и c приведены в табл. П.25.

Характеристика цикла $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ (где σ_{\min} и σ_{\max} - напряжения, берутся со своими знаками).

По методике расчета сварных соединений *машиностроительных конструкций*, согласно нормам подъемно-транспортных машин, проектирования кранов, допускаемые напряжения в основном металле, расположенном в околшовной зоне и в сварном шве, находятся по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_r}{n}, \quad (10.32)$$

где σ_r - предел выносливости для элементов конструкций с учетом эффективного коэффициента концентрации напряжений K_σ и характеристики цикла r ; n - коэффициент безопасности, который можно принять равным 1,6.

Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений K_σ для некоторых типов сварных соединений элементов конструкций (основного металла) приведены в табл. П.26, для сварных швов – в табл. П.27. Значения пределов выносливости σ_r даны в табл. П.28.

Для пределов ограниченной выносливости ($N \leq 2 \cdot 10^6$) данные табл. П.28 необходимо умножить на коэффициент ζ , значения которого приведены в табл. П.29.

Соединительные элементы конструкций изготавливают, как правило, из пластичных материалов. Так, болты, шпильки общего назначения делают из низко- и среднеуглеродистых сталей марок Ст10 – Ст35: заклепки изготавливают из Ст0, Ст2, Ст3 с низким содержанием углерода, а также из цветных металлов – меди, латуни, алюминия.

Материал в области сдвига (см. рис. 10.1, 10.2) находится в напряженном состоянии чистого сдвига. Тогда условие прочности на сдвиг (срез), согласно (8.16) и (8.18), по третьей и четвертой теориям прочности можно записать в общем виде:

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad (10.33)$$

где τ_{\max} – максимальное касательное напряжение, определяемое по формулам (10.3), (10.20), (10.21), (10.22), (10.24); (10.26); $[\tau]$ – допускаемое напряжение на сдвиг, принимается для болтов, шпилек по третьей и четвертой теориям прочности, равным $(0,5-0,6) \cdot [\sigma]$; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение на растяжение.

Условие прочности на смятие имеет вид

$$\sigma_{\text{см}} \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (10.34)$$

где $\sigma_{\text{см}}$ – напряжение смятия, определяемое по формуле (10.6); $[\sigma_{\text{см}}]$ – допускаемое напряжение на смятие, устанавливается опытным путем и принимается равным $\sigma_{\text{см}} = (2,0-2,5) \cdot [\sigma]$.

Условие прочности на смятие должно выполняться для заклепки (соединительного элемента) и для соединяемых деталей. Расчет ведется для менее прочного материала.

Величины допускаемых напряжений для заклепок на сдвиг и смятие зависят в основном от характера обработки отверстий (продавленные или сверленные) и характера внешней нагрузки (статическая, динамическая). Для стальных заклепок рекомендуемые величины допускаемых напряжений при статической нагрузке приведены в табл. 10.2.

Таблица 10.2. Допускаемые напряжения для стальных заклепок при статической нагрузке

Вид напряжения	Обработка отверстия	Допускаемые напряжения, Н/см ²	
		Ст0 и Ст2	Ст3
Сдвиг [τ]	Сверление	14 000	14 000
	Продавливание	10 000	10 000
Смятие [$\sigma_{см}$]	Сверление	28 000	32 000
	Продавливание	24 000	28 000

Примечание. При действии переменных нагрузок допускаемые напряжения уменьшаются на 10–20 %.

Условия прочности на сдвиг (срез) и на смятие позволяют определять диаметр, необходимое количество заклепок или болтов, длину сварных швов, несущую способность соединений.

Пример 10.1. Два листа сечением 80×6 мм соединены с помощью двух накладок толщиной 5 мм каждая, растягиваются усилием $F = 40$ кН. Определить число заклепок для скрепления полос, если допускаемые напряжения заклепок на срез [τ] = 75 МПа, на смятие [$\sigma_{см}$] = 240 МПа, листов на растяжение [σ] = 160 МПа (рис. 10.14).

Решение. Расчет соединения сводится к определению диаметра заклепок и проверке прочности листа в ослабленном сечении. При проектировании заклепочного соединения диаметр наклепки выбирается в зависимости от толщины склепываемых деталей:

$$d_0 = (1,5-2,5)\delta,$$

где d_0 – диаметр заклепки; δ – толщина склепываемых листов.

При соединении деталей различной толщины диаметр заклепки выбирается по средней толщине $\delta_{ср}$ соединяемых элементов. Средняя толщина склепываемых элементов

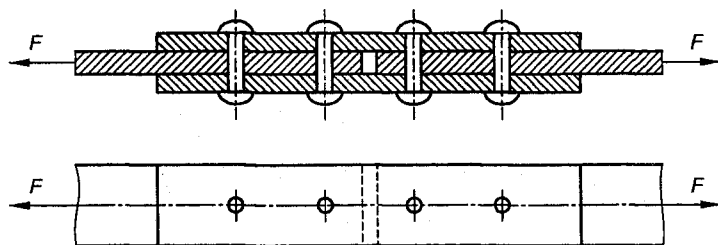


Рис. 10.14

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{8+2,5}{3} = 6 \text{ мм.}$$

Диаметр заклепки $d_0 = (1,5-2,5) \cdot 6 = 9,0-15,0$ мм. Принимаем диаметр заклепки $d_0 = 12$ мм; диаметр отверстия $d = 13$ мм.

Из условия прочности на срез (формула 10.3)

$$\frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} n K} \leq [\tau],$$

где d - диаметр отверстия под заклепку.

Определяем необходимое количество заклепок

$$n = \frac{4F}{\pi d^2 K [\tau]} = \frac{4 \cdot 40 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1,3^2 \cdot 2 \cdot 7500} = 2.$$

Проверяем заклепки на смятие. Так как суммарная толщина накладок $2 \cdot \delta_{\text{н}} = 2 \cdot 0,5 = 1,0$ см больше, чем толщина полосы, то в формулу (10.6) подставляем толщину листа $\delta_{\text{л}} = 0,8$ см:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{d \delta_{\text{л}} n} = \frac{40 \cdot 10^3}{1,3 \cdot 0,8 \cdot 2} = 192,3 \text{ МПа} \leq [\sigma_{\text{см}}] = 240 \text{ МПа.}$$

Проверяем прочность листов на разрыв по ослабленному сечению:

$$\sigma = \frac{F}{\delta_{\text{л}} (b - n'd)} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,8 \cdot (8 - 1 \cdot 1,3)} = 74,6 \text{ МПа} \leq [\sigma_{\text{см}}].$$

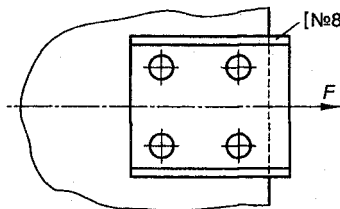


Рис. 10.15

Пример 10.2. Рассчитать заклепочное соединение швеллера № 8 с листом толщиной $\delta = 10$ мм. Заклепки расположить в два ряда, отверстия под заклепки - сверленные, допустимое напряжение для швеллера на разрыв $[\sigma] = 160$ МПа, материал заклепок - Ст3 (рис. 10.15).

Решение. Выбираем диаметр заклепки. Средняя толщина склепываемых элементов

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{10+4,5}{2} = 7,25 \text{ мм.}$$

Из таблицы сортамента прокатной стали находим площадь поперечного сечения швеллера № 8: $A = 8,98 \text{ см}^2$, толщина стенки $\delta = 4,5 \text{ мм}$.

Диаметр заклепки

$$d_0 = (1,5-2,5) \cdot 7,25 = 10,9-18 \text{ мм.}$$

Принимаем диаметр заклепки $d_0 = 16 \text{ мм}$, диаметр отверстия $d = 16,5 \text{ мм}$.

Определяем усилие F из условия прочности швеллера на разрыв:

$$F = A_{\text{нетто}}[\sigma] = (8,98 - 2 \cdot 0,45 \cdot 1,65) \cdot 16000 = 120 \text{ кН.}$$

Определяем необходимое количество заклепок. Из табл. 10.2 для заклепок Ст3 допускаемые напряжения на сдвиг $[\tau] = 140 \text{ МПа}$, на смятие $[\sigma_{\text{см}}] = 320 \text{ МПа}$. Заклепки односрезные:

$$n = \frac{4F}{\pi d^2 K [\tau]} = \frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1,65^2 \cdot 1 \cdot 14000} = 4,01.$$

Принимаем 4 заклепки.

Проверяем заклепки на смятие

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{d \delta n} = \frac{120 \cdot 10^3}{1,65 \cdot 0,45 \cdot 4} = 269,3 \text{ МПа} \leq [\sigma_{\text{см}}] = 320 \text{ МПа.}$$

Пример 10.3. Стержень из уголкового профиля размером $100 \times 100 \times 10 \text{ мм}$ приварен к колонне фланговыми швами (рис. 10.16). Определить длину швов обушка $l_{\text{об}}$ и пера $l_{\text{п}}$, если допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, допускаемое напряжение для сварного шва на срез $[\tau_s] = 0,6 \times [\sigma]$. Катет шва принять равным толщине полки уголка. Сварка ручная ($\beta = 0,7$).

Решение. Определяем допускаемую нагрузку на уголок. Из таблицы сортамента для уголка $100 \times 100 \times 10 \text{ мм}$ берем площадь $A = 19,2 \text{ см}^2$, $z_0 = 2,83 \text{ см}$, $b = 10 \text{ см}$:

$$F = A[\sigma] = 19,2 \cdot 16000 = 307200 \text{ Н.}$$

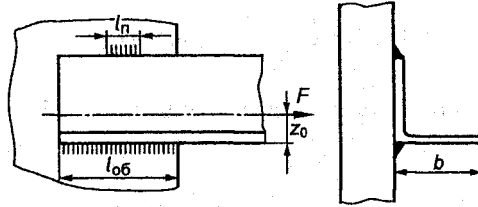


Рис. 10.16

Усилие F распределяется между швами обушка и пера обратно пропорционально расстояниям этих швов до линии действия усилия F . Отсюда найдем

$$F_{об} = F \frac{b - z_0}{b} = 307200 \frac{10 - 2,83}{10} = 221184 \text{ Н,}$$

$$F_{п} = F - F_{об} = 307200 - 221184 = 86016 \text{ Н.}$$

Используя условия прочности (10.19), находим длины швов с учетом действующих усилий:

$$l_{об} = \frac{F_{об}}{0,7k[\tau_3]} = \frac{221184}{0,7 \cdot 1,0 \cdot 0,6 \cdot 16000} = 36 \text{ см;}$$

$$l_{п} = \frac{F_{п}}{0,7k[\tau_3]} = \frac{86016}{0,7 \cdot 1,0 \cdot 0,6 \cdot 16000} = 13 \text{ см.}$$

Принимаем длины швов, добавив по 1 см на непровар в начале и в конце шва, следующими:

$$l_{об} = 36 + 1 = 37 \text{ см; } l_{п} = 13 + 1 = 14 \text{ см.}$$

Пример 10.4. Определить несущую способность сварного соединения уголка $90 \times 90 \times 9$ мм из стали С 44/29, приваренного однопроходной полуавтоматической сваркой ($\beta = 0,8$) к косынке лобовым швом $l_{п} = 9$ см и двумя фланговыми швами $l_{ф} = 15$ см при катете швов $K = 0,8$ см. Характеристика цикла $r = 0,2$. Коэффициент безопасности $n = 1,5$.

Решение. По табл. П.26 для соединения с двумя фланговыми и лобовым швом коэффициент концентрации принимаем равным $K_3 = 4,0$; предел выносливости, согласно табл. П. 28, при $K_3 = 4,0$ и $r = 0,2$, берем равным $\sigma_{0,2} = 61$ МПа. Допускаемое напряжение по формуле (10.32) будет

$$[\sigma]_r = \frac{\sigma_{0,2}}{1,5} = \frac{6100}{1,5} = 4066,7 \text{ Н/см}^2.$$

Несущая способность уголка (площадь $A = 15,6 \text{ см}^2$)

$$F = [\sigma]_r \cdot A = 4066,7 \cdot 15,6 = 63441 \text{ Н} \approx 63 \text{ кН}.$$

Для сварных швов, согласно табл. П.27 и П.28, находим

$$K_3 = 2,5; \sigma_{0,2} = 9800 \text{ Н/см}^2.$$

Допускаемое напряжение на срез (табл. 10.1) равно

$$[\tau_3] = 0,65 \frac{\sigma_{0,2}}{1,5} = 0,65 \frac{9800}{1,5} = 4247 \text{ Н/см}^2.$$

Несущая способность швов

$$F = \beta K (l_{\text{л}} + 2l_{\text{ф}}) [\tau_3] = 0,8 \cdot 0,8 (9 + 2 \cdot 15) \cdot 4247 = 105997 \text{ Н} = 106 \text{ кН}.$$

Несущая способность соединения по меньшему значению силы составляет $F = 63 \text{ кН}$.

Пример 10.5. Определить согласно СНиПу несущую способность сварного соединения уголка $90 \times 90 \times 9 \text{ мм}$ из стали С 44/29, приваренного ручной сваркой ($\beta = 0,7$) к косынке лобовым швом $l_{\text{л}} = 9 \text{ см}$ и двумя фланговыми швами $l_{\text{ф}} = 15 \text{ см}$ при катете швов $K = 0,8 \text{ см}$. Расчетное сопротивление на растяжение в металле (табл. П.24) $R = 260 \text{ МПа}$; на срез в угловых швах $R_y = 200 \text{ МПа}$; число нагружений $N > 5 \cdot 10^6$; коэффициент условия работы $m = 0,9$; коэффициент надежности $K_{\text{н}} = 1,2$; характеристика цикла $r = 0,2$.

Решение. Вычисляем допускаемое напряжение в основном металле при статическом нагружении:

$$[\sigma] = \frac{R \cdot m}{K_{\text{н}}} = \frac{260 \cdot 0,9}{1,2} = 195 \text{ МПа} = 19500 \text{ Н/см}^2.$$

Допускаемое напряжение в угловых сварных швах при статическом нагружении

$$[\tau_3] = \frac{R_y \cdot m}{K_{\text{н}}} = 200 \frac{0,9}{1,2} = 150 \text{ МПа} = 15000 \text{ Н/см}^2.$$

Согласно табл. П. 26 соединение относится к группе 8.

По табл. П. 25 находим коэффициенты

$$c = 0,85; a = 6,0; b = 5,4;$$

$$\gamma = \frac{c}{b - ar} = \frac{0,85}{5,4 - 6,0 \cdot 0,2} = 0,202.$$

Допускаемое напряжение в основном металле при переменных нагрузках

$$[\sigma]_p \cdot \gamma = 19500 \cdot 0,202 = 3939 \text{ Н/см}^2.$$

Несущая способность по основному металлу в зоне сварных швов при переменных нагрузках

$$F = A[\sigma]_p \cdot \gamma = 15,6 \cdot 3939 = 61448,4 \text{ Н} = 61 \text{ кН}.$$

Проверяем равнопрочность сварных швов по основному металлу при статическом нагружении.

Несущая способность уголка при статическом нагружении

$$F_{уст} = A[\sigma]_p = 15,6 \cdot 19500 = 304200 \text{ Н} = 304 \text{ кН}.$$

Несущая способность угловых швов при статическом нагружении при $\beta = 0,7$; $K = 0,8$ см

$$F_{ш.ст} = \beta K (l_{л} + 2l_{ф}) [\tau_э] = 0,7 \cdot 0,8 (9 + 2 \cdot 30) \cdot 15000 = 327600 \text{ Н} = 327 \text{ кН}.$$

Так как $F_{ш.ст} > F_{уст}$, то проверка прочности сварных швов при переменных нагрузках не требуется.

Несущая способность сварного соединения при переменных нагрузках определяется значением $F = 61$ кН.

Пример 10.6. Проверить прочность стальной полосы шириной 18 см и толщиной $\delta = 20$ мм, приваренной ручной сваркой ($\beta = 0,7$) к косынке двумя фланговыми швами длиной $l_{ф} = 15$ см при катете $K = 10$ мм. Материал С 38/23. Усилие $F = 200$ кН, число нагружений $N = 2 \cdot 10^5$, коэффициент асимметрии $r = 0,2$. Коэффициент безопасности $n = 1,6$.

Решение. По табл. П. 26 для группы 8 коэффициент концентрации напряжений в основном металле в зоне фланговых

швов $K_3 = 3,2$. По табл. П. 28 при $N = 5 \cdot 10^6$ и $r = 0,2$ предел выносливости $\sigma_r = 76$ МПа. По табл. П. 29 для числа циклов $N = 2 \cdot 10^5$ и $K_3 = 3,2$ коэффициент $\zeta \cong 1,8$.

Предел ограниченной выносливости равен

$$\sigma_{r_{огр}} = 76 \cdot 1,8 = 136,8 \text{ МПа.}$$

Допускаемое напряжение в основном металле при коэффициенте безопасности $n = 1,6$:

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_{r_{огр}}}{n} = \frac{136,8}{1,6} = 85,5 \text{ МПа} = 8550 \text{ Н/см}^2.$$

Напряжение в полосе от силы $F = 200$ кН:

$$F = \frac{F}{A} = \frac{200 \cdot 10^3}{18 \cdot 2} = 5556 \text{ Н/см}^2 = 56 \text{ МПа.}$$

Так как $\sigma < [\sigma]_p$, то прочность полосы обеспечена.

Для сварных швов, согласно табл. П. 27 и П. 28, находим

$$K_3 = 3,0; \sigma_r = 82 \text{ МПа.}$$

Допускаемое напряжение в шве на срез при $n = 1,6$ равно

$$[\tau_3] = \frac{0,65 \cdot 82}{1,6} = 33,3 \text{ МПа} = 3330 \text{ Н/см}^2.$$

Несущая способность швов при $\beta = 0,7$

$$F_{ш} = \beta \cdot K \cdot 2l_{ф} [\tau_3] = 0,7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 3330 = 69930 \text{ Н} = 70 \text{ кН.}$$

Несущая способность полосы

$$F_{п} = A \cdot [\sigma]_p = 18 \cdot 2 \cdot 8550 = 307800 \text{ Н} = 308 \text{ кН.}$$

Следовательно, по всем параметрам прочность соединения при нагрузке $F = 200$ кН обеспечена.

Глава 11

ИЗГИБ

11.1. Виды изгибов

Вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки действует изгибающий момент, называется **изгибом**. В зависимости от наличия в поперечных сечениях силовых факторов различают следующие виды изгиба:

а) *чистый*, когда в поперечных сечениях действует только один изгибающий момент M , а все другие силовые факторы отсутствуют;

б) *поперечный*, когда в поперечных сечениях одновременно с изгибающим моментом M действует поперечная сила Q , при этом крутящий момент T и нормальная сила N могут действовать в сечениях и могут отсутствовать;

в) *продольный и продольно-поперечный*, когда в поперечных сечениях одновременно с нормальной N и поперечной Q силами действует изгибающий момент M , крутящий момент отсутствует.

Каждый вид изгиба, в свою очередь, может быть прямым или косым, при этом косой изгиб бывает плоским и пространственным.

Рассмотрим поперечное сечение балки (рис. 11.1).

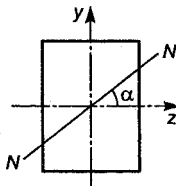


Рис. 11.1

Пусть NN - след плоскости, в которой действует полный изгибающий момент. Если угол $\alpha = 0$ или $\alpha = 90^\circ$, изгиб называется **прямым**, если $\alpha \neq 0$ или $\alpha \neq 90^\circ$, изгиб называется **косым**. Косой изгиб, когда $\alpha = \text{const}$, по длине

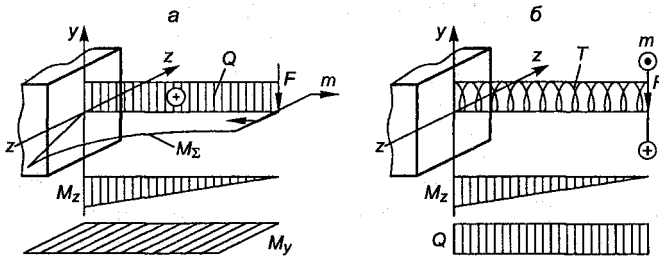


Рис. 11.2

балки называется **плоским**; когда $\alpha \neq \text{const}$ - **пространственным**. Например, изгиб консольной балки, изображенной на рис. 11.2, а, согласно принятой классификации, будет поперечным, косым, пространственным.

Консольная балка, представленная на рис. 11.2, б, испытывает поперечный изгиб с кручением.

11.2. Напряжения в поперечных сечениях балки при чистом изгибе

Рассматриваются балки, имеющие продольную плоскость симметрии, в которой действуют все внешние силы. На основании симметрии можно считать, что перемещения при изгибе будут происходить также в плоскости симметрии.

Рассмотрим участок балки, испытывающий чистый изгиб. Нанесем на его поверхности сетку. Под действием внешних моментов m балка изогнется по дуге окружности (рис. 11.3).

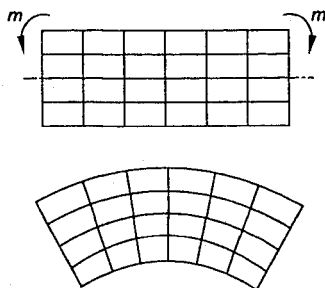


Рис. 11.3

Эксперименты показывают, что при чистом изгибе поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и нормальными к продольным волокнам балки и после деформации, т.е. выполняется гипотеза плоских сечений Бернулли. Следовательно, деформацию балки при чистом изгибе можно рассматривать как поворот плоских поперечных сечений (как жестких блоков) относительно друг друга на некоторый угол. Так как при деформации верхние волокна удлиняются, а нижние укорачиваются, то будет существовать слой, в котором волокна сохраняют свою длину. Этот слой называется **нейтральным слоем**. Пересечение нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется **нейтральной линией** или **нейтральной осью сечения**.

Изобразим элемент балки длиной dx после деформации (рис. 11.4, а). Обозначим через NN - нейтральный слой; O - центр кривизны нейтрального слоя; ρ - радиус кривизны нейтрального слоя; $d\varphi$ - угол между сечениями. Из рисунка видно, что волокно ab принадлежит нейтральному слою NN . Поэтому длина ab до деформации и после деформации будет равна dx .

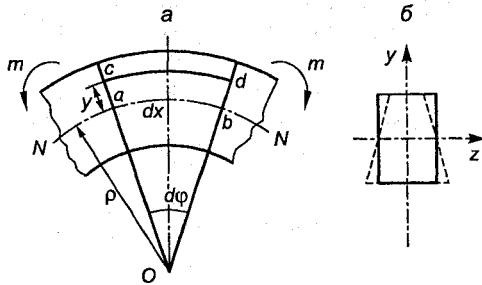


Рис. 11.4

$$dx = \rho d\varphi,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (11.1)$$

Выделим на расстоянии y от нейтрального слоя волокна cd . Так как до деформации все волокна элемента имели длину $dx = ab$, то относительная продольная деформация волокна cd в результате изгиба будет равна

$$\epsilon_x = \frac{cd - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} y, \quad (11.2)$$

где $\frac{1}{\rho}$ - кривизна, принимаемая по абсолютной величине, без учета знака.

Формула (11.2) показывает, что относительные продольные деформации прямо пропорциональны кривизне нейтрального слоя и расстоянию y волокна от нейтрального слоя. Формула (11.2) получена из чисто геометрических соображений, поэтому справедлива для всех материалов, независимо от их свойств.

Поскольку линейные деформации сопровождаются поперечными деформациями: при растяжении - сужением, а при сжатии - расширением в поперечном направлении, то форма поперечного сечения балки при изгибе несколько изменяется. Вследствие поперечных деформаций

$$\epsilon_z = -\mu \epsilon_x$$

первоначальное прямоугольное поперечное сечение превращается в сечение трапециевидальной формы, как показано пунктиром на рис. 11.4, б. Однако на практике деформации являются малыми величинами, поэтому искажение формы имеет несущественное значение и в расчетах не учитывается. Так как при чистом изгибе $Q = 0$ и $T = 0$, то в поперечных сечениях отсутствуют касательные напряжения, а значит, между продольными волокнами отсутствует взаимодействие.

Таким образом, при чистом изгибе материал находится в одноосном напряженном состоянии. В одной части сечения он растягивается, в другой – сжимается.

На основании закона Гука нормальные напряжения в сечении будут следующими:

$$\sigma_x = \varepsilon_x E = \frac{E y}{\rho}. \quad (11.3)$$

Выражение (11.3) показывает, что:

- а) напряжения в поперечном сечении балки изменяются по линейному закону;
- б) напряжения в волокне прямо пропорциональны расстоянию волокна до нейтральной оси;
- в) максимальные напряжения возникают в крайних волокнах сечения.

Эпюра распределения нормальных напряжений по поперечному сечению изображена на рис. 11.5.

Распределенные по сечению напряжения должны дать относительно поперечной оси $z-z$ пару сил с моментом, равным изгибающему моменту, действующему в данном сечении. Выделим элементарную площадку dA на расстоянии y от нейтральной линии (рис. 11.6). Элементарный изгибающий момент, со-

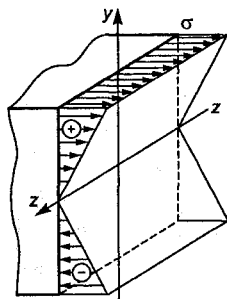


Рис. 11.5

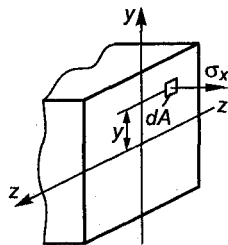


Рис. 11.6

здаваемый элементарной силой, действующей на площадку относительно нейтральной линии, будет

$$dM = \sigma_x y dA. \quad (11.4)$$

Полный изгибающий момент в сечении найдем, проинтегрировав выражение (11.4) по всей площади сечения:

$$M = \int_A \sigma_x y dA = \int_A \frac{E y}{\rho} y dA. \quad (11.5)$$

Так как кривизна и модуль упругости для сечения постоянны, то выражение (11.5) примет вид

$$M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z, \quad (11.6)$$

где $\int_A y^2 dA = I_z$ - осевой момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси $z-z$.

Откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (11.7)$$

Формула (11.7) связывает кривизну нейтрального слоя $\frac{1}{\rho}$ с изгибающим моментом, действующим в сечении. Если $E = \text{const}$, $I_z = \text{const}$ и $M = \text{const}$, то $\frac{1}{\rho} = \text{const}$, а значит, ось балки искривляется по дуге окружности радиусом ρ .

Произведение EI_z характеризует жесткость поперечного сечения балки при изгибе. Чем оно больше, тем кривизна балки меньше, и наоборот.

Таким образом, кривизна продольной оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту M и обратно пропорциональна жесткости поперечного сечения балки EI_z . Так как в поперечном сечении отсутствует нормальная сила N , то интеграл от элементарной силы σdA , действующей на площадке dA , взятый по всей площади сечения, должен быть равен нулю:

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A \frac{E y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Но $\frac{E}{\rho} \neq 0$, значит, $\int_A y dA = 0$.

Интеграл $\int_A y dA = S_z$ - есть *статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси z-z*.

Так как S_z равен нулю, то нейтральная ось z-z проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Подставляя (11.7) в (11.3), получим *расчетную формулу, позволяющую определить напряжения в любой точке поперечного сечения балки*:

$$\sigma_x = \frac{M y}{I_z}. \quad (11.8)$$

Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в сечении возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной оси.

$$\sigma_{x_{\max}} = \frac{M y_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}, \quad (11.9)$$

где $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$ - называется **осевым моментом сопротивления**;

y_{\max} - расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения.

Если сечение симметрично относительно оси z, то $y_{\max} = \pm \frac{h}{2}$

(где h - высота сечения) и $W_z = \frac{I_z}{h/2}$.

Если сечение не имеет горизонтальной оси симметрии, то для крайних верхних и нижних точек сечения в формулу (11.9) подставляются величины

$$W_z^B = \frac{I_z}{y_{\max}^B}; \quad W_z^H = \frac{I_z}{y_{\max}^H},$$

где y_{\max}^B – расстояние от нейтральной оси до крайних верхних точек сечения; y_{\max}^H – расстояние от нейтральной оси до крайних нижних точек сечения.

Для *прямоугольного поперечного сечения*, имеющего ширину b и высоту h , получим

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{2bh^3}{12h} = \frac{bh^2}{6};$$

для *кругового сечения* диаметром d осевой момент сопротивления будет

$$W_z = \frac{I_z}{d/2} = \frac{2\pi d^4}{64d} = \frac{\pi d^3}{32};$$

для *сечения в форме кольца* с внутренним диаметром d_B и наружным d_H получим

$$W_z = \frac{I_z}{d_H/2} = \frac{\frac{\pi}{64}(d_H^4 - d_B^4)2}{d_H} = \frac{\pi d_H^3}{32}(1 - c^4),$$

где $c = \frac{d_B}{d_H}$.

Характеристики и размеры профилей стального проката приводятся в таблицах приложения и справочниках.

11.3. Напряжения в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе

При поперечном изгибе, в соответствии с внутренними силовыми факторами, в поперечных сечениях балки возникают нормальные и касательные напряжения, вызывающие давление продольных волокон друг на друга. В результате взаимодействия волокон материал будет находиться не в линейном, как при чистом изгибе, а в плоском напряженном состоянии. Наличие касательных напряжений вызывает в каждой элементарной площадке сечения появление угловых деформаций

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Так как касательные напряжения распределяются по сечению неравномерно, то также неравномерно будут распределяться и угловые деформации, например на нейтральной оси они будут иметь максимальную величину, а в верхней и нижней точках сечения – равны нулю. Искривление сечений бруса при поперечном изгибе показано на рис. 11.7.

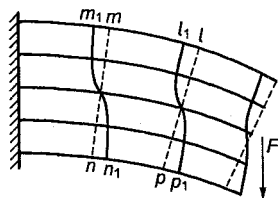


Рис. 11.7

Точные расчеты с использованием теории упругости показывают, что искривление поперечных сечений лишь незначительно отражается на величине нормальных напряжений, определенных по формулам для чистого изгиба. В частности, когда поперечная сила Q постоянна по длине балки, все поперечные сечения искажаются одинаково: $m_1 m = l_1 l$ и $n_1 n = p_1 p$. В этом случае искривление поперечных сечений, обусловленное сдвигом, не оказывает влияния на удлинения продольных волокон, вызываемые изгибающим моментом, поэтому формулы для нормальных напряжений, кривизны, продольных деформаций, выведенные для чистого изгиба, будут давать точные результаты и для поперечного изгиба.

Когда поперечная сила Q изменяется вдоль балки, формулы чистого изгиба для σ дают погрешность, величина которой имеет порядок h/l (где h – высота поперечного сечения; l – длина балки) по сравнению с единицей. Так как на практике величина h/l мала, то соответственно незначительной будет указанная погрешность.

Таким образом, при поперечном изгибе вполне приемлемо пользоваться формулами для чистого изгиба.

11.4. Касательные напряжения при поперечном изгибе

Выделим из балки прямоугольного поперечного сечения элемент длиной dx (рис. 11.8). В сечениях элемента при поперечном изгибе возникают поперечные силы и изгибающие моменты, при этом в правом и левом сечениях моменты будут отличаться на величину dM .

Продольным сечением, расположенным на расстоянии y от нейтрального слоя, выделим элемент $abcd$ и рассмотрим его

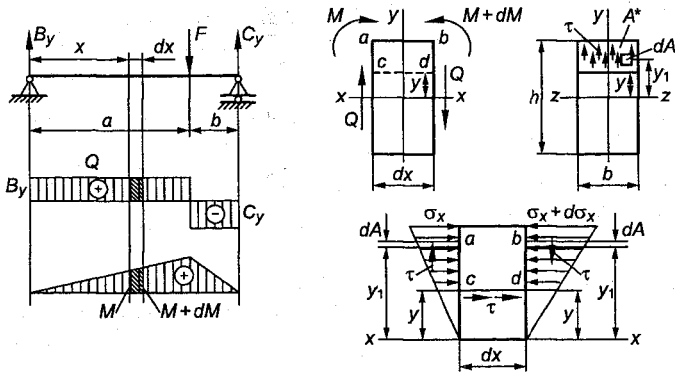


Рис. 11.8

равновесие. На гранях ac и bd действуют нормальные и касательные напряжения. На грани cd действуют только касательные напряжения, равные, по закону парности, касательным напряжениям на гранях ac и bd .

Введем следующие допущения о характере распределения касательных напряжений в поперечном сечении:

- а) касательные напряжения параллельны поперечной силе Q ;
- б) касательные напряжения равномерно распределены по ширине балки и зависят только от расстояния до нейтральной оси.

Вычислим равнодействующие нормальных сил, распределенных по граням ac и bd элемента. Нормальная сила, действующая на элементарную площадку dA на левой грани элемента, расположенную на расстоянии y_1 от нейтральной оси, имеет вид

$$\sigma_x dA = \frac{My_1}{I_z} dA.$$

Равнодействующая элементарных сил, распределенных по грани ac , имеющей площадь A^* , равна

$$\int_{A^*} \frac{My_1}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} \int_{A^*} y_1 dA. \quad (11.10)$$

Аналогично, равнодействующая нормальных сил, действующих на правую грань bd , будет

$$\int_{A^*} (\sigma_x + d\sigma_x) dA = \frac{M + dM}{I_z} \int_{A^*} y_1 dA. \quad (11.11)$$

Интеграл $\int_{A^*} y_1 dA$ представляет собой *статический момент* относительно нейтральной оси z части площади поперечного сечения, расположенной выше координаты y , определяющей продольное сечение, в котором вычисляется касательное напряжение. Обозначим его через S^* . Равнодействующая касательных сил, распределенных на грани cd , равна

$$\tau b dx, \quad (11.12)$$

где b - ширина поперечного сечения.

Проектируя все силы на ось x и приравнявая их сумму нулю, получим

$$\frac{M + dM}{I_z} S^* - \frac{M}{I_z} S^* - \tau b dx = 0 \quad (11.13)$$

или

$$\frac{dM}{I_z} S^* = \tau b dx. \quad (11.14)$$

Откуда

$$\tau = \frac{dMS^*}{dx b I_z}.$$

Учитывая, что $\frac{dM}{dx} = Q$, окончательно получим

$$\tau = \frac{QS^*}{b I_z}. \quad (11.15)$$

Формула (11.15) была выведена Д.И. Журавским¹⁷ и носит его имя. Она определяет величину *касательного напряжения*, которое считается параллельным силе Q и направленным в сторону действия силы. Для вычисления касательных напряжений в произвольном сечении балки в формулу (11.15) подставляется абсолютная величина поперечной силы Q , действующей в

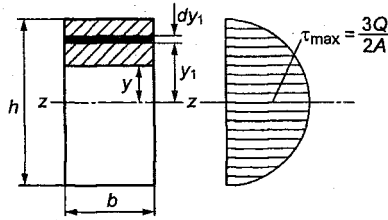


Рис. 11.9

рассматриваемом сечении; осевой момент инерции I_z сечения относительно нейтральной оси; ширина сечения b на уровне, где определяется напряжение и статический момент S^* исследуемой части площади относительно нейтральной оси.

Построим эпюры касательных напряжений по высоте для балок прямоугольного, круглого и двутаврового сечений, если в сечениях поперечная сила равна Q .

Так как величины Q, I_z, b постоянны, то изменение касательных напряжений по высоте *прямоугольного поперечного сечения* будет определяться изменением статического момента S^* в зависимости от расстояния y до нейтральной оси (рис. 11.9).

Вычислим относительно оси z *статический момент* S^* части площади сечения, расположенной выше уровня y , где вычисляются касательные напряжения, для чего выделим элементарную площадку $dA = bdy_1$ на расстоянии y_1 от оси z :

$$S^* = \int_y^{h/2} by_1 dy_1 = \frac{by_1^2}{2} \Big|_y^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (11.16)$$

Из формулы (11.16) следует, что касательные напряжения изменяются в зависимости от y по закону параболы, так как переменная y входит во второй степени.

Подставляя в формулу (11.15) значения $S^*, I_z = \frac{bh^3}{12}$, получим

$$\tau = \frac{12Q}{bh^3} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

В точках, удаленных от оси на расстояние $y = \pm h/2$, напряжение τ равно нулю; в точках на нейтральной оси ($y = 0$) напряжение имеет максимальное значение:

$$\tau_{\max} = \frac{6Qh^2}{4bh^3} = \frac{3Q}{2A}, \quad (11.17)$$

где $A = bh$ - площадь поперечного сечения.

Эпюра касательных напряжений по высоте сечения показана на рис. 11.9. Полученная закономерность изменения касательных напряжений полностью объясняет характер искривления поперечных сечений балки при поперечном изгибе (см. рис. 11.7). В точках m_1 , l_1 и n_1 , p_1 угловые деформации равны нулю, так как равны нулю касательные напряжения (см. рис. 11.9), а значит, кривые m_1n_1 и l_1p_1 будут нормальными к верхней и нижней поверхностям балки; на нейтральной линии касательные напряжения максимальны и имеют место максимальные угловые деформации (максимальные углы между касательными к кривым m_1n_1 и l_1p_1 и нормальными сечениями mn и lp). Также становится совершенно понятным, что если поперечная сила на участке имеет постоянную величину, то искривление всех поперечных сечений на участке будет одинаковым и, следовательно, не должно отражаться на продольных деформациях растяжения и сжатия волокон, вызываемых изгибающим моментом.

Для *круглого поперечного сечения* принятые допущения о характере распределения касательных напряжений не выполняются. Как было показано ранее, в точках у контура касательные напряжения направлены по касательной к нему, и, следовательно, допущение, что касательные напряжения направлены параллельно поперечной силе Q , не подтверждается. Это значит, что касательное напряжение в точке B имеет составляющие вдоль оси y и оси z (рис. 11.10) такой величины, чтобы сумма их проекций на нормаль к контуру была равна нулю.

Принимая во внимание, что вертикальные составляющие касательных напряжений для всех точек, расположенных от оси z на расстоянии y , одинаковы, можно для их вычисления пользоваться формулой Журавского. Сопоставление значений касательных напряжений, определенных по приближенной и точной теориям, показывает, что ошибка в величине наибольшего касательного напряжения не превышает 5 %, т.е. формула

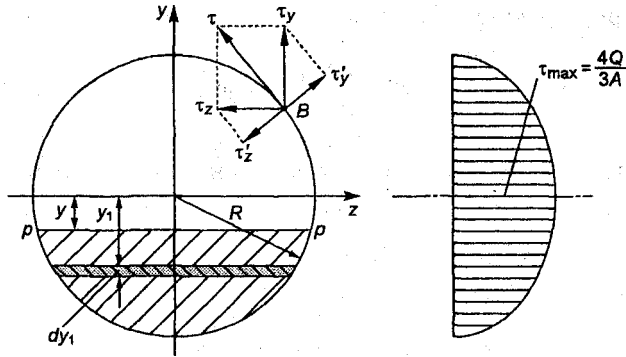


Рис. 11.10

Журавского дает вполне удовлетворительную точность для практических расчетов.

Вычислим величину касательных напряжений по линии pp , отстоящей на расстоянии y от оси z (см. рис. 11.10), для чего необходимо определить статический момент площади кругового сегмента S^* , ограниченного линией pp , относительно оси z .

Выделим на расстоянии y_1 элементарную площадку dA , равную

$$dA = 2\sqrt{R^2 - y_1^2} dy_1,$$

где $2\sqrt{R^2 - y_1^2}$ — длина площадки. Статический момент кругового сегмента будет

$$S^* = \int_y^R 2\sqrt{R^2 - y_1^2} y_1 dy_1 = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}. \quad (11.18)$$

Подставляя значение S^* , длину хорды pp , равную

$$b = 2\sqrt{R^2 - y^2},$$

осевой момент инерции

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$$

в формулу (10.15), получим

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^4} (R^2 - y^2). \quad (11.19)$$

Из (11.19) видно, что касательные напряжения изменяются от y по закону параболы. В крайних точках сечения при $y = \pm R$ они равны нулю, в точках на нейтральной оси $y = 0$ касательные напряжения имеют максимальное значение

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = 1,33 \frac{Q}{A},$$

где $A = \pi R^2$ - площадь поперечного сечения.

Таким образом, наибольшее касательное напряжение на 33 % больше среднего напряжения, получаемого делением поперечной силы Q на площадь A . Эпюра касательных напряжений по высоте кругового сечения показана на рис. 11.10.

Для вычисления касательных напряжений в точках стенки *двутавровой балки*, расположенных на расстоянии y от нейтральной оси (рис. 11.11), определим статический момент заштрихованной части сечения относительно нейтральной оси z .

$$\begin{aligned} S^* &= \int_{h_1/2}^{h/2} y_1 b dy_1 + \int_y^{h_1/2} y_2 b_1 dy_2 = b \frac{y_1^2}{2} \Big|_{h_1/2}^{h/2} + b_1 \frac{y_2^2}{2} \Big|_y^{h_1/2} = \\ &= \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2 \right). \end{aligned} \quad (11.20)$$

Подставляя (11.20) в уравнение (11.15), получим

$$\tau = \frac{Q}{b_1 I_z} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2 \right) \right]. \quad (11.21)$$

Выражение (11.21) показывает, что касательные напряжения изменяются по высоте стенки по параболическому закону. Максимальное касательное напряжение действует на нейтральной оси при $y = 0$:

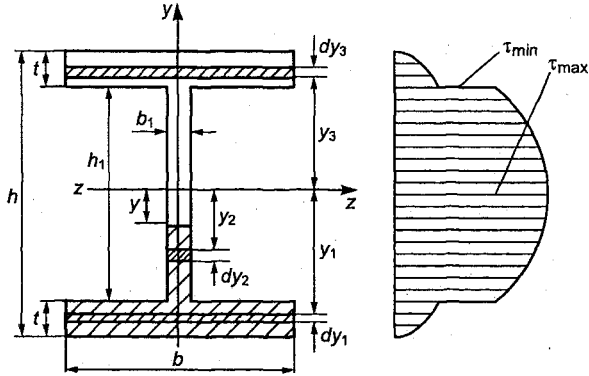


Рис. 11.11

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{bI_z} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1 h_1^2}{8} \right]. \quad (11.22)$$

Минимальное касательное напряжение в стенке будет при

$$y = \pm \frac{h_1}{2}:$$

$$\tau_{\min} = \frac{Q}{b_1 I_z} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) \right]. \quad (11.23)$$

Рассматривая полки как прямоугольники с размерами $b \times t$, получим выражение для статического момента S_{Π}^* :

$$S_{\Pi}^* = \int_y^{h/2} y_3 b dy_3 = b \frac{y_3^2}{2} \Big|_y^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Касательные напряжения в полках будут определяться выражением

$$\tau = \frac{Q}{bI_z} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]. \quad (11.24)$$

При $y = \pm \frac{h_1}{2}$

$$\tau = \frac{Q}{bI_z} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) \right]. \quad (11.25)$$

При $y = \pm \frac{h}{2}$

$$\tau = 0.$$

Сравнивая выражения (11.25) и (11.23), видим, что они отличаются только шириной $b \gg b_1$, поэтому при переходе от стенки к полке касательные напряжения резко падают. Эпюра касательных напряжений приведена на рис. 11.11. Из эпюры видно, что полки воспринимают незначительную часть поперечной силы, которую почти полностью воспринимает стенка. При переходе от полки к стенке эпюра претерпевает скачок. Касательные напряжения в поперечных сечениях и парные им напряжения в продольных сечениях балки, несмотря на свою относительно малую величину, могут быть причиной разрушения в продольных сечениях. Например, при поперечном изгибе деревянного бруса часто разрушение происходит по продольной плоскости, расположенной у нейтрального слоя, где действуют τ_{\max} . Касательные напряжения при поперечном изгибе обуславливают силовую связь между продольными слоями бруса; обеспечивая его работу как целого тела, они препятствуют сдвигу соседних слоев относительно друг друга. Когда связь между слоями нарушается, происходит их сдвиг и резкое снижение несущей способности балки (рис. 11.12).

На рис. 11.12 показан изгиб сплошной балки и изгиб той же балки, разделенной на три слоя, при действии одинаковой силы F . Во втором случае слои сдвигаются относительно друг друга, в результате чего значительно увеличивается прогиб.

Пример 11.1. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения

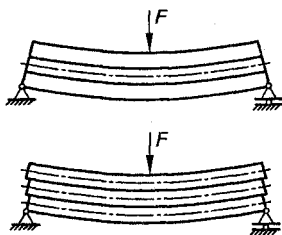


Рис. 11.12

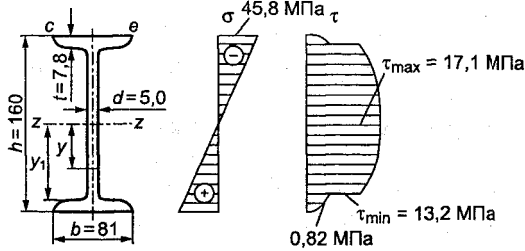


Рис. 11.13

двутавровой балки № 16, если в сечении действуют положительные изгибающий момент $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и поперечная сила $Q = 12 \text{ кН}$.

Решение. Выписываем из таблицы сортамента прокатной стали основные размеры профиля $A = 20,2 \text{ см}^2$; $h = 160 \text{ мм}$; $d = 5 \text{ мм}$; $t = 7,8 \text{ мм}$; осевой момент инерции сечения $I_z = 873 \text{ см}^4$ и статический момент половины площади $S_{\text{max}}^* = 62,3 \text{ см}^3$. По размерам вычерчиваем сечение (рис. 11.13).

Нормальные напряжения в точках сечения, расположенных на расстоянии y от нейтральной оси, определяем по формуле (11.8).

Максимальные по величине напряжения при

$$y = \pm \frac{h}{2} = 8 \text{ см}$$

будут

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 8}{873} = 45,8 \text{ МПа.}$$

Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 11.13.

Касательные напряжения в точках сечения, расположенных на расстоянии y от нейтральной оси, определяем по формуле Журавского (11.15). Для построения эпюры касательных напряжений вычислим напряжения в характерных точках:

$$\text{при } y = \frac{h}{2} = 8 \text{ см (в крайних волокнах сечения);}$$

$$\text{при } y_1 = \frac{h}{2} - t = 8 - 0,78 = 7,22 \text{ см (в точках сопряжения полки со стенкой, причем отдельно, когда точки принадлежат полке и когда принадлежат стенке);}$$

при $y = 0$ (в точках, расположенных на нейтральной оси).

В крайних волокнах касательные напряжения равны нулю, так как статический момент $S^* = 0$ (линия ce не отсекает никакой площади).

Для точек сопряжения, принадлежащих полке, статический момент равен статическому моменту полки, которую с достаточной для практики точностью можно считать прямоугольником с размерами $b \times t$, а ширина сечения $b = 8,1$ см.

$$S_{\text{полки}}^* = Ay_c = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 8,1 \cdot 0,78 \cdot \left(8 - \frac{0,78}{2} \right) = 48,1 \text{ см}^3;$$

$$\tau = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 48,1}{8,1 \cdot 873} = 0,82 \text{ МПа.}$$

Для точек сопряжения, принадлежащих стенке, статический момент S^* остается тем же, но ширина сечения $b = 0,5$ см.

$$\tau = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 48,1}{0,5 \cdot 873} = 13,2 \text{ МПа.}$$

Как видим, при переходе от полки к стенке касательные напряжения резко возрастают, эпюра напряжений претерпевает скачок.

Для точек на нейтральной оси ширина сечения $d = 0,5$ см, а статический момент равен половине сечения $S_{\text{max}}^* = 62,3 \text{ см}^3$.

$$\tau_{\text{max}} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 62,3}{0,5 \cdot 873} = 17,1 \text{ МПа.}$$

По вычисленным значениям касательных напряжений, построена эпюра, представленная на рис. 11.13.

Пример 11.2. Балка, лежащая на двух опорах (рис. 11.14), состоит из четырех брусков прямоугольного сечения со сторо-

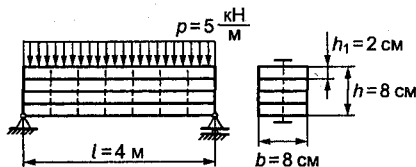


Рис. 11.14

нами $b = 8$ см, $h_1 = 2$ см. Балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой $p = 5$ кН/м, длина балки 4 м. Требуется определить: 1) максимальные напряжения в брусках, когда они изгибаются самостоятельно; 2) максимальные напряжения в балке, когда бруски скреплены стальными болтами и балка работает как цельная; 3) количество болтов диаметром $d = 12$ мм, если допускаемое напряжение на сдвиг для материала болтов $[\tau] = 80$ МПа. При расчетах силы трения между брусками не учитывать.

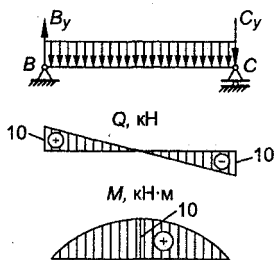


Рис. 11.15

Решение. Определяем реакции опор и строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 11.15). Реакции $B_y = C_y = 10$ кН. Расчетный изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{5 \cdot 4^2}{8} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Изгибающий момент, приходящий-

ся на один брусок, равен $\frac{M_{\max}}{4}$, а на-

ибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении бруска, ослабленного отверстием, будет

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{4W_z} = \frac{6M_{\max}}{4(b-d)h_1^2} = \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 6}{4 \cdot (8-1,2) \cdot 2^2} = 551,5 \text{ МПа}.$$

Когда бруски стянуты болтами, балка будет изгибаться как цельная, в этом случае наибольшие напряжения равны

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6M_{\max}}{(b-d)8^2} = \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 6}{(8-1,2) \cdot 8^2} = 137,9 \text{ МПа}.$$

Таким образом, в нашем случае скрепленные болтами бруски способны выдержать нагрузку приблизительно в 3 раза большую. Максимальное значение поперечная сила имеет на опорах $Q_{\max} = 10$ кН.

Наибольшие касательные напряжения в сечении, совпадающем с нейтральным слоем, согласно (11.17), равны

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A_{\text{нт}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{(8-1,2) \cdot 8} = 1,84 \text{ МПа,}$$

где $A_{\text{нт}}$ - площадь нетто.

Продольная равнодействующая касательных напряжений при рассматривании цельной балки будет определяться из условия, что максимальные касательные напряжения изменяются по тому же закону, что и поперечная сила Q .

В сечении балки, проведенном посередине, касательные напряжения равны нулю, так как равна нулю поперечная сила. В сечении на опоре $\tau_{\max} = 1,84$ МПа. Тогда равнодействующая касательных напряжений в сечении, совпадающем с нейтральным слоем (наличием отверстий пренебрегаем), будет равна

$$T = \left[b \frac{l}{2} \left(\frac{\tau_{\max} + 0}{2} \right) \right] 2 = \frac{bl\tau_{\max}}{2} = \frac{8 \cdot 400 \cdot 184}{2} = 147\,200 \text{ Н.}$$

Необходимое количество болтов для скрепления брусков определяем из условия, что сила T должна восприниматься болтами, работающими на срез:

$$T = \frac{\pi d^2}{4} n [\tau],$$

где n - число болтов. Откуда число болтов для скрепления брусков будет

$$n = \frac{4T}{\pi d^2 [\tau]} = \frac{4 \cdot 147\,200}{3,14 \cdot 1,2^2 \cdot 8000} = 16,2.$$

Принимаем $n = 16$ болтов. Желательно в сечениях над опорами, где действует Q_{\max} , установить по два болта, остальные болты разместить равномерно по длине балки.

11.5. Расчет балок на прочность при изгибе

Используя уравнения (11.8) и (11.15), можно вычислить нормальные σ и касательные τ напряжения, возникающие в любой точке сечения, если известны изгибающий момент M и поперечная сила Q для этого сечения. Как было показано, нормальные напряжения максимальны в крайних точках сечения

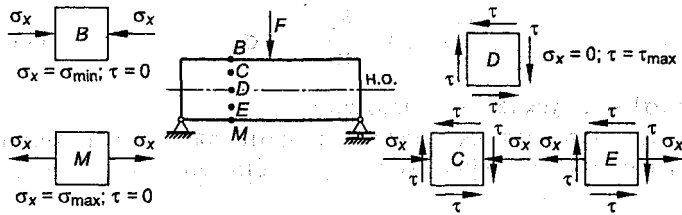


Рис. 11.16

и равны нулю на нейтральной оси; касательные напряжения равны нулю в крайних точках сечения и имеют максимальное значение на нейтральной оси.

Так как при поперечном изгибе материал находится в плоском напряженном состоянии, то для более полного анализа напряжений рассмотрим напряженное состояние в характерных точках сечения (рис. 11.16).

В точках B и M , выделенных на верхней и нижней поверхностях балки, материал находится в линейном напряженном состоянии, в точке B он испытывает простое сжатие, в точке M – растяжение. В точке D , выделенной у нейтрального слоя, материал испытывает чистый сдвиг $\sigma_x = 0$; $\tau = \tau_{\max}$. В точках C и E , выделенных произвольно, материал испытывает плоское напряженное состояние. Величины и направления σ_x и τ на гранях выделенных элементов определяются величинами и направлением M и Q , принимаемых из эпюр в рассматриваемом сечении, и расстоянием элемента от нейтральной оси. Подбор поперечных сечений балок, а также их проверка на прочность должны проводиться по точке, в которой материал находится в наиболее опасном состоянии.

В общем случае опасной может быть точка:

- расположенная в крайних волокнах сечения, где действует наибольший изгибающий момент (например, точки B и M);
- расположенная на нейтральной оси сечения, где действует наибольшая поперечная сила (например, точка D);
- в которой напряжения σ_x и τ создают наибольшее эквивалентное напряжение по принятой для расчета теории прочности (например, точки C и E).

В *первом случае*, так как напряженное состояние материала в точке линейное, то нормальное напряжение σ_x является главным и условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (11.26)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

Если материал неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности при растяжении и сжатии должны удовлетворяться отдельно:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_p \text{ и } \sigma_{\min} \leq [\sigma]_c, \quad (11.27)$$

где $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_c$ - соответственно допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

Во *втором случае* материал в точке испытывает чистый сдвиг и условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}^*}{bI_z} \leq [\tau], \quad (11.28)$$

где $[\tau]$ - допускаемое напряжение на сдвиг.

В *третьем случае* материал в точке испытывает плоское напряженное состояние, при котором главные напряжения определяются по уравнениям (2.14) и (2.15), описывающим данное состояние.

Расчет балок из пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, рекомендуется проводить по III и IV теориям прочности, для которых условия прочности следующие:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (11.29)$$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (11.30)$$

Для таких материалов, как чугун или бетон, оказывающих различное сопротивление растяжению и сжатию, рекомендуется пользоваться теорией прочности Мора. Условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{1-k}{2}\sigma_x + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (11.31)$$

где $k = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}}$.

Практика показывает, что в балках, имеющих сплошные поперечные сечения, такие, как *прямоугольник, круг, квадрат*, а также сечения с достаточно толстыми стенками, опасными являются *крайние точки в опасном сечении*, в котором изгибающий момент имеет максимальное значение. Поэтому *практически расчет балок на прочность производят по условию прочности (11.26) без учета касательных напряжений*.

Для балок, изготовленных из *швеллера, двутавра*, рекомендуется дополнительно производить проверку прочности по соответствующей теории прочности в точках соединения стенки и полка. Для *деревянных балок* следует дополнительно производить проверку прочности по максимальным касательным напряжениям, действующим в нейтральном слое.

11.6. Балки переменного сечения

Рассмотренные ранее вопросы расчета балок на изгиб относились к балкам, поперечные сечения которых по длине оставались постоянными. Такие балки, с точки зрения расхода материала, нельзя считать рациональными, так как их поперечные сечения подбирались по напряжениям, действующим в опасном сечении, в опасной точке. В этом случае в остальных сечениях возможно значительное недонагружение, т.е. избыток прочности. Поэтому на практике широко применяются симметричные балки с непрерывно изменяющимися сечениями по длине или симметричные балки с сечениями, изменяющимися ступенчато. Точные расчеты показывают, что формулы для нормальных напряжений, выведенные для балок постоянного сечения, можно с достаточной на практике точностью применять к симметричным балкам с непрерывно изменяющимися сечениями по длине при условии, что размеры сечений изменяются по длине достаточно плавно (угол наклона поверхности к оси балки не превышает 15–20°). Отклонение результатов расчета от точных не будет превышать нескольких процентов. Однако формула Журавского для определения касательных напряжений к таким балкам не применима.

Для балок *прямоугольного поперечного сечения* постоянной ширины b и переменной высоты h формула для касательных напряжений имеет следующий вид:

$$\tau = \frac{QS^*}{I_z b} + \frac{Mh}{4I_z} \left(1 - \frac{S^* h}{I_z} \right) \frac{dh}{dx}, \quad (11.32)$$

где Q - поперечная сила в сечении; S^* - статический момент части площади поперечного сечения, расположенной выше уровня y , в котором определяется напряжение; I_z - осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси z ; M - изгибающий момент в сечении; $\frac{dh}{dx}$ - производная, характеризующая скорость изменения высоты h в зависимости от длины x .

Из формулы (11.32) следует, что касательное напряжение в поперечном сечении зависит не только от поперечной силы, но и от изгибающего момента и производной $\frac{dh}{dx}$.

Используя формулу (11.32), покажем распределение касательных напряжений в консольной симметричной балке с *прямоугольным поперечным сечением*, непрерывно изменяющимся по длине, нагруженной силой F (рис. 11.17). Обозначим постоянную толщину поперечного сечения через b , высоту балки в сечении B - через h_B , в сечении C - через h_C и примем отношение $\frac{h_C}{h_B} = 2$.

Величина $\frac{dh}{dx}$ будет равна

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h_C - h_B}{l} = \frac{2h_B - h_B}{l} = \frac{h_B}{l}.$$

В сечении B изгибающий момент равен нулю, следовательно, распределение касательных напряжений в сечении будет одинаковым с распределением, определенным по формуле Журавского для балки постоянного сечения. Максимальное напряжение действует на нейтральной оси:

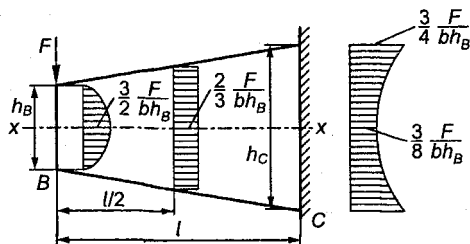


Рис. 11.17

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh_B}$$

В середине пролета для касательных напряжений получим выражение

$$\tau = \frac{2F}{3bh_B},$$

из которого следует, что касательные напряжения равномерно распределяются по высоте сечения.

В сечении C касательные напряжения изменяются по уравнению

$$\tau = \frac{3F}{8bh_B} \left(1 + \frac{y_1^2}{h_B^2} \right),$$

где y_1 – расстояние от нейтральной оси до рассматриваемого волокна.

Максимальные касательные напряжения, равные

$$\tau_{\max} = \frac{3F}{4bh_B},$$

действуют во внешних волокнах сечения, а *минимальное напряжение, равное*

$$\tau_{\min} = \frac{3F}{8bh_B},$$

возникает на нейтральной оси при $y_1 = 0$.

Распределение касательных напряжений в рассматриваемых сечениях представлено на рис. 11.17.

Необходимо отметить, что в балках с непрерывно изменяющимися поперечными сечениями по длине, в отличие от балок с постоянным сечением, максимальные нормальные напряжения не всегда действуют в сечениях, где изгибающий момент является максимальным.

Рассмотрим консольную балку с круглым поперечным сечением, нагруженную силой F , у которой диаметр в сечении C в 2 раза больше диаметра в сечении B (рис. 11.18).

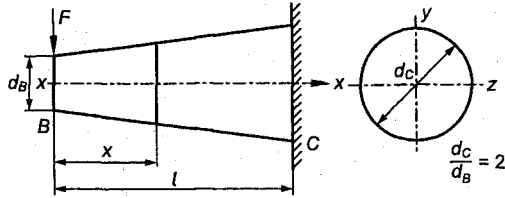


Рис. 11.18

Момент сопротивления сечения, расположенного на расстоянии x от левого конца, равен

$$W_z = \frac{\pi d_x^3}{32} = \frac{\pi}{32} d_B^3 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^3,$$

где $d_x = d_B \left(1 + \frac{x}{l}\right)$.

Наибольшее нормальное напряжение в сечении x

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_z} = \frac{32Fx}{\pi d_B^3 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^3}, \quad (11.33)$$

где Fx - изгибающий момент в данном сечении.

Определим значение x , при котором в сечении балки действуют максимальные напряжения. Взяв производную $\frac{d\sigma_x}{dx}$ и

приравняв ее нулю, получим $x = \frac{l}{2}$.

Отсюда максимальное напряжение в сечении x будет:

$$\sigma_{\max} = \frac{128Fl}{27\pi d_B^3} = 4,74 \frac{Fl}{\pi d_B^3}.$$

В сечении C , где действует максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = Fl,$$

напряжение равно

$$\sigma_C = \frac{4Fl}{\pi d_B^3},$$

т.е. на 19 % меньше, чем в сечении $x = \frac{l}{2}$.

Из выражения (11.33) следует, что с уменьшением конусности балки сечение с максимальным нормальным напряжением приближается к сечению, где изгибающий момент имеет максимальное значение.

Для экономии материала при конструировании подобных балок необходимо поперечное сечение изменять так, чтобы максимальное нормальное напряжение во всех сечениях было одинаковым. Когда максимальное нормальное напряжение во всех поперечных сечениях равно допускаемому напряжению, балка называется **балкой равного сопротивления**. *Условие равенства в поперечных сечениях максимального напряжения допускаемому является основным критерием при создании конструкций минимального веса.* Типичным примером балки равного сопротивления является *листовая рессора*.

Условие прочности для балок равного сопротивления имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max(x)} = \frac{M(x)}{W_{z(x)}} \leq [\sigma], \quad (11.34)$$

где $M(x)$ и $W_{z(x)}$ - изгибающий момент и момент сопротивления сечения, представляющие функции длины x .

Из формулы (11.34) вытекает условие, определяющее размеры поперечного сечения балки равного сопротивления:

$$W_{z(x)} = \frac{M(x)}{[\sigma]}. \quad (11.35)$$

Рассмотрим консольную балку, нагруженную силой F (рис. 11.19, *a*). Поставим задачу подобрать поперечное сечение балки так, чтобы во всех сечениях возникали одинаковые напряжения, равные допускаемому напряжению $[\sigma]$. Форму сечения возьмем в виде прямоугольника.

Согласно условию момент сопротивления $W_{z(x)}$ должен изменяться пропорционально изгибающему моменту $M(x)$. В сечении на расстоянии x от свободного конца момент сопротивления будет

$$W_{z(x)} = \frac{Fx}{[\sigma]}$$

В расчетах принимается абсолютное значение изгибающего момента.

Пусть прямоугольное сечение балки имеет постоянную высоту $h = h_0$ и переменную ширину $b(x)$. Тогда, подставляя в (11.35) выражение момента сопротивления, получим

$$\frac{b(x)h_0^2}{6} = \frac{Fx}{[\sigma]}$$

или

$$b(x) = \frac{6Fx}{h_0^2 [\sigma]}$$

Таким образом, ширина балки должна изменяться по линейному закону в зависимости от расстояния x . При $x = l$ ширина балки будет равна

$$b(x) = b_0 = \frac{6Fl}{h_0^2 [\sigma]}$$

Вид балки в плане показан на рис. 11.19, б.

В окрестности концевой сечения ($x = 0$) изгибающие моменты малы, поэтому необходимо обеспечить прочность по отношению к касательным напряжениям. Ширина балки из условия прочности по касательным напряжениям определяется из выражения

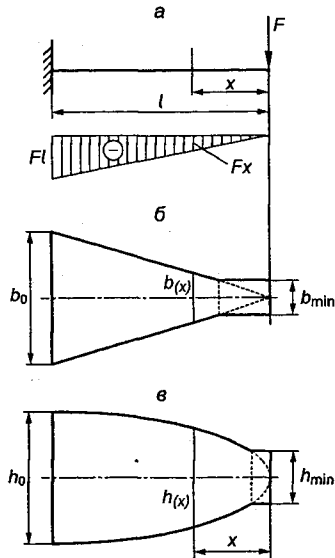


Рис. 11.19

$$\tau_{\max} = \frac{3F}{2b_{\min}h_0} \leq [\tau], \quad (11.36)$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение на сдвиг.

Откуда

$$b_{\min} = \frac{3F}{2[\tau]h_0}.$$

Очертание свободного конца балки показано на рис. 11.19, б.

Теперь пусть прямоугольное сечение балки имеет постоянную ширину $b = b_0$ и переменную высоту $h_{(x)}$ (рис. 11.19, в). Подставляя в (11.35) выражение момента сопротивления, получим

$$\frac{b_0 h_{(x)}^2}{6} = \frac{Fx}{[\sigma]},$$

откуда

$$h_{(x)} = \sqrt{\frac{6F}{b_0[\sigma]}} x. \quad (11.37)$$

Следовательно, высота балки должна изменяться по параболическому закону. При $x = l$ высота h_0 равна

$$h_0 = \sqrt{\frac{6Fl}{b_0[\sigma]}}.$$

Полученная форма балки показана на рис. 11.19, в. Высота h_{\min} конечного сечения ($x = 0$), определяемая из условия прочности по касательным напряжениям, будет следующей:

$$h_{\min} = \frac{3F}{2b_0[\tau]}.$$

Балки параболического очертания по сложности изготовления не удовлетворяют технологическим требованиям.

На практике из технологических соображений часто балки равного сопротивления заменяются симметричными балками с сечениями, изменяющимися ступенчато около очертания балки равного сопротивления. Зная величины $b_0(h_0)$ и $b(h)$ в

крайних сечениях, размеры между ними берут произвольно или из конструктивных соображений, выполняя условия

$$b < b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_n < b_0$$

или

$$h < h_1 < h_2 < h_3 < \dots < h_n < h_0.$$

Следующим пунктом определяются соответствующие моменты сопротивления:

$$W_z = \frac{hb^2}{6}; \quad W_{z_1} = \frac{hb_1^2}{6}; \quad W_{z_n} = \frac{hb_n^2}{6}; \quad W_{z_0} = \frac{hb_0^2}{6},$$

а также величины требуемых изгибающих моментов:

$$M = W_z [\sigma]; \quad M_1 = W_{z_1} [\sigma]; \quad M_n = W_{z_n} [\sigma]; \quad M_0 = W_{z_0} [\sigma],$$

при которых размеры сечений hb ; hb_1 ; hb_0 обеспечивают прочность. Откладывая на эпюре (рис. 11.20) значения изгибающих моментов M , M_1 , M_2 , M_n , M_0 , находят размеры ступеней балки. При необходимости задаются размерами ступеней балки, а затем определяют допускаемые размеры поперечных сечений, которые дальше корректируют согласно конструктивным требованиям.

Пример 11.3. Стальная рессора представляет собой шарнирно опертую по концам балку равного сопротивления прямоугольного поперечного сечения с постоянной высотой h_0 и переменной

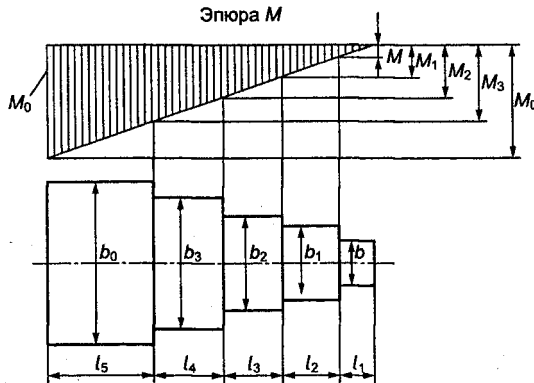


Рис. 11.20

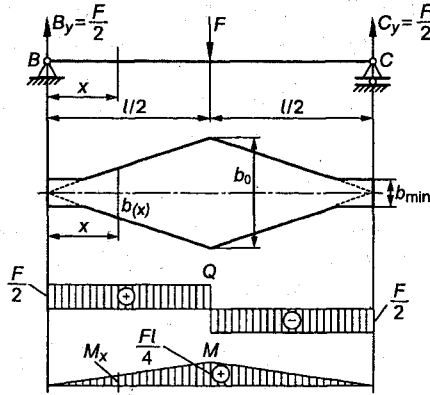


Рис. 11.21

шириной $b(x)$, нагруженную силой F по середине пролета. Определить форму балки равного сопротивления (рис. 11.21).

Решение. Изобразим рессору как брус переменной ширины. В силу симметрии для определения формы балки достаточно рассмотреть только одну половину пролета. Найдем реакции опор и построим эпюры Q и M .

$$B_y = C_y = \frac{F}{2}.$$

Изгибающий момент и момент сопротивления в сечении на расстоянии x от опоры B равны

$$M(x) = \frac{F}{2}x, \quad W_{z(x)} = \frac{b(x)h^2}{6}.$$

Подставляя $M(x)$ и $W_{z(x)}$ в формулу (11.35), найдем закон изменения ширины балки $b(x)$ в зависимости от x :

$$\frac{6Fx}{2b(x)h^2} = [\sigma],$$

откуда

$$b(x) = \frac{3F}{h^2[\sigma]}x.$$

Максимальная ширина b_0 по середине пролета будет при $x = \frac{l}{2}$

$$b_0 = \frac{2Fl}{2h^2 [\sigma]}$$

Ширина концевых сечений балки, необходимая для обеспечения прочности по касательным напряжениям, определяется

из выражения (11.36), принимая $Q = \frac{F}{2}$:

$$b_{\min} = \frac{3Q}{2h[\tau]} = \frac{3F}{4h[\tau]}$$

Вид рессоры в плане представлен на рис. 11.22, а.

Полученная форма рессоры не удобна на практике. Поэтому, не изменяя характера работы, ей придают другую форму, для чего балку в плане разрезают на полоски (1, 2, 3, 4), которые затем располагают друг над другом, и рессора приобретает вид, показанный на рис. 11.22, б. Естественно, листы изготавливают цельными, а не состоящими из двух половинок.

Пример 11.4. Стальная рессора состоит из десяти листов шириной 7,5 см и толщиной 10 мм (рис. 11.23). Пролет рессоры 1 м. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 400$ МПа. Определить грузоподъемность рессоры.

Решение. Представим себе рессору как балку равного сопротивления. Ширина балки по середине пролета равна

$$b_0 = 10 \cdot 7,5 = 75 \text{ см.}$$

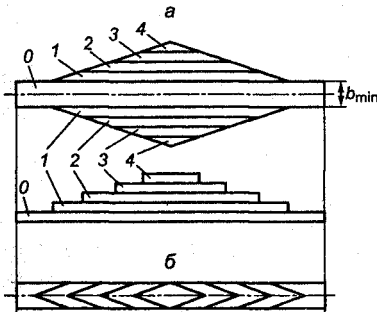


Рис. 11.22

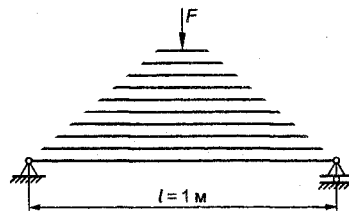


Рис. 11.23

Максимальный изгибающий момент по середине пролета

$$M_{\max} = \frac{Fl}{4} = \frac{F \cdot 100}{4} = 25F \text{ Н}\cdot\text{см.}$$

Из условия прочности

$$\frac{25 \cdot F \cdot 6}{75 \cdot I^2} = 40000,$$

где $W_{z_0} = \frac{b_0 h^2}{6} = \frac{75 \cdot I^2}{6}$.

Находим допустимую нагрузку:

$$F = \frac{75 \cdot 40000}{25 \cdot 6} = 20000 \text{ Н.}$$

11.7. Рациональные формы поперечных сечений балок при изгибе

В общем случае выбор поперечного сечения балки определяется материалом, характером внешней нагрузки и условиями работы конструкции. Будем считать сечение балки рациональным, если оно обеспечивает необходимую прочность при минимальном весе, т.е. при минимальной площади сечения. Согласно условию прочности (11.26) наиболее рациональной формой сечения будет такая, для которой при постоянной площади осевой момент сопротивления имеет наибольшее значение. Для этого следует располагать возможно большую часть площади сечения дальше от нейтральной оси.

Рассмотрим сечение, составленное из двух одинаковых прямоугольников (рис. 11.24).

Когда прямоугольники расположены рядом (рис. 11.24, а), осевой момент сопротивления относительно оси z будет равен

$$W_z = \frac{2bh^2}{6}.$$

При расположении прямоугольников один над другим и прочном их соединении (рис. 11.24, б) осевой момент сопротивления относительно оси z будет в 2 раза больше, чем в первом случае:

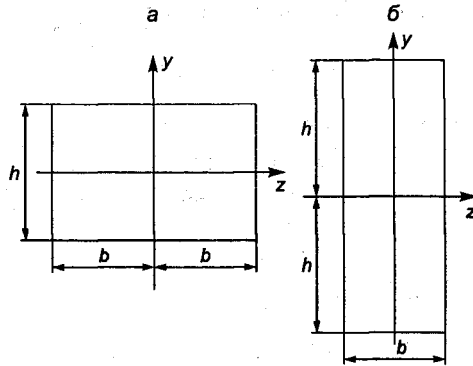


Рис. 11.24

$$W_z = \frac{b(2h)^2}{6}.$$

Следовательно, при изгибающем моменте, действующем в вертикальной плоскости, сопротивление балки изгибу во втором случае будет в 2 раза выше, чем в первом, хотя площади поперечного сечения одинаковы.

На рис. 11.25 показано пять составных сечений, имеющих одинаковую площадь и высоту, но разные моменты инерции I_z и разные моменты сопротивления относительно оси z .

Наименьшие значения I_z и W_z имеет сечение I, наибольшее – сечение V. Так как расход материала, а значит, и вес балки, пропорционален площади поперечного сечения A , то чем больше будет отношение W_z/A , тем меньше будет вес балки, выдерживающей заданный изгибающий момент. Таким образом, отно-

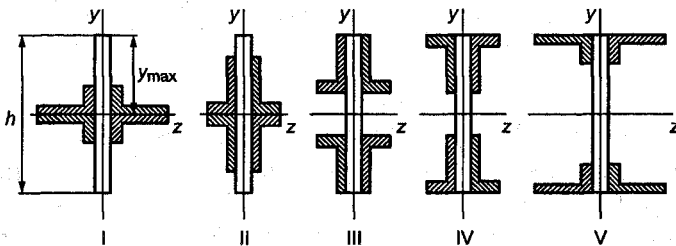


Рис. 11.25

шение W_z/A можно принять за оценочный критерий качества формы поперечного сечения.

Используя указанный критерий, произведем сопоставление различных форм поперечных сечений:

а) для прямоугольного сечения шириной b и высотой h

$$\frac{W_z}{A} = \frac{h}{6} = 0,167h;$$

б) для кругового поперечного сечения диаметром d

$$\frac{W_z}{A} = \frac{d}{8} = 0,125d;$$

в) для квадратного $h \times h$ поперечного сечения, имеющего площадь, одинаковую с круговым сечением диаметром d ,

$$\frac{W_z}{A} = \frac{h}{6} = 0,148d,$$

где сторона квадрата $h = \frac{d}{2}\sqrt{\pi}$;

г) для стандартных двутавровых сечений

$$\frac{W_z}{A} = 0,35h,$$

где h - высота профиля.

Приведенные расчеты показывают, что прямоугольное поперечное сечение при сохранении площади становится более рациональным с увеличением высоты h ; квадратное поперечное сечение более рационально, чем круговое; наиболее экономичным является двутавровое сечение.

Приведенные выводы справедливы только для балок, изготовленных из пластичного материала, оказывающего одинаковое сопротивление при растяжении и сжатии. Для балок из хрупкого материала, у которого допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma]_p$ значительно меньше допускаемого напряжения на сжатие $[\sigma]_c$, целесообразно применять сечения, несимметричные относительно нейтральной оси, при этом наиболее выгоднейшей формой сечения является такое, у которого расстояния h_1 и h_2 от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых

и сжатых волокон будут пропорциональны допускаемым напряжениям материала на растяжение и сжатие:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}. \quad (11.38)$$

При выполнении условия (11.38) сечение будет одинаково сопротивляться растяжению и сжатию. Примером такого сечения является тавровое сечение (рис. 11.26).

Имеются случаи, когда кроме формы сечения большое значение имеет его расположение относительно плоскости, в которой действует изгибающий момент. Например, рассмотрим брус квадратного поперечного сечения, изгибаемый силами, действующими в вертикальной плоскости, совпадающей с диагональю сечения (рис. 11.27).

Осевой момент инерции квадрата относительно оси z равен

$$I_z = \frac{a^4}{12}.$$

Момент сопротивления

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$

Теперь срежем углы (заштрихованы на рис. 11.27) так, чтобы $bc = \alpha a$, где α - дробное число, подлежащее определению. Полученное новое поперечное сечение состоит из квадрата I со сторонами $a(1-\alpha)$ и двух равных параллелограммов II и III. Момент инерции этого сечения относительно оси z будет равен

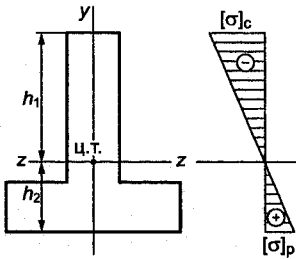


Рис. 11.26

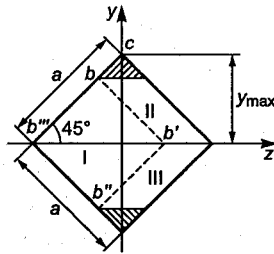


Рис. 11.27

$$I'_z = \frac{a^4(1-\alpha)^4}{12} + 2 \frac{\alpha a \sqrt{2}}{3} \left[\frac{a(1-\alpha)}{\sqrt{2}} \right]^3 = \frac{a^4(1-\alpha)^3}{12} (1+3\alpha).$$

Соответствующий момент сопротивления

$$W'_z = \frac{I'_z \sqrt{2}}{a(1-\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 (1-\alpha)^2 (1+3\alpha).$$

Наибольшее значение момент сопротивления W'_z имеет при $\alpha = 1/9$. Подставляя данное значение α в выражение для момента сопротивления W'_z , получим, что срезанием углов его величина увеличивается приблизительно на 5%. Этот результат объясняется тем, что при срезании углов момент инерции поперечного сечения уменьшается меньше, чем высота, поэтому момент сопротивления должен увеличиваться, подобный результат можно получить и для других сечений. Так, осевой момент сопротивления *прямоугольника* с узкими выступающими по высоте частями (рис. 11.28, а) можно увеличить, отрезав эти части.

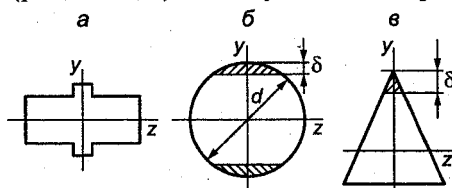


Рис. 11.28

Момент сопротивления *кругового поперечного сечения* (рис. 11.28, б) увеличивается на 0,7% при срезании двух заштрихованных сегментов высотой $\delta = 0,011d$. Момент сопротивления *треугольного сечения* (рис. 11.28, в) можно увеличить, срезав заштрихованный угол.

11.8. Концентрация напряжений

Равномерное распределение напряжений по площади поперечного сечения растянутого или сжатого стержня справедливо только тогда, когда поперечное сечение постоянно по длине стержня (например, распределение напряжений в образцах

при испытании материалов на растяжение). Форма деталей машин обычно отличается от формы образцов и стержней постоянного сечения. Детали часто имеют выточки, резьбу, канавки для смазки, шпоночные канавки, поперечные отверстия, галтели в местах перехода от одного диаметра к другому и так далее, которые вызывают местное резкое повышение напряжений в сечении. Местное, локальное увеличение напряжений в ограниченном объеме упругого тела по сравнению с номинальными напряжениями называется **концентрацией напряжений**, а причины, вызывающие концентрацию напряжений, — **концентраторами напряжений**.

Количественной характеристикой, мерой концентрации напряжений является **коэффициент концентрации**, представляющий собой отношение наибольшего местного напряжения к номинальному:

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}}. \quad (11.39)$$

Коэффициенты концентрации напряжений определяются методами теории упругости с использованием теории аналитических функций и аппарата конформного отображения или экспериментальным путем на основе поляризационно-оптического или другого метода и называются **теоретическими коэффициентами концентрации**.

Номинальное напряжение вычисляется как среднее напряжение в ослабленном сечении:

$$\sigma_{\text{ном}} = \frac{N}{A_{\text{нетто}}}, \quad (11.40)$$

где N — нормальная сила в ослабленном сечении; $A_{\text{нетто}}$ — площадь ослабленного сечения.

Иногда номинальное напряжение определяют по всей площади поперечного сечения:

$$\sigma_{\text{ном}} = \frac{N}{A_{\text{брутто}}}, \quad (11.41)$$

где $A_{\text{брутто}}$ — площадь поперечного сечения без учета ее ослабления.

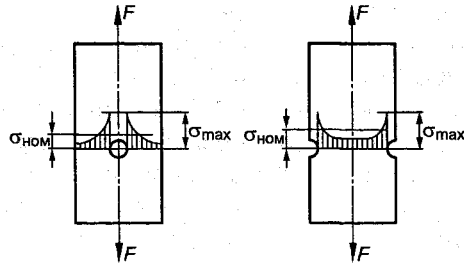


Рис. 11.29

Величина местных напряжений зависит от формы детали, очертания и размеров концентратора, физико-механических свойств материала и других факторов.

Например, у краев отверстия малого диаметра в растягиваемой полосе местное напряжение равно трем номинальным ($\alpha_\sigma = 3$), у краев полукруглых вырезов - двум номинальным ($\alpha_\sigma = 2$) (рис. 11.29).

Значения теоретических коэффициентов концентрации для некоторых концентраторов в стержнях круглого поперечного сечения приведены в табл. 11.1. Более подробные данные о теоретических коэффициентах концентрации имеются в справочниках.

Таблица 11.1

Вид концентратора напряжения	α_σ
Полукруглая выточка при отношении r/d	
0,1	2,0
0,5	1,6
1,0	1,2
2,0	1,1
Галтель при отношении радиуса галтели r к диаметру стержня d	
0,125	1,5
0,25	1,2
0,5	1,1
Переход под прямым углом	2,0
Острая V-образная выточка	3,0
Отверстие при отношении диаметра отверстия к диаметру стержня 0,1-0,33	2,0
Риски от реза на поверхности	1,2-1,4

Зная номинальное напряжение $\sigma_{\text{ном}}$ и коэффициент концентрации, получим максимальное напряжение в зоне концентрации

$$\sigma_{\text{max}} = \alpha_{\sigma} \sigma_{\text{ном}}. \quad (11.42)$$

Рассмотрим концентрацию напряжений на примере растянутой пластины с острым V-образным разрезом (рис. 11.30). Часть пластины, расположенную слева от линии CD , будем называть **непрерывной частью**, а часть, расположенную справа, – **прерывистой**. Очевидно, обе половины прерывистой части, освобожденные в зоне разреза от растягивающих напряжений, будут стремиться укоротиться и, следовательно, углубить разрез.

Но этому будет препятствовать примыкающая по линии CD непрерывная часть. В результате возникнут продольные силы, препятствующие смещению прерывистой, разрезанной части относительно непрерывной. Естественно, силы N имеют максимальные значения в окрестности разреза и по мере удаления от него быстро уменьшаются. Продольные силы N вдоль линий своего действия создают деформацию растяжения пластины, вызывая в поперечных сечениях нормальные растягивающие напряжения, имеющие максимальную величину в поперечном сечении, совпадающем с разрезом. Эти нормальные напряжения, действующие в поперечных сечениях непрерывной части пластины, складываются с напряжениями, возникающими в результате общего растяжения пластины, и создают концентрацию напряжений. Понятно, что наибольшая концентрация напряжений будет иметь место в области пластины, непосредственно прилегающей к разрезу.

В местах примыкания концов прерывистой части пластины к непрерывной возникают касательные напряжения. Продольные напряжения σ_x при растяжении являются **главными напряжениями** и направлены параллельно оси стержня. В окрестности выреза, в переходной зоне I-I, главные напряжения за счет касательных напряжений отклоняются от оси стержня на некоторый угол. Следовательно, если построить траектории * главных напряжений, то они будут иметь вид, представленный пунктиром на рис. 11.30. Густота линий будет пропорциональна величине действующих у разреза местных напряжений, по мере

* Траекториями главных напряжений называются кривые, касательные к которым в любой точке имеют направление главных напряжений в этой точке.

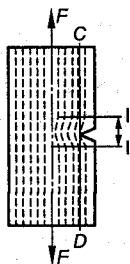


Рис. 11.30

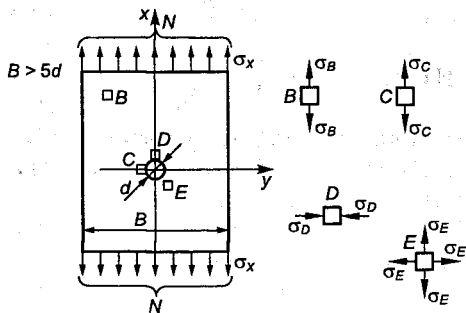


Рис. 11.31

удаления от разреза (концентратора) влияние местных напряжений будет резко уменьшаться.

Рассмотрим пластинку, равномерно растягиваемую напряжением σ_x , с отверстием, диаметр которого меньше $1/5$ ширины пластинки (рис. 11.31).

Представим напряженное состояние в точках B, C, D, E , расположенных на различном расстоянии от отверстия. В действительности, как показывают точные исследования, напряженное состояние в местах концентрации имеет более сложный характер. Однако несмотря на упрощение, рис. 11.31 достаточно верно отражает сущность явлений, вызываемых концентрацией напряжений.

Напряжение в точке B

$$\sigma_B = \sigma_x = \frac{N}{B\delta},$$

где δ - толщина пластинки.

Напряжение в точке C

$$\sigma_C = \alpha_\sigma \sigma_{\text{ном}} = \alpha_\sigma \frac{N}{(B-d)\delta},$$

где α_σ - коэффициент концентрации напряжений; $\sigma_{\text{ном}}$ - номинальное напряжение.

Напряжение в точке D

$$\sigma_D = -\alpha'_\sigma \tau_{\text{ном}},$$

где α'_σ - коэффициент концентрации напряжений в точке D .

Напряженное состояние в точке E , расположенной на небольшом расстоянии от отверстия, является двухосным.

Из рассмотрения напряженного состояния в точках и рис. 11.29 и 11.31 можно сделать следующие выводы.

1. Влияние местных напряжений (концентрации напряжений) на расстоянии, превышающем диаметр отверстия, отсутствует.

2. Местные напряжения имеют максимальное значение вблизи концентратора напряжений.

3. Местные напряжения быстро убывают при удалении от концентратора напряжений.

4. Напряженное состояние в окрестности концентратора напряжений всегда более сложное по сравнению с точками, удаленными от концентратора напряжений.

5. Местные напряжения не могут быть вычислены методами сопротивления материалов.

Для уменьшения концентрации напряжений необходимо избегать глубоких выточек, резких переходов диаметров сечений, тщательно обрабатывать поверхность деталей, особенно изготовленных из высокопрочных легированных сталей, так как даже мелкие следы от шлифовального круга могут снизить предел прочности закаленной стали при растяжении на 10–20 %. Теоретический коэффициент концентрации напряжений учитывает только геометрию концентратора, но не учитывает свойств реального материала. Поэтому на практике используют эффективный коэффициент концентрации напряжений K_{σ} , который учитывает геометрию концентратора и свойства материала и определяется при статическом нагружении отношением разрушающей нагрузки образцов из данного материала, соответственно, без концентратора напряжений и с концентратором напряжений:

$$K_{\sigma} = \frac{F}{F_K}, \quad (11.43)$$

где F - разрушающая нагрузка образца без концентратора напряжений; F_K - разрушающая нагрузка образца с концентратором напряжений.)

Концентрация напряжений не одинаково влияет на прочность пластичных и хрупких материалов. Для конструкции из пластичных материалов местные напряжения в зоне концентрации при статических нагрузках не опасны. Поясним это на

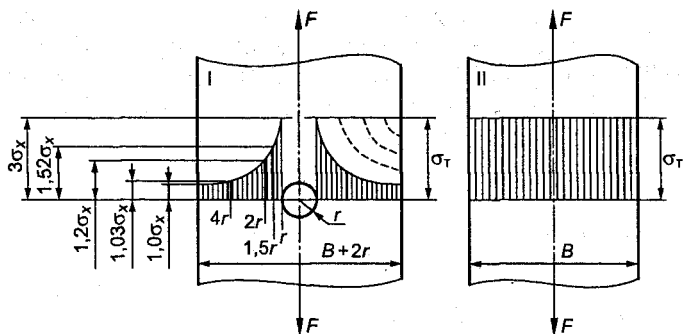


Рис. 11.32

элементарном примере. При растяжении образцов из пластичного материала в зоне текучести происходит значительная пластическая деформация $\varepsilon > \varepsilon_T$ (где ε_T – деформация, соответствующая пределу текучести) при напряжении, не превышающем предел текучести σ_T .

Рассмотрим эпюру распределения напряжений в сечении пластинки, ослабленной отверстием (рис. 11.32).

Пусть предел текучести материала $\sigma_T = 25\,000 \text{ Н/см}^2$ и растягиваются две пластинки одинаковой толщины δ с размерами ширины B и $B + 2r$, площадью сечения $B\delta = 1,0 \text{ см}^2$. В табл. 11.2 представлены нагрузка и величины максимальных напряжений, возникающих в пластинках, в сечении, проходящем через отверстие.

Таблица 11.2

Нагрузка, Н		5000	10 000	15 000	20 000	25 000
Напряжение, Н/см ²	Полоса I	15 000	25 000	25 000	25 000	25 000
	Полоса II	5000	10 000	15 000	20 000	25 000

Из табл. 11.2 следует, что несущая способность пластинок в упругой зоне одинакова. Это объясняется тем, что в зоне концентрации напряжений происходит пластическая деформация, вызывающая перераспределение внутренних сил и выравнивание, сглаживание эпюры напряжений.

Эффективный коэффициент концентрации у пластичных материалов при статической нагрузке близок к единице. Поэтому в расчетах на прочность при статических нагрузках концентрацию напряжений не учитывают.

У однородных хрупких материалов типа закаленной стали, высококачественного чугуна диаграмма растяжения не имеет зоны текучести. Поэтому неравномерность распределения напряжений, вызываемая концентрацией, сохраняется при статических нагрузках на всем интервале нагружения вплоть до разрушения. В окрестности концентратора под действием максимальных напряжений начинают развиваться трещины и происходит разрушение материала. Эффективный коэффициент концентрации напряжений K_{σ} таких материалов близок к теоретическому α_{σ} . Во всех случаях расчета на прочность деталей из однородных хрупких материалов влияние концентрации напряжений необходимо учитывать. У неоднородных хрупких материалов типа серого литейного чугуна влияние концентрации напряжений незначительно, что объясняется наличием в материале собственных несовершенств, пор, различных включений и т.д. В расчетах на прочность обычно концентрацию напряжений не учитывают.

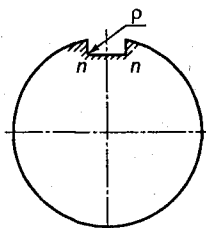


Рис. 11.33

При кручении и изгибе, как и при растяжении в местах резкого изменения формы или размеров поперечных сечений, происходит концентрация напряжений.

В качестве примера влияния формы выточки на концентрацию напряжений рассмотрим паз (шпоночной канавки) с резко выраженными углами (рис. 11.33).

Таблица 11.3

ρ , мм	2,54	5,08	7,62	10,16	12,70	15,24	17,78
α_{τ}	5,4	3,4	2,7	2,3	2,1	2,0	1,9

Опыты показали, что коэффициент концентрации напряжений для выточки зависит главным образом от радиуса закругления в вершинах входящих углов (точки $n-n$). При малых радиусах закругления коэффициент концентрации может достигать значения, равного 5 и выше, т.е. незначительный крутящий момент будет вызывать в углах пластические деформации. Величины теоретического коэффициента концентрации в зависимости от радиуса закругления приведены в табл. 11.3, из

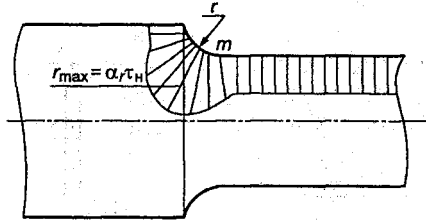


Рис. 11.34

которой следует, что концентрацию напряжений можно уменьшить, увеличивая радиус закругления в углах.

Рассмотрим кручение вала, когда изменение диаметра происходит резко (рис. 11.34). В этом случае в точке m , т.е. у начала выкружек, имеет место высокая концентрация напряжений, зависящая от отношений r/d и D/d (где r - радиус выкружки, d и D - диаметры участков).

Исследования показывают, что при малых радиусах закругления r и определенном отношении D/d коэффициенты концентрации напряжений могут быть больше 3.

Необходимо отметить, что для пластичных материалов при статических нагрузках концентрация напряжений при кручении не опасна, так как в зоне концентрации за счет пластических деформаций происходит перераспределение, выравнивание напряжений. У валов, изготовленных из однородных хрупких материалов типа закаленной стали, выравнивание напряжений не происходит и в местах изменения диаметра даже в случае статических нагрузок за счет концентрации напряжений появляются трещины, которые могут вызвать разрушение вала. Поэтому при расчетах на прочность деталей из таких материалов концентрацию напряжений необходимо учитывать.

При изгибе, как при растяжении и кручении, в местах резкого изменения формы и размеров поперечных сечений наблюдается концентрация напряжений.

На рис. 11.35 приведены эпюры распределения нормальных напряжений в сечениях стержня при отсутствии и при наличии концентрации напряжений. В переходной зоне вследствие резкого изменения сечения стержня в крайних волокнах возникает концентрация напряжений

$$\sigma_{\max} = \alpha_{\sigma} \sigma_{\text{ном}},$$

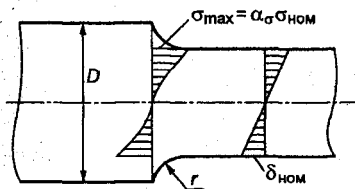


Рис. 11.35

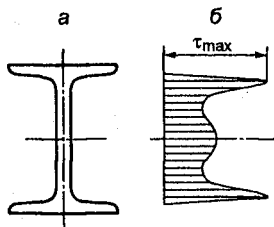


Рис. 11.36

где α_σ – теоретический коэффициент концентрации, зависящий от отношения диаметров d/D и радиуса закругления r ; $\sigma_{\text{ном}}$ – номинальное напряжение.

Значения теоретического коэффициента концентрации касательных напряжений α_τ в зависимости от d/D и r приводятся в справочной литературе.

При изгибе балок из прокатных профилей уголков, швеллеров, двутавров и других в местах соединения полки со стенкой возникает концентрация касательных напряжений, и эпюра распределения касательных напряжений будет изображаться кривой, представленной на рис. 11.36, б.

Из эпюры следует, что в точках входящих углов сечения касательные напряжения достигают большой величины. На практике входящие углы значительно скругляют, чтобы напряжение в них примерно соответствовало величинам, получаемым расчетом.

Концентрация касательных напряжений при изгибе для деталей из пластичных материалов при статическом нагружении благодаря перераспределению касательных напряжений вследствие текучести не представляет опасности. В случае однородных хрупких материалов максимальные касательные напряжения ограничиваются пределом прочности, поэтому *при расчете деталей на прочность нужно учитывать концентрацию напряжений.*

В заключение следует отметить, что при статических нагрузках пластичные материалы считаются не чувствительными к концентрации напряжений. Однако при ударных и повторно-переменных нагрузках деформации и напряжения быстро изменяются во времени, выравнивание напряжений произойти не успевает и концентрация напряжений будет значительно снижать прочность пластичных материалов. Поэтому *в расчетах на прочность деталей из пластичных материалов при динамических нагрузках необходимо учитывать концентрацию напряжений.*

Глава 12

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

12.1. Дифференциальное уравнение упругой линии балки

При расчете деталей, работающих на изгиб, во многих случаях важно обеспечить не только прочность, но и жесткость, чтобы наибольший прогиб, вызываемый действующими нагрузками, не превышал определенной величины. Например, прогиб вала редуктора, на котором насажена шестерня, нарушает правильность зацепления, уменьшая ее работоспособность. Для выполнения расчетов на жесткость необходимо уметь определять перемещения точек балки под действием любой внешней нагрузки.

Рассмотрим изгиб балки в главной плоскости xOy (рис. 12.1).

Под действием нагрузки F первоначально прямая ось балки превращается в кривую $OC'B'$. Ось балки в деформированном состоянии называется **изогнутой осью** или **упругой линией**. При поперечном изгибе, в отличие от чистого изгиба, поперечные сечения не остаются плоскими, поэтому под перемещением сечения понимается перемещение его центра тяжести, а под углом поворота – угол, на который поворачивается при изгибе нормаль, проведенная к оси балки в заданном сечении. Так как при изгибе длина упругой линии остается постоянной, то происходит смещение ее точек по оси x . Пусть центр тяжести произвольного сечения C_1 при изгибе переместился на величину δ и занял положение C'_1 . Обозначим горизонтальное и верти-

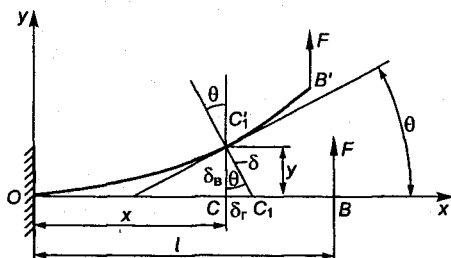


Рис. 12.1

кальное перемещение точки C_1' соответственно через δ_r и δ_b , а угол поворота нормали (сечения) через θ . Угол θ , на который поворачивается сечение по отношению к своему первоначальному положению, называется **углом поворота**. Угол поворота θ равен углу между касательной, проведенной к упругой линии в рассматриваемом сечении, и осью x (см. рис. 12.1).

Горизонтальное смещение для рассматриваемого сечения C_1 равно

$$\delta_r = \delta_b \operatorname{tg} \theta.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{\delta_b}{\delta_r} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{3} + \frac{\theta^3}{45} - \dots$$

Примем значение $\theta = 4^\circ$. Сохранив в разложении два члена и подставив значение $\theta = 0,0698$ рад, получим

$$\frac{\delta_b}{\delta_r} = 14,3.$$

Таким образом, при малых углах поворота, имеющих место на практике, горизонтальные смещения δ_r являются величинами второго порядка малости по сравнению с вертикальными перемещениями δ_b , поэтому ими пренебрегают и считают, что сечения при изгибе перемещаются только в направлениях, перпендикулярных к оси балки. Расстояние, на которое перемещается центр тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к первоначальному положению оси балки, называется **прогибом балки в данном сечении**. На рис. 12.1 произвольное сечение C , расположенное на расстоянии x от начала координат, имеет прогиб y . Наибольший прогиб называется **стрелой прогиба** и обозначается буквой f .

Прогиб y будем считать положительным, если перемещение происходит вверх, в направлении оси y . Угол θ будем считать положительным при повороте сечения против часовой стрелки. Как прогибы, так и углы поворота являются функциями координаты x :

$$y = f(x), \quad \theta = f(x).$$

Для получения дифференциального уравнения упругой линии в общем случае поперечного изгиба воспользуемся зависимостью между кривизной и изгибающим моментом (формула 11.7), принимая во внимание то, что кривизна упругой линии в любой точке зависит только от величины изгибающего момента, что влияние поперечной силы на кривизну незначительно и им можно пренебречь. Тогда для произвольного сечения запишем

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{EI_z}, \quad (12.1)$$

где M_x - изгибающий момент в произвольном сечении x ; ρ_x - радиус кривизны упругой линии в произвольном сечении x .

Из курса высшей математики кривизна плоской кривой в произвольной точке определяется выражением

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}, \quad (12.2)$$

где y' и y'' - первая и вторая производные уравнения упругой линии $y = f(x)$.

При принятом направлении координатных осей знаки изгибающего момента и кривизны совпадают, поэтому можно просто приравнять правые части уравнений (12.1) и (12.2):

$$\frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}} = \frac{M_x}{EI_z}. \quad (12.3)$$

Уравнение (12.3) называется **точным дифференциальным уравнением** упругой линии балки. Это нелинейное уравнение второго порядка, интегрирование которого представляет определенные трудности. Так как на практике допустимые прогибы в машиностроении составляют $(0,04-0,001)l$ (где l - длина пролета), а углы поворота не превышают 1° , то точное уравнение (12.3) заменяют приближенным, называемым **уравнением малых перемещений**. Тогда тангенс угла поворота сечения θ , равный тангенсу угла между касательной к упругой линии и осью x , можно принять равным самому углу:

$$\operatorname{tg} \theta \approx \theta = \frac{dy}{dx} = y'. \quad (12.4)$$

Пренебрегая в уравнении (12.3) квадратом y' как малой величиной по сравнению с единицей, получим дифференциальное уравнение, обычно называемое **основным дифференциальным уравнением упругой линии**, в виде

$$y'' = \frac{M_x}{EI_z}, \quad (12.5)$$

или

$$EI_z y'' = M_x, \quad (12.6)$$

где y'' - вторая производная от функции $y = f(x)$.

Проинтегрировав уравнение (12.6) один раз, получим выражение для углов поворота:

$$\theta_x = y' = \int \frac{M_x}{EI_z} dx + C. \quad (12.7)$$

Проинтегрировав уравнение второй раз, получим выражение для прогибов

$$y_x = \int dx \int \frac{M_x}{EI_z} dx + Cx + D, \quad (12.8)$$

где C и D - произвольные постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления балки и непрерывности упругой линии при переходе из одного участка балки на другой.

В случае гибких стержней, допускающих большие упругие перемещения, а значит, большие изменения кривизны, пользоваться формулой (12.6) нельзя и необходимо использовать точное уравнение (12.3) с обязательным учетом при составлении уравнения изгибающего момента горизонтальных смещений поперечных сечений.

Дифференцируя уравнения (12.6) по x , получим уравнения упругой линии в зависимости от поперечной силы Q и распределенной нагрузки p :

$$EI_z y''' = -Q, \quad (12.9)$$

$$EI_z y^{IV} = p. \quad (12.10)$$

Из формул (12.9) и (12.10) следует, что в случае нагружения бруса равномерно распределенной нагрузкой p , упругая линия будет представлять собой кривую четвертого порядка; если на участке поперечная сила $Q = \text{const}$, то упругая линия будет кривой третьего порядка.

Пример 12.1. Балка, свободно лежащая на двух опорах, нагружена силой F (рис. 12.2). Составить уравнение упругой линии, найти величину прогиба в точке приложения силы F и сравнить его с прогибом в середине балки.

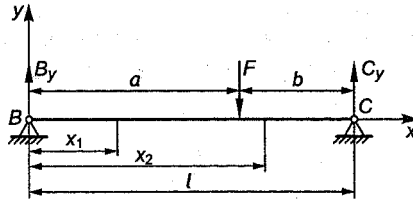


Рис. 12.2

Решение. Начало координат расположим на левой опоре, ось y направим вверх, ось x - вправо. Определим опорные реакции и составим уравнения изгибающих моментов на первом и втором участках балки:

$$B_y = \frac{Fb}{l}; \quad C_y = \frac{Fa}{l}; \quad M_{x_1} = \frac{Fb}{l}x_1; \quad M_{x_2} = \frac{Fb}{l}x_2 - F(x_2 - a).$$

Так как имеются два уравнения изгибающих моментов, то упругая линия балки будет описываться двумя дифференциальными уравнениями, написанными для каждого участка балки.

Подставив M_{x_1} и M_{x_2} в уравнение (12.6), получим

$$EI_z y_1'' = \frac{Fb}{l}x_1; \quad EI_z y_2'' = \frac{Fb}{l}x_2 - F(x_2 - a).$$

Интегрируя уравнения дважды, найдем

$$y_1' = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{Fb}{l} \frac{x_1^2}{2} + C_1 \right); \quad y_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{Fb}{l} \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + D_1 \right);$$

$$y_2' = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{Fb}{l} \frac{x_2^2}{2} - \frac{F(x_2 - a)^2}{2} + C_2 \right);$$

$$y_2 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{Fb}{l} \frac{x_2^3}{6} - \frac{F(x_2 - a)^3}{6} + C_2 x_2 + D_2 \right).$$

Определяем постоянные интегрирования из условий закрепления балки и условий непрерывности упругой линии при переходе с одного участка на другой. На границе участков при $x_1 = x_2 = a$ упругая линия должна иметь одинаковый прогиб $y_1 = y_2$ и общую касательную $y_1' = y_2'$ (рис. 12.3).

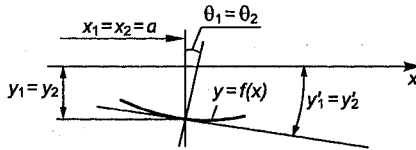


Рис. 12.3

Имеем четыре условия при $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; при $x_1 = x_2 = a$; $y_1' = y_2'$; $y_1 = y_2$; при $x_2 = l$; $y_2 = 0$, подставляя которые в уравнения, находим

$$D_1 = D_2 = 0; \quad C_1 = C_2 = -\frac{Fb}{6l} (l^2 - b^2).$$

После подстановки значений произвольных постоянных получим

$$y_1' = \frac{Fb}{6EI_z l} (3x_1^2 - l^2 + b^2);$$

$$y_2' = \frac{Fb}{6EI_z l} \left[3x_2^2 - 3\frac{l}{b}(x-a)^2 - l^2 + b^2 \right];$$

$$y_1 = \frac{Fb}{6EI_z l} \left[x_1^3 - (l^2 - b^2)x_1 \right] \text{ при } x_1 \leq a;$$

$$y_2 = \frac{Fb}{6EI_z l} \left[x_2^3 - \frac{l}{b}(x_2 - a)^3 - (l^2 - b^2)x_2 \right] \text{ при } x_2 \geq a.$$

Прогиб в сечении, где приложена сила F , получим, подставив в уравнение для y_1 величину $x_1 = a$:

$$y_1 = y_2 = -\frac{Fa^2(l-a)^2}{3EI_z l} = -\frac{Fa^2b^2}{3EI_z l}.$$

Знак « $-$ » указывает на то, что балка прогибается в сторону, противоположную положительному направлению оси y .

Наибольший прогиб имеет место в сечении, где касательная к упругой линии горизонтальна. Положение этого сечения, если $a > b$, найдем, приравняв y_1' к нулю:

$$x_{\max} = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя x_{\max} в уравнение для y_1 , получим

$$y_{\max} = -\frac{Fb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI_z}.$$

Уравнение для x_{\max} показывает, что в случае одной сосредоточенной силы наибольший прогиб располагается близко к середине пролета. В предельном случае, когда b — малая величина и сила располагается близко к опоре, расстояние x_{\max} будет

$$x_{\max} \approx l/\sqrt{3}.$$

В этом случае сечение с наибольшим прогибом отстоит от середины пролета на небольшую величину:

$$\frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{l}{2} = 0,077l.$$

Прогиб в середине пролета получим, подставив $x_1 = l/2$ в уравнение y_1 :

$$y_1 = -\frac{Fb}{48EI_z}(3l^2 - 4b^2).$$

Наибольшая разность между прогибом y_{\max} , когда сила F располагается близко у опоры ($b \rightarrow 0$), и прогибом в середине пролета составляет всего 2,5 % от наибольшего прогиба y_{\max} .

12.2. Метод начальных параметров

Применение метода непосредственного интегрирования, рассмотренного в предыдущем параграфе для балок, имеющих несколько участков, связано с определенными сложностями при составлении и решении системы линейных алгебраических уравнений. Так, если балка имеет n участков, то при интегрировании дифференциальных уравнений, составленных для всех участков, получается $2n$ произвольных постоянных, определение которых требует большой вычислительной работы. Поэтому был разработан метод, не требующий непосредственного интегрирования, который называется **методом Коши-Крылова**¹⁸ или **методом начальных параметров**.

Рассмотрим участок балки постоянного поперечного сечения ($I_z = \text{const}$), на который действуют типичные нагрузки: пара сил с моментом m , сосредоточенная сила F и распределенная нагрузка постоянной интенсивности p (рис. 12.4).

Выберем начало координат в крайнем левом сечении балки, ось y направим вверх, ось x - вправо. Обозначим прогиб и угол поворота сечения балки в начале координат через y_0 и θ_0 . Изгибающий момент для сечения, расположенного на расстоянии x от начала координат, будет

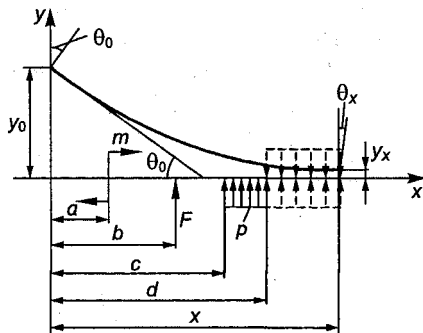


Рис. 12.4

$$M_x = m + F(x-b) + \frac{p(x-c)^2}{2} - \frac{p(x-d)^2}{2}. \quad (12.11)$$

Если распределенная нагрузка p не достигает рассматриваемого сечения, как показано на рис. 12.4, где распределенная нагрузка действует только на участке от c до d , то необходимо продолжить ее вправо до рассматриваемого сечения, вводя компенсирующую нагрузку такой же интенсивности, но с обратным знаком на участке от d до x . Этот прием обеспечивает сохранение действительной нагруженности балки и объясняет появление в уравнении (12.11) дополнительного члена

$$\frac{p(x-d)^2}{2},$$

где $(x-d)$ - длина незагруженного (компенсированного) участка.

Компенсированные нагрузки на рисунках изображаются штриховыми линиями.

В том случае, когда на балку действует несколько моментов m_i сосредоточенных сил F_i (в том числе и опорных реакций), а также имеются участки с распределенной нагрузкой разной интенсивности p_i , то соответствующие слагаемые в уравнении (12.11) будут повторяться. Дифференциальное уравнение упругой линии (12.6) запишется в виде

$$EI_z y_x'' = m + F(x-b) + \frac{p(x-c)^2}{2} - \frac{p(x-d)^2}{2}. \quad (12.12)$$

Так как $y_x'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy_x}{dx} \right) = \frac{d\theta_x}{dx}$, где $\frac{dy_x}{dx} = \theta_x$ (см. формулу 12.4), то уравнение (12.12) можно записать следующим образом:

$$EI_z d\theta_x = m dx + F(x-b) dx + \frac{p(x-c)^2}{2} dx - \frac{p(x-d)^2}{2} dx. \quad (12.12 \text{ а})$$

Проинтегрируем обе части равенства (12.12 а) на участке длиной x , не раскрывая скобок в правой части.

$$\int_{\theta_0}^{\theta_x} EI_z dQ_x = \int_a^x m dx + \int_b^x F(x-b) dx + \int_c^x \frac{p(x-c)^2}{2} dx - \int_d^x \frac{p(x-d)^2}{2} dx,$$

или

$$EI_z Q_x \Big|_{\theta_0}^{\theta_x} = mx \Big|_a^x + \frac{F(x-b)^2}{2} \Big|_b^x + \frac{p(x-c)^3}{6} \Big|_c^x - \frac{p(x-d)^3}{6} \Big|_d^x. \quad (12.13)$$

Пределы интегрирования указывают, что угол поворота изменяется от начального значения θ_0 в начале координат до θ_x в сечении x , момент m , сила F и нагрузка p вызывают изгиб справа соответствующих координат a , b , c , где приложены нагрузки.

После подстановки в выражение (12.13) пределов интегрирования получим формулу для определения угла поворота в произвольном сечении:

$$EI_z \theta_x = EI_z \theta_0 + m(x-a) + \frac{F(x-b)^2}{2} + \frac{p(x-c)^3}{6} - \frac{p(x-d)^3}{6}. \quad (12.14)$$

Так как $\theta_x = \frac{dy_x}{dx}$, то выражение (12.14) можно представить в виде

$$EI_z dy_x = EI_z \theta_0 dx + m(x-a)dx + \frac{F(x-b)^2}{2} dx + \frac{p(x-c)^3}{6} dx - \frac{p(x-d)^3}{6} dx. \quad (12.14a)$$

Проинтегрируем обе части равенства (12.14a) на участке длиной x , также не раскрывая скобок в правой части:

$$\int_{y_0}^{y_x} EI_z dy_x = \int_0^x EI_z \theta_0 dx + \int_a^x m(x-a)dx + \int_b^x \frac{F(x-b)^2}{2} dx + \int_c^x \frac{p(x-c)^3}{6} dx - \int_d^x \frac{p(x-d)^3}{6} dx,$$

или

$$EI_z y_x \Big|_{y_0}^{y_x} = EI_z \theta_0 \Big|_0^x + \frac{m(x-a)^2}{2} \Big|_a^x + \frac{F(x-b)^3}{6} \Big|_b^x + \frac{p(x-c)^4}{24} \Big|_c^x - \frac{p(x-d)^4}{24} \Big|_d^x. \quad (12.15)$$

После подстановки пределов интегрирования в (12.15) получим формулу для определения прогиба в произвольном сечении балки.

$$EI_z y_x = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x + m \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + p \frac{(x-c)^4}{24} - p \frac{(x-d)^4}{24}. \quad (12.16)$$

Уравнение (12.16) называется **универсальным уравнением упругой линии балки**. Преимущество его состоит в том, что при любом числе участков нужно определять только две постоянные y_0 и θ_0 - прогиб и угол поворота в начале координат, которые называются **начальными параметрами** (откуда и происходит название метода).

Необходимо запомнить, что в уравнения (12.14) и (12.16) подставляются только нагрузки, расположенные слева от рассматриваемого сечения, при этом знаки слагаемых определяются знаком соответствующих изгибающих моментов. Начальные параметры y_0 и θ_0 определяются из граничных условий, т.е. данных о значениях углов поворота и прогибов на опорах балки.

Возможны следующие характерные случаи закрепления балок (рис. 12.5).

Так как начало координат всегда принимается в крайнем левом сечении балки, то для случая консольной балки (рис. 12.5, а) будем иметь

$$y_0 = 0; \theta_0 = 0.$$

Для двухопорной балки (рис. 12.5, б)

$$y_0 = 0; \theta_0 \neq 0.$$

Записав уравнения прогибов для опоры B , на которой прогиб отсутствует ($y_B = 0$), получим уравнение с одним неизвестным θ_0 , откуда оно легко определяется.

Для балки с консолями (рис. 12.5, θ) оба начальных параметра не равняются нулю:

$$y_0 \neq 0; \theta_0 \neq 0.$$

Составляя уравнение прогибов для каждой опоры (при $x = a$, $y_C = 0$; при $x = (a + l)$ $y_B = 0$), получим два уравнения с двумя неизвестными y_0 и θ_0 , которые из них легко определяются.

Пример 12.2. Определить угол поворота и прогиб конечного сечения D двутавровой балки № 10, изображенной на рис. 12.6.

Решение. Определим опорные реакции B_y и C_y из уравнений моментов, составленных относительно опорных шарниров B и C :

$$\sum m_B = -6 \cdot 1 \cdot 0,5 + 10 \cdot 1,4 - C_y \cdot 3,0 + 4,0 = 0; C_y = 5 \text{ кН.}$$

$$\sum m_C = -6 \cdot 1 \cdot 3,5 + B_y \cdot 3,0 - 10 \cdot 1,6 + 4 = 0; B_y = 11 \text{ кН.}$$

Выбираем начало координат в крайнем левом сечении, ось y направляем вверх, ось x – вправо, продолжаем распределенную нагрузку до конца балки, одновременно компенсируя ее на свободном участке. В данном случае начальные параметры будут

$$y_0 \neq 0; \theta_0 \neq 0.$$

Определяем начальные параметры, увеличенные в EI_z раз, составляя два уравнения прогибов для опор B и C :

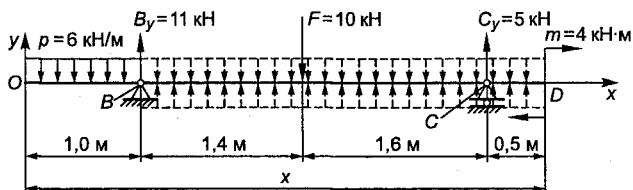


Рис. 12.6

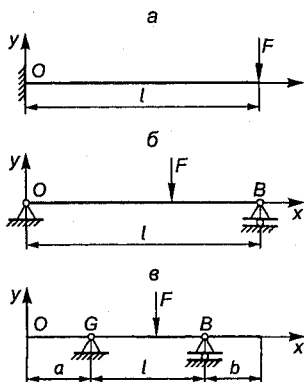


Рис. 12.5

$$EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 1,0 - \frac{6 \cdot 1,0^4}{24} = 0;$$

$$EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 4 - \frac{6 \cdot 4^4}{24} + \frac{6(4-1)}{24} + \frac{11(4,0-1,0)^3}{6} - \frac{10(4,0-2,4)^3}{6} = 0.$$

Решая уравнения, получаем:

$$EI_z \theta_0 = 0,277 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad EI_z y_0 = -0,027 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Запишем уравнения углов поворота и прогибов крайнего правого участка балки $4,0 \leq x \leq 4,5$ м, подставляя в уравнения (12.14) и (12.16) найденные значения начальных параметров

$$EI_z \theta_x = 0,277 - \frac{6(x-0)^3}{6} + \frac{6(x-1)^3}{6} + \frac{11(x-1)^2}{2} - \frac{10(x-2,4)^2}{2} + \frac{5(x-4,0)^2}{2};$$

$$EI_z y_x = -0,027 + 0,277x - \frac{6(x-0)^4}{24} + \frac{6(x-1)^4}{24} + \frac{11(x-1,0)^3}{6} - \frac{10(x-2,4)^3}{6} + \frac{5(x-4,0)^3}{6}.$$

Подставляя в уравнения $x = 4,5$ м, найдем искомые величины угла поворота и прогиба в сечении D :

$$EI_z \theta_D = 0,277 - \frac{6(4,5-0)^3}{6} + \frac{6(4,5-1)^3}{6} + \frac{11(4,5-1)^2}{2} - \frac{10(4,5-2,4)^2}{2} + \frac{5(4,5-4,0)^2}{2} = -2,018 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$EI_z y_D = -0,027 + 0,277 \cdot 4,5 - \frac{6(4,5-0)^4}{24} + \frac{6(4,5-1)^4}{24} + \frac{11(4,5-1,0)^3}{6} - \frac{10(4,5-2,4)^3}{6} + \frac{5(4,5-4,0)^3}{6} =$$

$$= -0,471 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Откуда, принимая из таблиц сортамента прокатной стали для двутавра № 10 $I_z = 198 \text{ см}^4$, найдем

$$\theta_D = \frac{2,018 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^7 \cdot 198} = -0,005 \text{ рад} = -0,3^\circ;$$

$$y_D = \frac{0,471 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^7 \cdot 198} = -0,12 \text{ см}.$$

Таким образом, сечение D переместилось на 0,12 см ниже оси x и повернулось по часовой стрелке на угол $0,3^\circ$.

12.3. Расчет на жесткость при изгибе

Расчет на жесткость заключается в учете, при выборе поперечных сечений стержней, величины допускаемых перемещений, устанавливаемых техническими нормами на основе результатов эксплуатации аналогичных конструкций.

Условие жесткости при изгибе имеет следующий вид:

$$y_p \leq [f], \quad (12.17)$$

где y_p - величина расчетного прогиба, вычисляемая с использованием уравнения упругой линии методом непосредственного интегрирования, или методом начальных параметров, или другими методами, которые будут рассмотрены ниже; $[f]$ - допускаемый прогиб.

Выражая y_p через нагрузки, получим уравнение, позволяющее решать задачи, аналогичные задачам расчета на прочность.

12.4. Влияние поперечных сил на изгиб балок

При выводе дифференциального уравнения упругой линии влияние деформаций сдвига на прогиб как незначительное во внимание не принималось и рассматривались только прогибы,

вызываемые изгибающим моментом. Чтобы установить возможную погрешность, рассмотрим *дополнительный прогиб при изгибе, вызываемый действием поперечной силы*.

Экспериментальные исследования и анализ точных решений показывают, что деформацию сдвига можно рассматривать отдельно, независимо от деформации, вызываемой изгибающим моментом, представляющей взаимный поворот смежных поперечных сечений. Дополнительный прогиб при действии поперечной силы создается в результате взаимного сдвига вдоль оси y смежных поперечных сечений относительно друг друга. Так как касательные напряжения по высоте сечения распределяются неравномерно, то при сдвиге плоские поперечные сечения превращаются в искривленные поверхности.

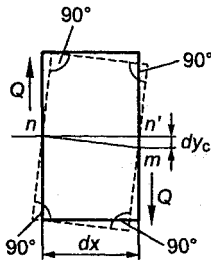


Рис. 12.7

На рис. 12.7 показан элемент балки длиной dx до и после деформации сдвига. Прямая nn' представляет собой ось балки до деформации сдвига, прямая mm' - после деформации. Элементы поперечных сечений в точках n' и m остаются параллельными, перемещаясь один по другому вдоль оси y . Верхняя и нижняя поверхности элемента будут параллельны прямой mm' , образующей с прямой nn' угол сдвига γ_c . В точках на поверхности элемента касательные напряжения отсутствуют, поэтому деформации

сдвига в них равны нулю, и прямые углы между гранями элемента после деформации сдвига будут сохраняться. Угол наклона касательной к дополнительной линии прогибов (изогнутой оси балки, вызванной только поперечной силой), в каждом поперечном сечении будет равен относительному сдвигу γ_c на нейтральной оси.

Обозначая через dy_c прогиб от сдвига и рассматривая прямую mm' как касательную к оси элемента после деформации, получим для угла наклона выражение

$$\gamma_c = \frac{dy_c}{dx} = \frac{\tau_{\max}}{G} = K_c \frac{Q}{GA}, \quad (12.18)$$

где K_c - безразмерный коэффициент, учитывающий неравномерное распределение касательных напряжений в поперечном сечении при изгибе; Q/A - среднее касательное напряжение, получаемое делением поперечной силы на площадь A попереч-

ного сечения; $K_c \frac{Q}{A}$ – максимальное касательное напряжение на нейтральной оси, совпадающей с центром тяжести сечения; G – модуль сдвига.

Считая поперечную силу непрерывной функцией длины, получим для кривизны, вызываемой сдвигом, выражение

$$\frac{d^2 y_c}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(K_c \frac{Q}{GA} \right) = \frac{K_c}{GA} \frac{dQ}{dx}. \quad (12.19)$$

Рассмотрим свободно опертую балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p (рис. 12.8).

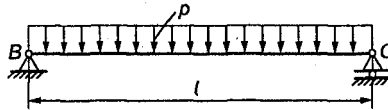


Рис. 12.8

Выражение для кривизны балки, обусловленной сдвигом, учитывая, что $\frac{dQ}{dx} = -p$, согласно (12.19), будет

$$\frac{d^2 y_c}{dx^2} = -K_c \frac{p}{GA}. \quad (12.20)$$

Проинтегрировав уравнение (12.20) дважды, получим для прогиба уравнение

$$y_c = -K_c \frac{p}{2GA} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (12.21)$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий: при $x = 0$ $y_c^B = 0$; при $x = l$ $y_c^C = 0$.

Подставляя граничные условия в уравнение (12.21), получим

$$C_2 = 0; C_1 = K_c \frac{pl}{2GA}.$$

Тогда упругая линия, вызванная действием поперечной силы, будет описываться уравнением

$$y_c = K_c \frac{pl}{2GA} x \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (12.22)$$

Отсюда в середине пролета при $x = l/2$ дополнительный прогиб будет

$$y_{c\max} = K_c \frac{pl^2}{8GA}. \quad (12.23)$$

Прогиб в середине пролета от изгибающего момента, определенный по методу начальных параметров (12.16), равен

$$y_{c\max} = \frac{5pl^4}{384EI_z}. \quad (12.24)$$

Пусть балка вместо распределенной нагрузки нагружена сосредоточенной силой F в середине пролета. В этом случае уравнение для кривизны, вызванной сдвигом, согласно (12.19), будет

$$\frac{d^2 y_c}{dx^2} = 0; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}.$$

Интегрирование дает

$$\frac{dy_c}{dx} = C_1, \quad (12.25)$$

что указывает на постоянство угла наклона, вызванного сдвигом на левом участке балки:

$$C_1 = \gamma_c = K_c \frac{Q}{GA}; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}.$$

Повторно интегрируя выражение (12.25), получим

$$y_c = K_c \frac{Q}{GA} x + C_2.$$

Учитывая граничное условие (при $x = 0$ $y_c = 0$), получим $C_2 = 0$, и уравнение упругой кривой от действия поперечной силы будет таким:

$$y_c = K_c \frac{Q}{GA} x, \quad (12.26)$$

или, учитывая, что $Q = F/2$, таким

$$y_c = K_c \frac{F}{2GA} x; 0 \leq x \leq \frac{l}{2}. \quad (12.27)$$

В середине пролета прогиб будет равен

$$y_{c \max} = K_c \frac{Fl}{4GA}. \quad (12.28)$$

При действии сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета балки, прогиб под силой от изгибающего момента, найденный по методу начальных параметров (12.16) будет

$$y_{c \max} = \frac{Fl^3}{48EI_z}. \quad (12.29)$$

Анализ формул (12.23), (12.24), (12.28), (12.29) показывает, что для балок прямоугольного сечения дополнительный прогиб от поперечной силы может составлять около 4 % от прогиба, вызываемого изгибающим моментом. Необходимо отметить, что увеличение прогиба за счет сдвига в большинстве практических задач составляет малую величину в сравнении с прогибом, вызываемым изгибающим моментом. Поэтому обычно в расчетах на жесткость этим увеличением пренебрегают. В тех же случаях, когда необходимо учитывать прогибы балок, обусловленные поперечной силой, пользуются для определения прогибов интегралами Максвелла - Мора, о которых будет сказано ниже.

Пример 12.3. Двухопорная балка прямоугольного поперечного сечения: $b = 5$ см, $h = 10$ см, длиной $l = 1,0$ м нагружена в середине пролета силой $F = 60$ кН (рис. 12.9). Определить прогиб в результате деформации сдвига в середине пролета и сравнить с прогибом от действия только изгибающего момента, если $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; $K_c = 1,5$ (формула 11.17).

Решение. Определяем опорные реакции и строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил:

$$B_y = C_y = \frac{F}{2} = \frac{60\,000}{2} = 30\,000 \text{ Н};$$

$$Q = 30\,000 \text{ Н}, 0 \leq x \leq 0,5 \text{ м};$$

$$M = 30\,000 \cdot 50 = 1\,500\,000 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

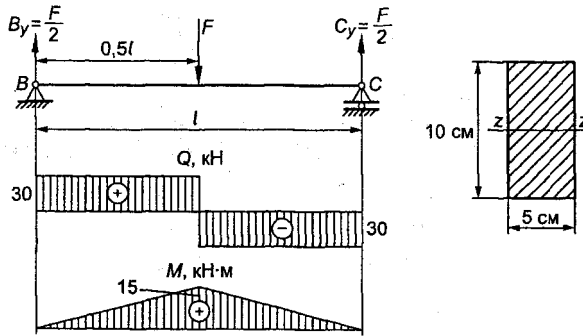


Рис. 12.9

По формуле (12.26) при $x = 50$ см вычисляем прогиб от действия поперечной силы:

$$y_{c \max} = 1,5 \frac{30000 \cdot 50}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10} = 0,0056 \text{ см.}$$

По формуле (12.29) находим прогиб от изгибающего момента:

$$y_{\max} = \frac{60\,000 \cdot 100^3 \cdot 12}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^3} = 0,15 \text{ см.}$$

Сравнивая прогибы $y_{c \max}$ и y_{\max} видим, что влияние поперечной силы на прогиб составляет

$$\Delta = \frac{y_{c \max}}{y_{\max}} \cdot 100 = \frac{0,0056}{0,15} \cdot 100 = 3,7 \%$$

Таким образом, *дополнительный прогиб от деформации сдвига имеет второстепенное значение и на практике при вычислении прогибов им пренебрегают.*

Глава 13

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БРУСЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

13.1. Потенциальная энергия деформации бруса в общем случае нагружения

Всякое упругое тело при действии внешних сил деформируется, при этом его частицы перемещаются до тех пор, пока не наступит равновесие между внутренними и внешними силами. Если скорость деформации мала, то возникающими силами инерции перемещаемых масс пренебрегают и считают нагружение статическим. Определим потенциальную энергию бруса в общем случае нагружения, когда в поперечных сечениях одновременно возникают крутящий и изгибающие моменты, нормальная и поперечные силы. Считаем нагружение бруса статическим. Определению потенциальной энергии должен предшествовать анализ внутренних силовых факторов, возникающих в поперечных сечениях бруса, и построение эпюр всех внутренних силовых факторов. Рассмотрим брус прямоугольного поперечного сечения, нагруженный произвольной системой сил (рис. 13.1).

Брус может иметь малую кривизну или состоять из прямых участков, образующих плоскую или пространственную систему. Выделим из бруса двумя сечениями, перпендикулярными к оси, бесконечно малый элемент длиной dx (рис. 13.2). Весь брус будет состоять из бесконечно большого числа таких элементов. В данном случае в поперечных сечениях элемента возникают шесть внутренних силовых факторов: три силы: N , Q_y , Q_z и три момента: T , M_z , M_y .

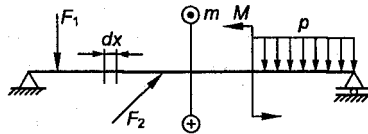


Рис. 13.1

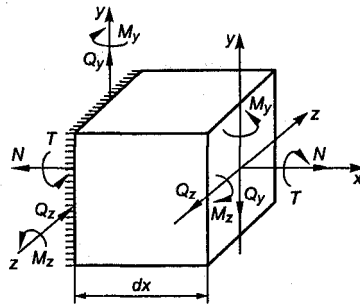


Рис. 13.2

Для выделенного элемента эти силовые факторы могут рассматриваться как внешние. Поэтому потенциальная энергия, накопленная в объеме элемента, будет равна работе, совершаемой силовыми факторами на перемещениях, происходящих при его деформации. Для упрощения будем рассматривать левое сечение элемента условно неподвижным. Тогда работа силовых факторов, приложенных к левому сечению, будет равна нулю. Следовательно, потенциальная энергия элемента на основании закона сохранения энергии будет определяться суммой работ, совершаемых внутренними силовыми факторами правого сечения на перемещениях, вызванных деформированием элемента, т.е. суммой энергий кручения, изгиба, растяжения (сжатия) и сдвига:

$$dU = dU_T + dU_{M_z} + dU_{M_y} + dU_N + dU_{Q_y} + dU_{Q_z}. \quad (13.1)$$

Необходимо отметить, что каждому силовому фактору соответствует свое перемещение, на котором другие силовые факторы совершать работу не могут. Например, перемещение вдоль оси x возникает под действием силы N , и только данная сила совершает работу на этом перемещении. Аналогично перемещение вдоль оси y вызывает сила Q_y и только она одна совершает работу на данном перемещении.

Работа, совершаемая любой статически приложенной внешней силой, равна половине произведения значения этой силы на величину соответствующего ей перемещения.

Под **перемещением** понимается такое перемещение, на котором сила совершает работу. Сосредоточенной силе соответствует линейное перемещение, паре сил – угловое перемещение.

Вычислим слагаемые, входящие в уравнение (13.1).

Потенциальная энергия деформации, накопленная элементом от кручения, равна работе крутящего момента T на угловом перемещении $d\varphi$ (рис. 13.3, а):

$$dW_T = dU_T = \frac{1}{2} T d\varphi, \quad (13.2)$$

где φ – угол закручивания правого сечения относительно неподвижного левого.

Подставляя в выражение (13.2) значение $d\varphi$ из (8.14), получим

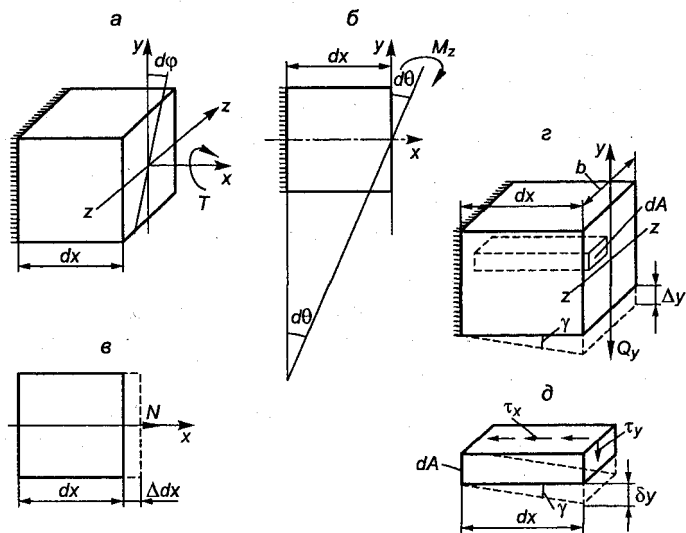


Рис. 13.3

$$dU_T = \frac{T^2 dx}{2GI_K}, \quad (13.3)$$

где GI_K - жесткость сечения бруса на кручение.

Для бруса круглого поперечного сечения

$$I_K = I_P = \frac{\pi d^4}{32},$$

и формула (13.3) принимает вид

$$dU_T = \frac{T^2 dx}{2GI_P}. \quad (13.3 \text{ а})$$

Потенциальная энергия деформации, накопленная элементом от изгиба относительно оси z , равна работе изгибающего момента M_z на угловом перемещении $d\theta$ правого сечения вокруг оси z (рис. 13.3, б):

$$dW_{M_z} = dU_{M_z} = \frac{M_z}{2} d\theta. \quad (13.4)$$

Подставляя в (13.4) значение $d\theta$ из (11.1) и (11.7):

$$d\theta = \frac{1}{\rho} dx = \frac{M_z}{EI_z} dx,$$

получим

$$dW_{M_z} = dU_{M_z} = \frac{M_z^2 dx}{2EI_z}. \quad (13.5)$$

Аналогично определяется потенциальная энергия деформации, накопленная элементом от изгиба относительно оси y :

$$dU_{M_y} = \frac{M_y^2 dx}{2EI_y}. \quad (13.6)$$

Потенциальная энергия деформации при растяжении (сжатии) равна работе нормальной силы N на линейном перемещении Δdx (рис. 13.3, в):

$$dW_N = dU_N = \frac{1}{2} N \Delta dx. \quad (13.7)$$

Подставляя в (13.7) значение Δdx из (7.4), получим

$$dW_N = dU_N = \frac{N^2 dx}{2EA}. \quad (13.8)$$

Определение работы поперечных сил затрудняется тем, что неизвестно перемещение сдвига Δy , на котором эти силы совершают работы. Поэтому выделим в рассматриваемом элементе элементарную призму площадью dA и длиной dx (рис. 18.3, з, д). Потенциальная энергия, накопленная элементарной призмой при сдвиге, равна работе касательной силы, действующей на площадке dA , на перемещении δ_y :

$$\Delta u = \frac{1}{2} \delta_y \tau_y dA, \quad (13.9)$$

где δ_y – абсолютный сдвиг в направлении оси y ; τ_y – касательное напряжение вдоль оси y .

Так как

$$\delta_y = \gamma dx; \quad \gamma = \frac{\tau_y}{G}; \quad \tau_y = \frac{Q_y S^*}{I_z b},$$

где γ - угол сдвига; G - модуль сдвига.

Тогда выражение (13.9) запишется в виде

$$\Delta u = \frac{Q_y^2 S^{*2}}{2GI_z^2 b^2} dx dA. \quad (13.10)$$

Проинтегрировав выражение (13.10) по площади сечения A , получим потенциальную энергию сдвига для всего элемента

$$dU_{Q_y} = \int_A \frac{Q_y^2 S^{*2}}{2GI_z^2 b^2} dx dA = \frac{Q_y^2 dx}{2GI_z^2} \int_A \frac{S^{*2}}{b^2} dA.$$

Умножив числитель и знаменатель на площадь сечения A , получим

$$dU_{Q_y} = \frac{Q_y^2 dx}{2GA} \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S^{*2}}{b^2} dA = K_y \frac{Q_y^2 dx}{2GA}, \quad (13.11)$$

где $K_y = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S^{*2}}{b^2} dA$ - безразмерный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Аналогично найдем

$$dU_{Q_z} = K_z \frac{Q_z^2 dx}{2GA}, \quad (13.12)$$

где K_z - коэффициент, аналогичный K_y .

Вычислим коэффициент K_y для прямоугольного поперечного сечения (см. рис. 11.9). Согласно формуле для K_y , имеем

$$A = bh; \quad I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad S^* = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Подставляя необходимые значения и интегрируя, получим

$$K_y = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S^{*2}}{b^2} dA = \frac{A}{I_z^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{S^{*2}}{b^2} b dy = \frac{bh12^2}{(bh^3)^2} \frac{b^2 h^5}{120} = 1,2;$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} S^{*2} dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{b^2}{4} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy = \frac{b^2 h^5}{120}.$$

В примере 12.3 значение коэффициента K_y для прямоугольного сечения принималось равным 1,5 по максимальному значению касательного напряжения. Значение $K_y = 1,2$, вычисленное по деформации сдвига, следует считать более точным.

Для прямоугольного сечения $K = 6/5$; для сплошного круглого сечения $K = 10/9$; для тонкостенного замкнутого кругового сечения $K = 2$; для двутаврового сечения $K = 3,33$.

Таким образом, потенциальная энергия элемента будет равна

$$dU = \frac{T^2 dx}{2GI_k} + \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} + \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \frac{N^2 dx}{2EA} + K_y \frac{Q_y^2 dx}{2GA} + K_z \frac{Q_z^2 dx}{2GA}. \quad (13.13)$$

Интегрируя (13.13) по длине, получим потенциальную энергию всего бруса:

$$U = \int_l \frac{T^2 dx}{2GI_k} + \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} + \int_l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \int_l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_l K_y \frac{Q_y^2 dx}{2GA} + \int_l K_z \frac{Q_z^2 dx}{2GA}. \quad (13.14)$$

В общем случае брус может состоять из нескольких прямых участков. Тогда после интегрирования выражения (13.14) в пределах каждого участка необходимо произвести суммирование энергии по всем участкам:

$$U = \sum_l \int \frac{T^2 dx}{2GI_k} + \sum_l \int \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} + \sum_l \int \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \sum_l \int \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum_l K_y \int \frac{Q_y^2 dx}{2GA} + \sum_l K_z \int \frac{Q_z^2 dx}{2GA}. \quad (13.15)$$

Если отдельные участки имеют небольшую кривизну; то при пользовании формулой (13.15) дифференциал длины не-

обходимо заменить на дифференциал дуги dS . Из формул (13.14) и (13.15) следует, что потенциальная энергия всегда положительна, так как внутренние силовые факторы входят в квадрате. Следует отметить, что члены, входящие в формулу (13.15), не являются во всех случаях равнозначными. Например, для бруса, работающего на кручение, все они, кроме первого, равны нулю; для бруса, работающего на изгиб в вертикальной плоскости, существенное значение приобретает второй член, остальные или равны нулю, или будут иметь малую величину и ими пренебрегают. Отсюда *в зависимости от вида нагружения необходимо использовать в формуле те или другие члены.*

13.2. Теорема Кастилиано. Теорема Лагранжа

Частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы. Под перемещением по направлению силы понимается **проекция на направление силы полного перемещения ее точки приложения** (рис. 13.4):

$$\Delta_F = \Delta_B \sin \alpha,$$

где Δ_F - перемещение по направлению силы F ; Δ_B - полное перемещение точки приложения силы F .

Рассмотрим упругое тело, нагруженное произвольной системой сил и закрепленное таким образом, чтобы исключались его перемещения как жесткого целого (рис. 13.5).

Обозначим через U потенциальную энергию деформации, накопленную в теле в результате работы внешних сил:

$$U = f(F_1, F_2, \dots, F_i, F_n). \quad (13.16)$$

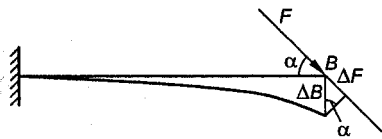


Рис. 13.4

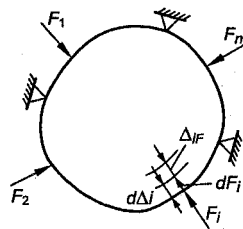


Рис. 13.5

Пусть некоторой силе F_i дано приращение dF_i . Тогда потенциальная энергия тела получит приращение $\frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i$ и будет равна

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i. \quad (13.17)$$

Теперь представим, что сначала была приложена сила dF_i , а затем все остальные силы F_1, F_2, F_n . Под действием силы dF_i по ее направлению возникнет малое перемещение $d\Delta_i$. Потенциальная энергия, приобретенная телом, будет равна работе силы dF_i на перемещении ее точки приложения:

$$\frac{dF_i d\Delta_i}{2}. \quad (13.18)$$

Последующее приложение системы остальных сил приводит к тому, что тело приобретает энергию U и, кроме того, дополнительную энергию, равную работе dF_i на перемещении Δ_{iF} ее точки приложения, вызванном всей системой сил. Потенциальная энергия системы будет равна

$$U + dF_i \Delta_{iF} + \frac{dF_i d\Delta_i}{2}. \quad (13.19)$$

Перед вторым членом коэффициент $1/2$ не ставится, потому что на перемещении Δ_{iF} сила dF_i остается постоянной. Так как величина потенциальной энергии не зависит от порядка приложения сил к телу, то, приравнявая выражения (13.17) и (13.19) и пренебрегая членом $\frac{dF_i d\Delta_i}{2}$ как бесконечно малой величиной второго порядка, получим

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i = U + dF_i \Delta_{iF},$$

откуда

$$\Delta_{iF} = \frac{\partial U}{\partial F_i}. \quad (13.20)$$

Выражение (13.20) представляет собой **теорему Кастелиано**. Таким образом, дифференцируя потенциальную энергию по

любой внешней силе при сохранении остальных постоянными, получаем перемещение точки приложения этой силы по направлению силы. Сила F_i и перемещение Δ_{iF} должны рассматриваться как обобщенные. Другими словами, под F_i следует понимать любой силовой фактор (сосредоточенная сила, момент, распределенная нагрузка, давление), а под Δ_{iF} – такое перемещение, на котором обобщенная сила совершает работу. Если под F_i понимается сосредоточенная сила, то обобщенным перемещением будет проекция полного перемещения точки приложения силы на направление этой силы (см. рис. 13.4); если под F_i понимается момент пары сил, то обобщенным перемещением будет угловое перемещение точки приложения момента по направлению момента; для двух равных противоположно направленных сил обобщенным перемещением будет взаимное перемещение точек приложения сил; для давления обобщенным перемещением является изменение объема. Следовательно, дифференцируя потенциальную энергию системы по силе, моменту, давлению, будем получать проекцию полного перемещения точки приложения силы на направление этой же силы, угловое перемещение точки в плоскости действия момента, изменение объема тела.

Таким образом, можно дать более полную формулировку **теоремы Кастилиано**: *частная производная от потенциальной энергии по обобщенной силе равна обобщенному перемещению, соответствующему этой силе.*

Так как принцип независимости действия сил применим только к линейным системам, то теорема Кастилиано также верна только для **линейных систем**. Пользоваться теоремой для определения перемещений в нелинейных системах нельзя.

Частная производная от потенциальной энергии системы по любому перемещению равна силе, действующей по направлению этого перемещения.

Рассмотрим вывод теоремы на примере растяжения стержня длиной l . Потенциальная энергия деформации стержня при растяжении равна работе нормальной силы N на перемещении Δl :

$$U = \frac{1}{2} N \Delta l; \Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

откуда

$$N = \frac{\Delta l EA}{l}.$$

Потенциальная энергия деформации стержня в функции независимой переменной (перемещении) Δl имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \Delta l^2. \quad (13.21)$$

Частная производная от U по Δl будет равна

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta l} = \frac{\Delta l EA}{l} = N, \quad (13.22)$$

что и требовалось доказать.

Теорема была предложена Лагранжем.

Использование теоремы часто позволяет упростить решение задач.

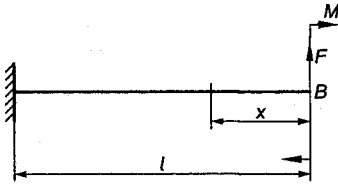


Рис. 13.6

Пример 13.1. Определить прогиб свободного конца консольной балки, нагруженной силой F и моментом M (рис. 13.6).

Решение. Составляем выражение изгибающего момента для произвольного сечения x :

$$M_x = Fx - M.$$

Потенциальная энергия деформации при изгибе равна

$$U = \int_0^l \frac{(Fx - M)^2}{2EI_z} dx,$$

где EI_z - жесткость поперечного сечения балки.

Искомый прогиб равен

$$\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \int_0^l \frac{(Fx - M)^2}{2EI_z} dx = \int_0^l \frac{2(Fx - M)x}{2EI_z} dx = \frac{Fl^3}{3EI_z} - \frac{Ml^2}{2EI_z}.$$

Пример 13.2. Определить прогиб свободного конца балки, нагруженной силой F (рис. 13.7).

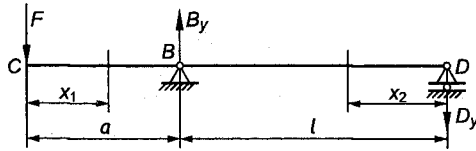


Рис. 13.7

Решение. Определяем реакции B_y и D_y :

$$B_y = F \frac{a+l}{l}; D_y = F \frac{a}{l}.$$

Составляем уравнения изгибающих моментов для обоих участков балки:

$$M_{x_1} = -Fx_1; M_{x_2} = -D_y x_2 = -F \frac{a}{l} x_2.$$

Потенциальная энергия деформации балки равна

$$U = \int_0^a \frac{M_{x_1}^2 dx_1}{2EI_z} + \int_0^l \frac{M_{x_2}^2 dx_2}{2EI_z} = \int_0^a \frac{(-Fx_1)^2}{2EI_z} dx_1 + \int_0^l \frac{\left(-F \frac{a}{l} x_2\right)^2}{2EI_z} dx_2.$$

Прогиб сечения C равен

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \int_0^a \frac{(-Fx_1)^2}{2EI_z} dx_1 + \frac{\partial}{\partial F} \int_0^l \frac{\left(-F \frac{a}{l} x_2\right)^2}{2EI_z} dx_2 = \\ &= \frac{Fa^3}{3EI_z} + F \frac{a^2 l}{3EI_z} = \frac{Fa^2}{3EI_z} (a+l). \end{aligned}$$

Пример 13.3. Определить прогиб сечения C балки, нагруженной силой F (рис. 13.8).

Решение. Определяем опорные реакции:

$$B_y = \frac{Fb}{l}; D_y = \frac{Fa}{l}.$$

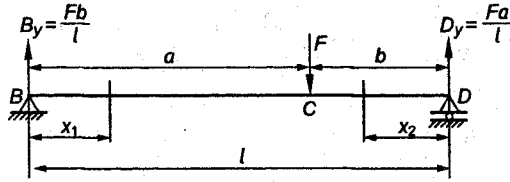


Рис. 13.8

Составим уравнения изгибающих моментов для обоих участков балки:

$$M_{x_1} = -\frac{Fb}{l}x_1; M_{x_2} = \frac{Fa}{l}x_2.$$

Прогиб сечения C будет

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{\partial}{\partial F} \left(\int_0^a \frac{M_{x_1}^2 dx_1}{2EI_z} + \int_0^b \frac{M_{x_2}^2 dx_2}{2EI_z} \right) = \frac{1}{EI_z} \int_0^a M_{x_1} dx_1 \frac{\partial M_{x_1}}{\partial F} + \\ &+ \frac{1}{EI_z} \int_0^b M_{x_2} dx_2 \frac{\partial M_{x_2}}{\partial F} = \frac{1}{EI_z} \int_0^a F \frac{b}{l} x_1 \frac{bx_1}{l} dx_1 + \\ &+ \frac{1}{EI_z} \int_0^b F \frac{a}{l} x_2 \frac{ax_2}{l} dx_2 = \frac{Fb^2 a^3}{3EI_z l^2} + \frac{Fa^2 b^3}{3EI_z l^2} = \frac{Fa^2 b^2}{3l^2 EI_z} (a+b), \end{aligned}$$

где $\frac{dM_{x_1}}{dF} = \frac{b}{l}x_1; \frac{dM_{x_2}}{dF} = \frac{a}{l}x_2.$

Пример 13.4. Симметричная система, состоящая из трех стержней (см. рис. 9.2), нагружена в точке B силой F. Под действием нагрузки точка B опустилась на величину $\Delta p = \Delta l_2 = 0,5$ мм. Длина среднего стержня $l = 1,0$ м, $A = 3$ см², угол $\alpha = 30^\circ$. Определить величину силы F.

Решение. Удлинение стержня 1 и удлинение стержня 3 равны

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_p \cos \alpha.$$

Усилия в стержнях будут

$$N_1 = N_3 = \frac{\Delta l_p \cos^2 \alpha EA}{l}; N_2 = \frac{\Delta l_p EA}{l};$$

$$l_1 = l_3 = \frac{l}{\cos \alpha}.$$

Выразим потенциальную энергию деформации системы в функции Δl_p :

$$U = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{2} N_i \Delta l_i = \frac{1}{2} (N_1 \Delta l_p \cos \alpha + N_2 \Delta l_p + N_3 \Delta l_p \cos \alpha) =$$

$$= \frac{\Delta l_p^2 EA}{2l} (2 \cos^3 \alpha + 1). \quad (a)$$

Дифференцируя (a) по Δl_p , найдем величину силы F :

$$F = \frac{\partial U}{\partial \Delta l_p} = (2 \cos^3 \alpha + 1) \frac{\Delta l_p EA}{l} = (2 \cdot 0,866^3 + 1) \frac{0,05 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 3}{100} =$$

$$= 68\,968 \text{ Н} = 69 \text{ кН}.$$

13.3. Интегралы Максвелла - Мора для определения перемещений

Применение теоремы Кастилиано для определения перемещений имеет определенные неудобства, так как требует удерживать буквенные обозначения сил, по которым берутся частные производные, и позволяет определять перемещения в точках приложения сил по направлению этих сил. На практике часто требуется определять перемещения точек, в которых не приложено никаких сил, в любом направлении.

От отмеченных недостатков свободен метод Максвелла - Мора.

Пусть требуется определить перемещение в некоторой точке B бруса, нагруженного произвольной системой сил, в направлении $i - i$ (рис. 13.9). Приложим в точке B в направлении $i - i$ произвольную нагрузку Φ и рассмотрим три системы.

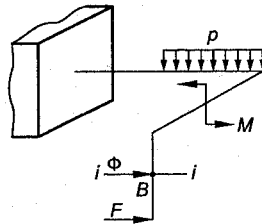


Рис. 13.9

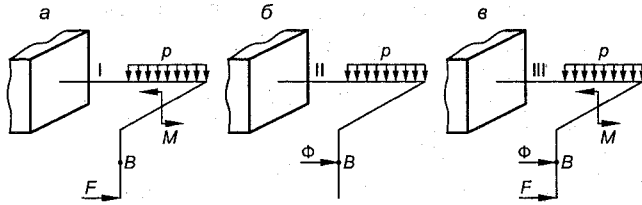


Рис. 13.10

I. Система (F), когда действуют заданные внешние силы (рис. 13.10, а).

II. Система (Φ), когда действует только одна нагрузка Φ , приложенная к точке B (см. рис. 13.10, б).

III. Система ($F + \Phi$), когда действуют заданные внешние силы и сила F (см. рис. 13.10, в).

Запишем выражение потенциальной энергии для каждой системы:

$$U_F = \sum \int_l \frac{T_F^2 dx}{2GI_K} + \sum \int_l \frac{M_{zF}^2 dx}{2EI_z} + \sum \int_l \frac{M_{yF}^2 dx}{2EI_y} + \sum \int_l \frac{N_F^2 dx}{2EA} + \sum \int_l K_y \frac{Q_{yF}^2 dx}{2GA} + \sum \int_l K_z \frac{Q_{zF}^2 dx}{2GA}; \quad (13.23)$$

$$U_\Phi = \sum \int_l \frac{T_\Phi^2 dx}{2GI_K} + \sum \int_l \frac{M_{z\Phi}^2 dx}{2EI_z} + \sum \int_l \frac{M_{y\Phi}^2 dx}{2EI_y} + \sum \int_l \frac{N_\Phi^2 dx}{2EA} + \sum \int_l K_y \frac{Q_{y\Phi}^2 dx}{2GA} + \sum \int_l K_z \frac{Q_{z\Phi}^2 dx}{2GA}, \quad (13.24)$$

где $T_F, M_{zF}, M_{yF}, N_F, Q_{yF}, Q_{zF}$ - внутренние силовые факторы от внешних нагрузок; $T_\Phi, M_{z\Phi}, M_{y\Phi}, N_\Phi, Q_{y\Phi}, Q_{z\Phi}$ - внутренние силовые факторы от приложенной силы Φ .

В третьей системе внутренние силовые факторы получают приращения, пропорциональные силе Φ , и на основе принципа независимости действия сил будут равны

$$T_{F+\Phi} = T_F + T_\Phi; M_{z(F+\Phi)} = M_{zF} + M_{z\Phi}; M_{y(F+\Phi)} = M_{yF} + M_{y\Phi};$$

$$N_{F+\Phi} = N_F + N_\Phi; Q_{y(F+\Phi)} = Q_{yF} + Q_{y\Phi}; Q_{z(F+\Phi)} = Q_{zF} + Q_{z\Phi}.$$

Тогда для потенциальной энергии третьей системы получим выражение

$$\begin{aligned}
 U_{F+\Phi} = & \sum \int_l \frac{(T_F + T_\Phi)^2 dx}{2GI_k} + \sum \int_l \frac{(M_{zF} + M_{z\Phi})^2 dx}{2EI_z} + \\
 & + \sum \int_l \frac{(M_{yF} + M_{y\Phi})^2 dx}{2EI_y} + \sum \int_l \frac{(N_F + N_\Phi)^2 dx}{2EA} + \\
 & + \sum \int_l K_y \frac{(Q_{yF} + Q_{y\Phi})^2 dx}{2GA} + \sum \int_l K_z \frac{(Q_{zF} + Q_{z\Phi})^2 dx}{2GA}. \quad (13.25)
 \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в выражении (13.25) и заменяя соответствующие члены через U_F и U_Φ , можно записать

$$\begin{aligned}
 U_{F+\Phi} = U_F + U_\Phi = & \sum \int_l \frac{T_F T_\Phi dx}{GI_k} + \sum \int_l \frac{M_{zF} M_{z\Phi} dx}{EI_z} + \\
 & + \sum \int_l \frac{M_{yF} M_{y\Phi} dx}{EI_y} + \sum \int_l \frac{N_F N_\Phi dx}{EA} + \\
 & + \sum \int_l K_y \frac{Q_{yF} Q_{y\Phi} dx}{GA} + \sum \int_l K_z \frac{Q_{zF} Q_{z\Phi} dx}{GA}. \quad (13.26)
 \end{aligned}$$

Предположим, что для получения третьей системы вначале была приложена сила Φ , а затем система внешних сил.

Следовательно, если из выражения (13.26) вычесть значения U_F и U_Φ , то оставшиеся интегралы будут представлять работу силы Φ на перемещении Δ_{iF} в направлении $i - i$, вызванном заданной системой внешних сил:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{iF} \Phi = & \sum \int_l \frac{T_F T_\Phi dx}{GI_k} + \sum \int_l \frac{M_{zF} M_{z\Phi} dx}{EI_z} + \\
 & + \sum \int_l \frac{M_{yF} M_{y\Phi} dx}{EI_y} + \sum \int_l \frac{N_F N_\Phi dx}{EA} + \\
 & + \sum \int_l K_y \frac{Q_{yF} Q_{y\Phi} dx}{GA} + \sum \int_l K_z \frac{Q_{zF} Q_{z\Phi} dx}{GA}. \quad (13.27)
 \end{aligned}$$

Разделив правую и левую части выражения (13.27) на Φ , получим

$$\begin{aligned} \Delta_{iF} = & \sum \int_l \frac{T_F}{GI_K} \frac{T_\Phi}{\Phi} dx + \sum \int_l \frac{M_{zF}}{EI_z} \frac{M_{z\Phi}}{\Phi} dx + \\ & + \sum \int_l \frac{M_{yF}}{EI_y} \frac{M_{y\Phi}}{\Phi} dx + \sum \int_l \frac{N_F}{EA} \frac{N_\Phi}{\Phi} dx + \\ & + \sum \int_l K_y \frac{Q_{yF}}{GA} \frac{Q_{y\Phi}}{\Phi} dx + \sum \int_l K_z \frac{Q_{zF}}{GA} \frac{Q_{z\Phi}}{\Phi} dx. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{T_\Phi}{\Phi} = T_1; \quad \frac{M_{z\Phi}}{\Phi} = M_{z1}; \quad \frac{M_{y\Phi}}{\Phi} = M_{y1}; \quad \frac{N_\Phi}{\Phi} = N_1; \\ \frac{Q_{y\Phi}}{\Phi} = Q_{y1}; \quad \frac{Q_{z\Phi}}{\Phi} = Q_{z1}. \end{aligned} \quad (13.29)$$

Величины $T_1, M_{z1}, M_{y1}, N_1, Q_{y1}, Q_{z1}$ представляют собой внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях под действием единичной безразмерной силы, приложенной в интересующей нас точке, в заданном направлении. Согласно (13.29) T_1, M_{z1}, M_{y1} имеют размерность длины; N_1, Q_{y1}, Q_{z1} - безразмерные.

Подставляя (13.29) в (13.28), окончательно получим

$$\begin{aligned} \Delta_{iF} = & \sum \int_l \frac{T_F T_1}{GI_K} dx + \sum \int_l \frac{M_{zF} M_{z1}}{EI_z} dx + \\ & + \sum \int_l \frac{M_{yF} M_{y1}}{EI_y} dx + \sum \int_l \frac{N_F N_1}{EA} dx + \\ & + \sum \int_l K_y \frac{Q_{yF} Q_{y1}}{GA} dx + \sum \int_l K_z \frac{Q_{zF} Q_{z1}}{GA} dx. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Полученные интегралы впервые были предложены Максвеллом, затем получили обобщение в трудах Мора и поэтому называются **интегралами Максвелла – Мора**. Выражения внутренних силовых факторов от заданной нагрузки и от единичной безразмерной силы, стоящие под интегралами, представляют собой *функции координат*. Их нельзя рассматривать как числовые значения силовых факторов в конкретном сечении.

Когда требуется определить угол поворота сечения, то вместо единичной силы прикладывается единичный безразмерный момент.

Если после интегрирования перемещение получается положительным, то это означает, что оно совпадает с направлением единичного силового фактора; если получается отрицательным, то оно направлено противоположно приложенному единичному силовому фактору.

Интегралы Максвелла – Мора применимы не только для прямых брусьев, но и для брусьев малой кривизны $\rho > 10h$ (где ρ – радиус кривизны оси бруса; h – высота поперечного сечения), а также для брусьев переменного поперечного сечения. Для кривых брусьев дифференциал длины dx заменяется на дифференциал дуги dS . Члены, входящие в выражение (13.30), зависят от вида нагружения, поэтому в практических расчетах нужно учитывать только те интегралы, которые будут существенными для данного вида нагружения. Например, если балка работает на изгиб, нужно использовать второй и третий интегралы, в отдельных случаях – еще пятый и шестой; если брус работает на кручение – первый и т.д.

Пример 13.5. Определить прогиб свободного конца консольной балки, изображенной на рис. 13.11.

Решение. Прикладываем в точке B единичную безразмерную силу и записываем выражения изгибающих моментов от внешних сил и единичной нагрузки для сечения x :

$$M_F = Fx - M; M_1 = 1 \cdot x.$$

Найдем прогиб, используя выражение (13.30), при этом пренебрегаем перемещением от поперечной силы как малой величиной:

$$\Delta_B = \int_0^l \frac{M_F M_1 dx}{EI_z} = \int_0^l \frac{(Fx - M)x}{EI_z} dx = \frac{Fl^3}{3EI_z} - \frac{Ml^2}{2EI_z}.$$

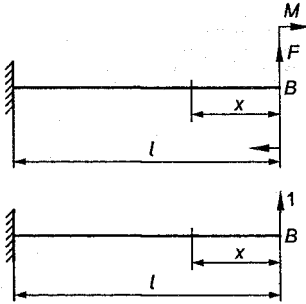


Рис. 13.11

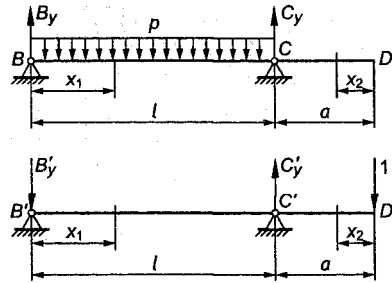


Рис. 13.12

Пример 13.6. Определить прогиб свободного конца консольной балки, изображенной на рис. 13.12.

Решение. Прикладываем в точке D единичную безразмерную силу. Определяем реакции от внешних сил и единичной силы:

$$B_y = C_y = \frac{pl}{2}; B'_y = \frac{a}{l}; C'_y = \frac{a+l}{l}.$$

Записываем уравнения изгибающих моментов от заданной нагрузки и единичной силы:

$$M_{F_{x_1}} = \frac{pl}{2}x_1 - \frac{px_1^2}{2}; M_{F_{x_2}} = 0;$$

$$M_{1_{x_1}} = -\frac{a}{l}x_1; M_{1_{x_2}} = -1 \cdot x_2.$$

Используя выражение (13.28), находим прогиб в точке B :

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{1}{EI_z} \int_0^l \left(\frac{pl}{2}x_1 - \frac{px_1^2}{2} \right) \left(-\frac{a}{l}x_1 \right) dx_1 = \\ &= \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{plax_1^3}{2 \cdot l \cdot 3} + \frac{pax_1^4}{2 \cdot l \cdot 4} \right) \Big|_0^l = -\frac{pal^3}{24EI_z}. \end{aligned}$$

Знак « \rightarrow » показывает, что точка D при изгибе перемещается в сторону, противоположную направлению единичной безразмерной силы, т.е. вверх.

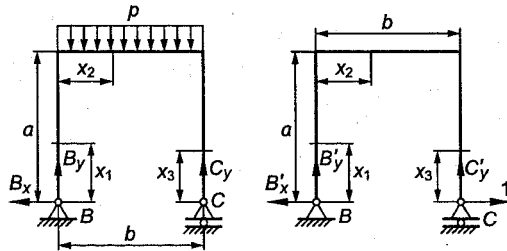


Рис. 13.13

Пример 13.7. Определить для плоской рамы горизонтальное перемещение опоры C; сечение рамы постоянное: $EI_z = \text{const}$ (рис. 13.13).

Решение. Определяем опорные реакции от распределяемой нагрузки и единичной силы:

$$B_y = C_y = p \frac{b}{2}; B_x = 0; B'_x = 1; B'_y = 0; C'_y = 0.$$

Составляем уравнения моментов для каждого участка рамы от нагрузки и единичной силы:

$$M_{Fx_1} = 0; M_{Fx_2} = \frac{pb}{2} x_2 - \frac{px_2^2}{2}; M_{Fx_3} = 0; M_{1x_1} = 1 \cdot x_1;$$

$$M_{1x_2} = 1 \cdot a; M_{1x_3} = 1 \cdot x_3.$$

Используя интеграл Максвелла - Мора, находим

$$\Delta_C^r = \int_0^b \frac{pbx_2 - px_2^2}{2EI_z} adx_2 = \frac{pa}{2EI_z} \left(\frac{bx_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} \right) \Big|_0^b = \frac{pb^3a}{12EI_z}.$$

Пример 13.8. Определить вертикальное перемещение точки B кривого бруса радиусом R, нагруженного силой F (рис. 13.14). Жесткость сечения постоянна.

Решение. Прикладываем в точке B единичную безразмерную силу и составляем уравнения изгибающих моментов:

$$M_F = FR \sin \varphi; M_1 = R \sin \varphi; dS = Rd\varphi.$$

Перемещение найдем, используя интеграл Максвелла - Мора, в котором dx заменяем на dS :

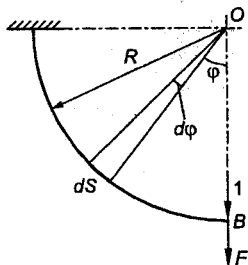


Рис. 13.14

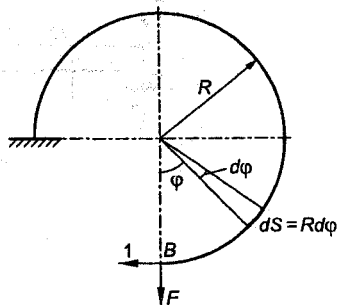


Рис. 13.15

$$\Delta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{FR \sin \varphi R \sin \varphi}{EI_z} R d\varphi = \frac{FR^3}{EI_z} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi FR^3}{4EI_z}.$$

Пример 13.9. Определить горизонтальное перемещение точки B кривого бруса радиусом R , нагруженного силой F , жесткость сечения постоянна (рис. 13.15).

Решение. Прикладываем в точке B единичную безразмерную силу и составляем уравнения изгибающих моментов от внешней и единичной сил:

$$M_F = FR \sin \varphi;$$

$$M_1 = -R(1 - \cos \varphi).$$

Искомое перемещение равно

$$\begin{aligned} \Delta_B^r &= \int_0^{3\pi/2} -\frac{FR \sin \varphi R(1 - \cos \varphi)}{EI_z} R d\varphi = \\ &= -\frac{FR^3}{EI_z} \left(-\cos \varphi + \frac{\cos 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{3\pi/2} = -\frac{FR^3}{2EI_z}. \end{aligned}$$

Знак « $-$ » показывает, что перемещение происходит в направлении, обратном единичной силе.

Пример 13.10. Определить прогиб в середине балки переменного сечения прямоугольной формы (рессоры), нагруженной силой F (рис. 13.16). Толщина балки постоянна и равна h .

Решение. Прикладываем в середине пролета, в точке D , единичную безразмерную силу, определяем опорные реакции от

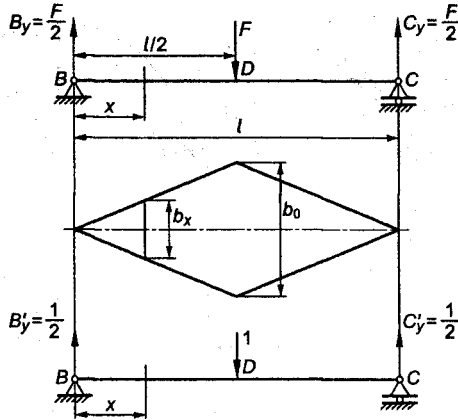


Рис. 13.16

силы F и единичной силы и составляем уравнения изгибающих моментов от силы F и единичной силы в сечении x :

$$M_F = \frac{F}{2}x; M_1 = \frac{1}{2}x.$$

Так как в данном случае жесткость балки изменяется, то необходимо ее представить в функции координаты x .

Из подобия треугольников находим

$$\frac{b_x}{x} = \frac{b_0}{l/2},$$

откуда

$$b_x = \frac{2b_0}{l}x.$$

Осевой момент инерции сечения x относительно горизонтальной оси равен

$$I_{z(x)} = \frac{b(x)h^3}{12} = \frac{2b_0h^3}{12l}x = I_{z0} \frac{2x}{l},$$

где I_{z0} - осевой момент инерции сечения в середине пролета.

Подставляя $I_{z(x)}$ и значения изгибающих моментов от внешней силы и единичной силы в интеграл Максвелла - Мора (13.30), найдем прогиб Δ_D :

$$\Delta_D = 2 \int_0^{l/2} \frac{M_F M_1}{EI_{z(x)}} dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{\frac{F}{2} x \frac{1}{2} xl}{EI_{z0} 2x} dx = \frac{Fl}{4EI_{z0}} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{l/2} = \frac{Fl^3}{32EI_{z0}}.$$

Вычислим величину прогиба в середине пролета в примере 11.4 (см. рис. 11.23).

Прогиб найдем, подставив все величины в полученную формулу для прогиба:

$$\Delta_F = \frac{Fl^3}{32EI_{z0}} = \frac{20000 \cdot 100^3 \cdot 12}{32 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 75 \cdot 1^3} = 5 \text{ см.}$$

13.4. Способ Верещагина

Вычисление интегралов Максвелла – Мора представляет определенные затруднения. В связи с этим были предложены специальные приемы вычисления интегралов, из которых широкое распространение получил способ Верещагина²⁰, часто называемый **способом перемножения эпюр**. Когда жесткости стержней на прямолинейных участках постоянны, их можно вынести за знак интеграла, тогда под интегралом останется произведение двух функций. Например, функция изгибающего момента от внешних сил и функция изгибающего момента от единичной безразмерной силы или функция крутящего момента от внешних скручивающих моментов и функция крутящего момента от единичного безразмерного момента. Функция внутренних силовых факторов от внешней нагрузки может иметь любой сложный характер, в то время как вторая функция на прямолинейном участке всегда является линейной. Таким образом, задача состоит в том, чтобы взять интеграл от произведения двух функций, из которых одна обязательно линейная.

Пусть эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки, часто называемая **грузовой эпюрой**, на некотором участке является нелинейной, а эпюра изгибающих моментов от единичной силы представляет собой наклонную прямую (рис. 13.17). Выделим на расстоянии x от левого конца C участка элемент площади эпюры длиной dx .

Площадь элемента, равная

$$d\omega = M_F dx, \quad (13.31)$$

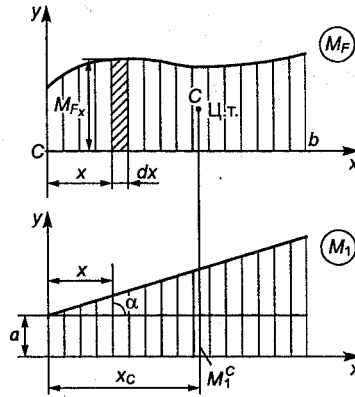


Рис. 13.17

является дифференциалом площади эпюры от внешней нагрузки. Ордината эпюры от единичной силы в этом сечении равна

$$M_{1_x} = a + xt\text{g}\alpha. \quad (13.32)$$

Подставляя $d\omega$ и M_{1_x} в интеграл Максвелла - Мора, получим

$$\Delta_{iF} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\Omega} (a + xt\text{g}\alpha) d\omega = \frac{1}{EI_z} \left(a\Omega + t\text{g}\alpha \int_0^{\Omega} x d\omega \right), \quad (13.33)$$

где Ω - площадь грузовой эпюры.

Интеграл в правой части равенства (13.33) есть *статический момент площади эпюры M_F относительно оси y* . Статический момент можно записать как произведение площади грузовой эпюры на координату ее центра тяжести x_C :

$$\int_0^{\Omega} x d\omega = \Omega x_C. \quad (13.34)$$

Подставляя (13.34) в (13.33), найдем

$$\Delta_{iF} = \frac{1}{EI_z} \int_0^{\Omega} (a\Omega + t\text{g}\alpha \Omega x_C) = \frac{\Omega}{EI_z} (a + t\text{g}\alpha x_C). \quad (13.35)$$

Но $a + t\text{g}\alpha x_C$ представляет собой ординату эпюры от единичной силы под центром тяжести грузовой эпюры (см. рис. 13.17):

$$M_1^C = a + \operatorname{tg}\alpha x_C. \quad (13.36)$$

Отсюда формула для определения перемещений по способу Верещагина будет иметь следующий вид:

$$\Delta_{iF} = \frac{\Omega M_1^C}{EI_z}. \quad (13.37)$$

Перемещение равно произведению площади эпюры моментов от заданной внешней нагрузки на величину ординаты эпюры от единичной силы, расположенной под центром тяжести грузовой эпюры, деленной на жесткость сечения балки.

Если требуется определить угол поворота, то вместо единичной силы прикладывают единичный безразмерный момент.

Когда система состоит из нескольких простых элементов, формула (13.37) принимает вид

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{\Omega_i (M_i^C)_i}{(EI_z)_i}. \quad (13.38)$$

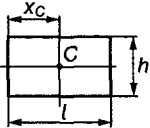
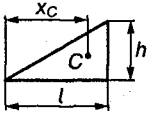
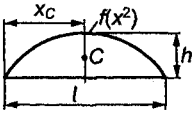
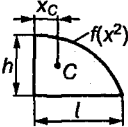
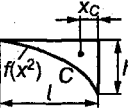
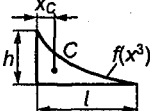
Необходимо отметить, что перемножение эпюр при вычислении перемещений по формуле (13.37) можно производить только в пределах линейных участков эпюры от единичной нагрузки. Способ Верещагина применим к любому из шести интегралов формулы (13.30). Определение перемещений при других нагружениях (кручении, сдвиге, растяжении (сжатии)) требует подстановки в формулу (13.37) соответствующих жесткостей сечений, площадей эпюр и ординат от единичной нагрузки. Если эпюры M_F и M_1 располагаются по одну сторону от оси, то произведение ΩM_1^C положительно и перемещение совпадает с направлением приложенной единичной силы (момента).

Если эпюры M_F и M_1 располагаются по разные стороны от оси, то произведение ΩM_1^C отрицательно и перемещение направлено противоположно приложенной единичной силе (моменту). В случае, когда обе эпюры линейные, операция перемножения обладает свойством коммутативности, т.е. можно умножить площадь первой на ординату второй или наоборот, результат будет один и тот же. Сложные эпюры следует разбивать, в пределах линейных участков эпюры от единичной на-

грузки, на простейшие геометрические фигуры: *прямоугольник, треугольник, параболический треугольник*, для которых величины площади и положение центра тяжести известны. В табл. 13.1 приведены площади и положения центров тяжести простейших фигур.

Таблица 13.1

Площадь эпюр и положение центра тяжести

Геометрическая фигура	Площадь	Положение центра тяжести
	$\Omega = lh$	$x_C = \frac{l}{2}$
	$\Omega = \frac{1}{2}lh$	$x_C = \frac{2}{3}l$
	$\Omega = \frac{2}{3}hl = \frac{pl^3}{12}$	$x_C = \frac{l}{2}$
	$\Omega = \frac{2}{3}hl$	$x_C = \frac{3}{8}l$
	$\Omega = \frac{1}{3}hl$	$x_C = \frac{1}{4}l$
	$\Omega = \frac{1}{4}lh$	$x_C = \frac{1}{5}l$

При вычислении произведения ΩM_1^C в формуле (13.37) каждую из площадей фигур умножают на ординату эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести соответствующей

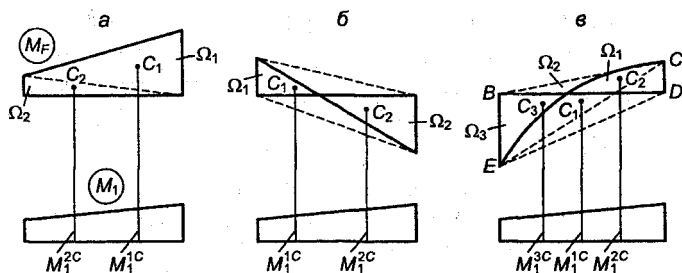


Рис. 13.18

фигуры. Если грузовая эпюра представляет собой трапецию, то ее целесообразно разбить на прямоугольник и треугольник или на два треугольника (рис. 13.18, а). В этом случае

$$\Omega M_1^C = \Omega_1 M_1^{1C} + \Omega_2 M_1^{2C}.$$

Если грузовая эпюра состоит из двух треугольников разных знаков (см. рис. 13.18, б), то, добавляя два равновеликих треугольника противоположных знаков, заменяют заданную эпюру двумя треугольниками, расположенными по разные стороны от оси. В этом случае

$$\Omega M_1^C = \Omega_1 M_1^{1C} - \Omega_2 M_1^{2C}.$$

Грузовая параболическая эпюра (рис. 13.18, в) заменяется параболической эпюрой и двумя треугольниками BCE и BDE . В данном случае получим следующее:

$$\Omega M_1^C = \Omega_1 M_1^{1C} + \Omega_2 M_1^{2C} - \Omega_3 M_1^{3C}.$$

Иногда бывает целесообразно полную грузовую эпюру расщепить, т.е. построить отдельно эпюры от каждой нагрузки, что может значительно облегчить вычисления при перемножении эпюр.

Пример 13.11. Определить прогиб свободного конца балки, изображенной на рис. 13.19. Сечение балки двутавр № 22.

Решение. 1. Определяем опорные реакции B_y и C_y , для чего составляем уравнения моментов относительно опор B и C , из которых находим

$$B_y = 9,58 \text{ кН}; C_y = 30,42 \text{ кН}.$$

2. Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 13.19, а):

$$0 \leq x_1 \leq 1,5 \text{ м};$$

$$M_{x_1} = B_y \cdot x_1 = 9,58x_1; \quad M_{x_1=0} = 0;$$

$$M_{x_1=1,5} = 9,58 \cdot 1,5 = 14,37 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$1,5 \leq x_2 \leq 3 \text{ м};$$

$$M_{x_2} = 9,58x_2 - 15(x_2 - 1,5) - \frac{10(x_2 - 1,5)^2}{2};$$

$$M_{x_2=3,0} = 9,58 \cdot 3,0 - 15 \cdot 1,5 - \frac{10 \cdot 1,5^2}{2} = -5,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м};$$

$$M_{x_3} = -\frac{px_3^2}{2}; \quad M_{x_3=0} = 0; \quad M_{x_3=1} = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Строим эпюру от единичной силы, приложенной к балке в сечении D (рис. 13.19, б).

Прогиб в сечении D определяем перемножением эпюр M_F и M_1 по способу Верещагина.

Для упрощения вычислений разбиваем грузовую эпюру на втором участке на три части: на параболический сегмент и два треугольника; на третьем — на две части: параболический сегмент и треугольник (см. рис. 13.19, а), получим

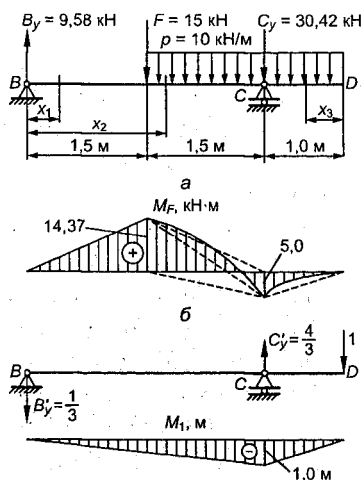


Рис. 13.19

$$\Delta_D = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{1}{2} \cdot 14,37 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 - \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 1,5^3 \cdot \frac{1}{12} \cdot (1,5 + 0,75) \cdot \frac{1}{3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 14,37 \cdot 1,5 \left(1,5 + \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,5 \left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 1,5 \right) \cdot \frac{1}{3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{10 \cdot 1^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{22,88}{EI_z} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Из таблицы сортамента прокатной стали для двутавра № 22 имеем $I_z = 2550 \text{ см}^4$. Тогда

$$\Delta_D = \frac{22,88 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^7 \cdot 2550} = -0,45 \text{ см.}$$

Знак «-» показывает, что сечение D будет перемещаться вверх, против направления единичной силы.

Пример 13.12. Определить горизонтальное перемещение опоры C рамы под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $p = 10 \text{ кН/м}$. Жесткость участков постоянная, сечение прямоугольное $b \times h = 6 \cdot 10 \text{ см}$. Материал – сталь (рис. 13.20).

Решение. Определяем опорные реакции и строим эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки. Опорные реакции показаны на рис. 13.20, a :

$$B_x = 10 \text{ кН}; C_y = 3,57 \text{ кН}; B_y = 3,57 \text{ кН.}$$

Эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки приведена на рис. 13.20, b . К раме, освобожденной от внешней нагрузки, прикладываем в точке C горизонтально направленную единичную силу, определяем от единичной силы опорные реакции и строим эпюру от единичной силы. Значения опорных реакций, определенных из уравнений статики, даны на рис. 13.20, $в$.

Эпюра изгибающих моментов от единичной силы показана на рис. 13.20, $г$.

Перемножая эпюры M_F и M_1 по способу Верещагина, получим

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{1}{EI_z} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1,6 \right) + \frac{10 \cdot 1^3}{12} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \\ &= \frac{5,78}{EI_z} \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \Delta_C = \frac{5,78 \cdot 10^9 \cdot 12}{2 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^3} = 0,69 \text{ см.} \end{aligned}$$

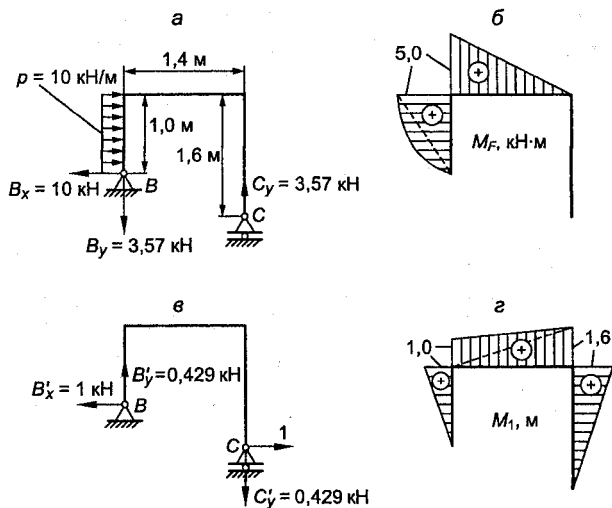


Рис. 13.20

На втором участке параболическая эпюра разбита на параболический сегмент и треугольник. Перемещение сечения C совпадает по направлению с единичной силой.

Пример 13.13. Определить прогиб свободного конца балки (рис. 13.21), используя теорему Кастилиано, метод начальных параметров, интеграл Максвелла - Мора и способ Верещагина. Сечение балки - прямоугольник: $h = 8,4$ см, $b = 5,6$ см. Материал - сталь.

Решение. 1. Величины опорных реакций, найденных из уравнений моментов, составленных относительно опор B и C , указаны на рис. 13.21, a .

2. Строим эпюру изгибающих моментов от внешней нагрузки:

$$0 \leq x_1 \leq 1,5 \text{ м};$$

$$Q_{x_1} = B_y = 7 \text{ кН}; M_{x_1} = B_y x_1 = 7x_1;$$

$$M_{x_1=0} = 0; M_{x_1=1,5} = 7 \cdot 1,5 = 10,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$1,5 \leq x_2 \leq 2,5 \text{ м}.$$

$$Q_{x_2} = B_y - p(x_2 - 1,5); Q_{x_2=1,5} = 7 \text{ кН};$$

$$Q_{x_2=2,5} = 7 - 10 \cdot (2,5 - 1,5) = -3 \text{ кН};$$

$$M_{x_2} = B_y x_2 - M - p \frac{(x_2 - 1,5)^2}{2}; M_{x_2=1,5} = 7 \cdot 1,5 - 20 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_2=2,5} = 7 \cdot 2,5 - 10 \frac{(2,5 - 1,5)^2}{2} = -7,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_2=2,2} = 7 \cdot 2,2 - 20 - 10 \frac{(2,2 - 1,5)^2}{2} = -7,05 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$0 \leq x_3 \leq 1,5 \text{ м};$$

$$Q_{x_3} = F = 5 \text{ кН}; M_{x_3} = -F x_3 = -5 x_3;$$

$$M_{x_3=0} = 0; M_{x_3=1,5} = -5 \cdot 1,5 = -7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

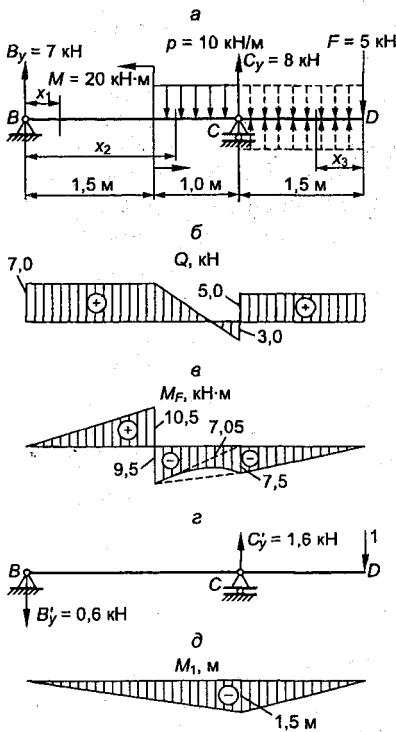


Рис. 13.21

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от внешней нагрузки изображены на рис. 13.21, б, в.

3. Освобождаем балку от внешней нагрузки, прикладываем в точке *D* единичную безразмерную силу, находим реакции и строим эпюру изгибающих моментов от единичной силы. Значения опорных реакций и эпюра от единичной силы показаны на рис. 13.21, г, д.

1. Определим прогиб сечения *D*, используя универсальное уравнение упругой линии (12.16). В нашем случае $y_0 = 0$; $\theta_0 \neq 0$. Для нахождения θ_0 запишем уравнение (12.16) для опоры *C*, где прогиб равен нулю: при $x = 2,5 \text{ м}$ $y_C = 0$:

$$EI_z y_C = EI_z \theta_0 \cdot 2,5 + \frac{7 \cdot 2,5^3}{6} - \frac{10 \cdot 1^4}{24} = 0,$$

откуда

$$EI_z \theta_0 = -3,112 \text{ кН/м}^2.$$

Продолжим распределенную нагрузку до сечения D , компенсировав ее на участке CD . Прогиб в сечении D найдем из уравнения

$$EI_z y_D = -3,112 \cdot 4 + \frac{7 \cdot 4^3}{6} - \frac{20 \cdot 2,5^2}{2} - \frac{10 \cdot 2,5^4}{24} + \\ + \frac{10 \cdot 1,5^4}{24} + \frac{8 \cdot 1,5^3}{6} = -9,908 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

откуда

$$y_D = -\frac{9,908 \cdot 10^9 \cdot 12}{2 \cdot 10^7 \cdot 5,6 \cdot 8,4^3} = -1,8 \text{ см}.$$

Знак «-» указывает на то, что сечение переместилось от оси x вниз.

II. Определим прогиб сечения D , используя теорему Кастилиано (13.20):

$$y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \int \frac{M_x^2 dx}{2EI_z} = \frac{1}{EI_z} \int M_x dx \frac{\partial M_x}{\partial F}.$$

В сечении D приложена сила F . Следовательно, для определения прогиба по формуле Кастилиано необходимо брать частную производную по F , для чего на участках изгибающие моменты должны быть выражены в функции F , т.е. реакции следует выразить через силу F :

$$\sum m_C = 2,5B_y - M - p \cdot 1 \cdot 0,5 + 1,5F = 0;$$

$$B_y = \frac{20 + 10 \cdot 1 \cdot 0,5 - 1,5F}{2,5} = 10 - 0,6F;$$

$$\sum m_B = M - p \cdot 1 \cdot 2 + 2,5C_y - 4F = 0;$$

$$C_y = \frac{10 \cdot 1 \cdot 2 - 20 + 4F}{2,5} = 1,6F.$$

Записываем выражения изгибающих моментов для каждого участка:

$$0 \leq x_1 \leq 1,5 \text{ м};$$

$$M_{x_1} = (10 - 0,6F)x_1 = 10x_1 - 0,6x_1F.$$

$$1,5 \leq x_2 \leq 2,5 \text{ м};$$

$$M_{x_2} = (10 - 0,6F)x_2 - M - p \frac{(x_2 - 1,5)^2}{2} = \\ = 10x_2 - 0,6x_2F - 20 - 5(x_2 - 1,5)^2.$$

$$0 \leq x_3 \leq 1,5 \text{ м};$$

$$M_{x_3} = -Fx_3.$$

Уравнение для прогиба в сечении D запишется в виде

$$y_D = \int_0^{1,5} \frac{M_{x_1} dx_1}{EI_z} \frac{\partial M_{x_1}}{\partial F} + \int_{1,5}^{2,5} \frac{M_{x_2} dx_2}{EI_z} \frac{\partial M_{x_2}}{\partial F} + \int_0^{1,5} \frac{M_{x_3} dx_3}{EI_z} \frac{\partial M_{x_3}}{\partial F}.$$

Частные производные равны

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial F} = -0,6x_1; \quad \frac{\partial M_{x_2}}{\partial F} = -0,6x_2; \quad \frac{\partial M_{x_3}}{\partial F} = -x_3.$$

Подставляя значения производных в уравнение, получим

$$y_D = \frac{1}{EI_z} \left\{ \int_0^{1,5} (10x_1 - 0,6x_1F)(-0,6x_1) dx_1 + \right. \\ \left. + \int_{1,5}^{2,5} [10x_2 - 0,6x_2F - 20 - 5(x_2 - 1,5)^2](-0,6x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + \int_0^{1,5} (-x_3F)(-x_3) dx_3 \right\} = \frac{1}{EI_z} (-4,72 + 9,08 + 5,06) = \frac{9,98}{EI_z} \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

откуда

$$y_D = \frac{9,98 \cdot 10^9 \cdot 12}{2 \cdot 10^7 \cdot 5,6 \cdot 8,4^3} = 1,8 \text{ см}.$$

Перемещение совпадает с направлением силы F .

III. Определим прогиб сечения D с помощью интеграла Максвелла - Мора.

Запишем уравнения изгибающих моментов от внешних сил и от единичной силы для каждого участка:

$$0 \leq x_1 \leq 1,5 \text{ м}; M_{x_1} = 7x_1; M_{1x_1} = -0,6x_1.$$

$$1,5 \leq x_2 \leq 2,5 \text{ м}; M_{x_2} = 22x_2 - 5x_2^2 - 31,25; M_{1x_2} = -0,6x_2.$$

$$0 \leq x_3 \leq 1,5 \text{ м}; M_{x_3} = -5x_3; M_{1x_3} = -1x_3.$$

Подставляя найденные выражения в интеграл Максвелла - Мора, получим

$$y_D = \frac{1}{EI_z} \left\{ \int_0^{1,5} 7x_1(-0,6x_1)dx_1 + \int_{1,5}^{2,5} (22x_2 - 5x_2^2 - 31,25)(-0,6x_2)dx_2 + \int_0^{1,5} -5x_3(-1x_3)dx_3 \right\} = \frac{10}{EI_z} \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

откуда

$$y_D = \frac{10 \cdot 10^9 \cdot 12}{2 \cdot 10^7 \cdot 5,6 \cdot 8,4^3} = 1,81 \text{ см.}$$

Перемещение совпадает с направлением единичной силы.

IV. Определим перемещение путем перемножения эпюр по способу Верещагина:

$$y_D = \sum \frac{\Omega_i M_1^{iC}}{EI_z} = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 10,5 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot 0,6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 9,5 \cdot 1 \cdot \left(1,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \cdot 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 1 \cdot \left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \cdot 0,6 - \frac{10 \cdot 1^3}{12} \cdot 2 \cdot 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot 1 \right] = \frac{10}{EI_z} \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

откуда

$$y_D = \frac{10 \cdot 10^9 \cdot 12}{2 \cdot 10^7 \cdot 5,6 \cdot 8,4^3} = 1,81 \text{ см.}$$

Таким образом, всеми методами получили практически одинаковый результат.

13.5. Вариационные методы расчета конструкций

Вариационные методы расчета основаны на двух общих принципах механики: **начале возможных перемещений** и **законе сохранения энергии**.

Начало возможных перемещений впервые было сформулировано Стевиным (1548 - 1620) в применении к блокам, в применении к наклонной плоскости Галилеем (1561 - 1642). Очень наглядное доказательство начала возможных перемещений было дано Лагранжем в 1788 г. в его книге «Аналитическая механика». Строгое доказательство позже было дано Фурье (1768 - 1830). Обобщение начала возможных перемещений на случай нестационарных связей дано в 1831 г. Остроградским.

При приложении нагрузки упругое тело деформируется. Равновесие деформированного тела можно проверить, проанализировав его поведение при малых возможных отклонениях (вариациях), аналогично проверке устойчивости равновесия шарика, расположенного на вогнутой поверхности. Если шарик, будучи выведенным из состояния равновесия, возвращается в исходное положение, то равновесие шарика считается устойчивым.

Применительно к деформируемым упругим системам начало возможных перемещений формируется так: для равновесия *упругой системы*, находящейся под действием приложенных сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равнялась нулю или, что то же, чтобы сумма работ внешних сил на возможных перемещениях равнялась приращению потенциальной энергии деформации.

Под *возможными перемещениями* δ_i будем понимать бесконечно малые, воображаемые перемещения точек упругой системы, допускаемые наложенными связями в фиксированный момент времени. Под знаком дифференциала d в механике понимают перемещение, действительно совершившееся за опре-

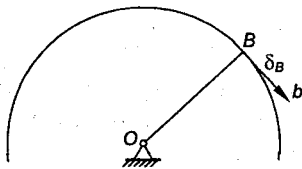


Рис. 13.22

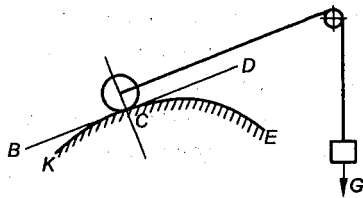


Рис. 13.23

деленное время, например приращение координат точки после деформации.

Возможные перемещения не следует путать с действительными перемещениями точек системы, которые происходят во времени согласно положениям механики деформированного тела под действием приложенных к точкам системы сил.

В качестве пояснения рассмотрим следующий пример.

Пусть стержень OB вращается вокруг оси O (рис. 13.22).

Точка B будет описывать круг в плоскости, перпендикулярной к оси. Согласно началу возможных перемещений для исследования равновесия будет иметь значение не конечная величина круга, а бесконечно малая часть, описываемая точкой B в момент нарушения равновесия. Это бесконечно малое возможное перемещение точки B с точностью до величин второго порядка будет представлять собой бесконечно малый прямолинейный отрезок $Bb = \delta_b$, перпендикулярный к радиусу OB .

Таким образом, под возможным перемещением необходимо понимать не конечное, а бесконечно малое перемещение в виде бесконечно малого прямолинейного отрезка, согласного со связями системы.

Правильное понимание возможного перемещения впервые ясно показал Декарт на следующем примере (рис. 13.23).

Груз весом G тросом тянет тяжелый каток, который перемещается по кривой KCE . Составляя уравнение равновесия, возможное перемещение нужно принимать по касательной BCD , а не по кривой KCE . В литературе возможные перемещения часто называют **виртуальными перемещениями** или **вариациями перемещений**.

Работу внешних и внутренних сил на возможных перемещениях будем называть **возможной** или **виртуальной работой**. При совершении упругой системой возможного перемещения величина и направление внешних и внутренних сил считаются не-

изменными. Поэтому при вычислении возможных работ внешних и внутренних сил принимается вся величина произведения силы на перемещение. Начала возможных перемещений и вытекающие из него методы решения задач предполагают, что все рассматриваемые в системе связи являются идеальными, не имеющими трения и не оказывающими других сопротивлений при перемещении системы, т.е. связи не создают никакого сопротивления возможным перемещениям.

Таким образом, под *идеальными* будем понимать связи, если сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении точек их приложения равна нулю.

В случае необходимости учета сил сопротивления связей (силы трения, силы упругости и т.д.) их считают внешними и рассматривают совместно с другими внешними силами.

Запишем математически начала возможных перемещений для деформируемых упругих систем:

$$\delta W_b + (-\delta U) = 0, \text{ или } \delta W_b = \delta U, \quad (13.39)$$

где δW_b и δU - возможная работа внешних сил и возможная работа внутренних силовых факторов, соответственно.

Из уравнения (13.39) следует, что если упругому телу, находящемуся в равновесии при действии некоторой системы сил, сообщается возможная деформация, то возможная работа, совершаемая внешними силами, равна возможной работе, совершаемой внутренними силами.

Вариация работы W_b внешних сил происходит в результате возможных перемещений δ_r , удовлетворяющих наложенным на систему внешним связям (условиям закрепления, непрерывности упругой линии и т.п.).

Вариация работы внутренних сил определяется перемещениями, соответствующими возможной деформации элемента.

Пусть упругая система находится под действием F_i сил и подчинена r связям, определяемым соотношениями вида

$$\Phi_r(x, y, z, \dots, x_n, x_y, z_n) = 0, \quad (13.40)$$

где $r = 1, 2, \dots, m$.

Обозначим составляющие приложенных сил через X_i, Y_i, Z_i , а составляющие реакций связей - через X_{ip}, Y_{ip}, Z_{ip} (где $i = 1, 2, \dots, n$).

Дадим координатам точек приложения внешних сил возможные перемещения (вариации) δx_i , δy_i , δz_i , удовлетворяющие m уравнениям связи (13.40):

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi_r}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad (13.41)$$

где $r = 1, 2, \dots, m$.

Возможная работа внешних сил и реакций связей будет равна

$$\begin{aligned} \delta W_b = & \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left(\delta x_i \sum_{i=1}^m X_{ip} + \delta y_i \sum_{i=1}^m Y_{ip} + \delta z_i \sum_{i=1}^m Z_{ip} \right). \end{aligned} \quad (13.42)$$

Так как реакции идеальны и перемещения происходят согласно наложенным связям, то работа каждой реакции и общая работа всех реакций равна нулю.

Принимая в уравнении (13.42) второе слагаемое равным нулю, получим выражение для возможной работы внешних сил:

$$\delta W_b = \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, \quad (13.43)$$

где F_i - любая внешняя нагрузка (сосредоточенная сила, распределенная нагрузка, момент и т.п.); δ_i - возможное перемещение, на котором внешняя сила совершает работу.

Вариация потенциальной энергии, соответствующая возможным деформациям, удовлетворяющим условию непрерывности деформаций, может быть представлена в следующем виде (рис. 13.24):

$$\begin{aligned} \delta U = & \sum_l \int T \delta \varphi + \sum_l \int N_x \delta \varepsilon_x dx + \sum_l \int M_y \delta \theta_y + \sum_l \int M_z \delta \theta_z + \\ & + \sum_l \int Q_y \delta \gamma_{xy} dx + \sum_l \int Q_z \delta \gamma_{xz} dx. \end{aligned} \quad (13.44)$$

В выражении (13.44) вначале суммируется элементарная возможная работа внутренних силовых факторов в пределах стержня, затем по всем стержням системы.

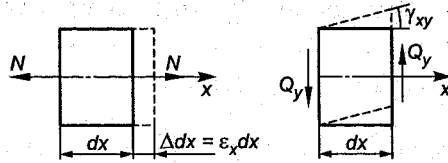


Рис. 13.24

Подставляя (13.44) и (13.43) в (13.39), получим выражение начала возможных перемещений для упругой системы в общем случае нагружения:

$$\begin{aligned} \sum F_i \delta_i = & \sum \int_l T \delta \varphi + \sum \int_l N_x \delta \varepsilon_x dx + \sum \int_l M_y \delta \theta_y + \sum \int_l M_z \delta \theta_z + \\ & + \sum \int_l Q_y \delta \gamma_{xy} dx + \sum \int_l Q_z \delta \gamma_{xz} dx. \end{aligned} \quad (13.45)$$

Выведем интегралы Максвелла - Мора, используя начала возможных перемещений (13.45). Пусть в стержневой системе, нагруженной произвольной системой сил, требуется определить перемещение Δ_{iF} в точке B в направлении $i - i$ (рис. 13.10, а). Внутренние силовые факторы от заданной нагрузки в произвольном сечении системы обозначим через $T_F, M_{zF}, M_{yF}, N_F, Q_{yF}, Q_{zF}$. Вначале рассмотрим заданную систему как вспомогательную, нагруженную только единичной силой $F = 1$, приложенной в точке B в направлении $i - i$ (см. рис. 13.10, б). Под действием единичной силы в поперечных сечениях возникнут внутренние силовые факторы $T_1, M_{z1}, M_{y1}, N_1, Q_{y1}, Q_{z1}$.

Теперь представим, что вспомогательной системе сообщили возможные перемещения, равные действительным перемещениям в заданной системе под действием приложенных нагрузок. Возможная работа внешних сил будет равна произведению единичной силы, являющейся в данном случае единственной внешней нагрузкой, на искомое перемещение Δ_i :

$$\sum F_i \delta_i = 1 \cdot \Delta_i. \quad (13.46)$$

Возможная работа внутренних сил, совершаемая внутренними силовыми факторами ($N_1, M_{z1}, M_{y1}, Q_{y1}, Q_{z1}$), на действительных деформациях элементов равна

$$\delta U = \sum_l \int T_1 \delta \varphi + \sum N_{x1} \delta \epsilon_x dx + \sum_l \int M_{z1} \delta \theta_z + \sum_l \int M_{y1} \delta \theta_y + \\ + \sum_l \int Q_{y1} \delta \gamma_{xy} dx + \sum_l \int Q_{z1} \delta \gamma_{xz} dx. \quad (13.46a)$$

Выразим в (13.45) действительные перемещения через внутренние силовые факторы от заданной нагрузки, считая материал подчиняющимся закону Гука:

$$d\varphi = \frac{T_F}{GI_K} dx; \delta \epsilon_x = \frac{N_F}{EA}; \delta \theta_y = \frac{M_{yF}}{EI_y} dx; \delta \theta_z = \frac{M_{zF}}{EI_z} dx; \\ \delta \gamma_{xy} = K_y \frac{Q_{yF}}{GA}; \gamma_{xz} = K_z \frac{Q_{zF}}{GA}, \quad (13.466)$$

где GJ_K - жесткость поперечного сечения стержня на кручение.

Подставляя (13.46) и (13.46a) в (13.45), получим

$$1 \cdot \Delta_{iF} = \sum_l \int \frac{T_F T_1}{GI_K} dx + \sum_l \int \frac{N_F N_1}{EA} dx + \sum_l \int \frac{M_{zF} M_{z1}}{EI_z} dx + \\ + \sum_l \int \frac{M_{yF} M_{y1}}{EI_y} dx + \sum_l \int K_y \frac{Q_{yF} Q_{y1}}{GA} dx + \sum_l \int K_z \frac{Q_{zF} Q_{z1}}{GA} dx.$$

Откуда найдем

$$\Delta_i = \sum_l \int \frac{T_F T_1}{GI_K} dx + \sum_l \int \frac{N_F N_1}{EA} dx + \sum_l \int \frac{M_{zF} M_{z1}}{EI_z} dx + \\ + \sum_l \int \frac{M_{yF} M_{y1}}{EI_y} dx + \sum_l \int K_y \frac{Q_{yF} Q_{y1}}{GA} dx + \sum_l \int K_z \frac{Q_{zF} Q_{z1}}{GA} dx, \quad (13.47)$$

где внутренние силовые факторы T_1 , M_{y1} , M_{z1} имеют размерность длины; N_1 , Q_{y1} , Q_{z1} - безразмерные. Выражение (13.47) представляет собой интегралы Максвелла - Мора (формула 13.30).

Используя начало возможных перемещений, выведем общую формулу теоремы Лагранжа.

Пусть на упругое тело действует произвольная система внешних сил F_i . Работа внешних сил на возможных перемещениях

$$W_b = \sum F_i \cdot \delta \Delta_i. \quad (13.48)$$

Так как тело находится в равновесии, то, согласно началу возможных перемещений, приращение потенциальной энергии деформации будет однозначно определяться деформациями (перемещениями точек тела), вызванными внешними силами, т.е. приращение потенциальной энергии может рассматриваться как функция перемещений точек приложения внешних сил: $U = f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i)$.

Тогда вариация потенциальной энергии δU будет определяться выражением

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i. \quad (13.49)$$

Подставляя (13.48) и (13.49) в (13.39), получим

$$\sum F_i \delta \Delta_i - \sum \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i = \sum \left(F_i - \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \right) \delta \Delta_i = 0. \quad (13.50)$$

Так как вариация $\delta \Delta_i$ - величина произвольная, не равная нулю, то из (13.50) следует, что

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i}. \quad (13.51)$$

Частная производная от потенциальной энергии деформации по перемещению равна силе. Формула (13.51) является общим выражением теоремы Лагранжа.

Пример 13.14. Два стержня BC и DC соединены в точке C общим шарниром. В точках B и D стержни опираются на шарнирно-неподвижные опоры. Требуется определить реакции в шарнирах B и C .

$F_1 = 10$ кН; $F_2 = 15$ кН; $h = 1,0$ м; $a_1 = 0,2$ м; $a_2 = 0,3$ м (рис. 13.25).

Решение. Согласно принципу начальных размеров считаем стержни жесткими, недеформируемыми. Поэтому для равновесия системы необходимо, чтобы сумма работ внешних сил на виртуальных перемещениях равнялась нулю. Уберем в шарнире D горизонтальную связь, заменив ее неизвестной горизонтальной реакцией D_x (рис. 13.25, a). Система теперь имеет одну степень свободы. Сообщим стержню BC виртуальное перемещение в виде поворота на бесконечно малый угол $\delta \varphi_1$ вокруг точки B .

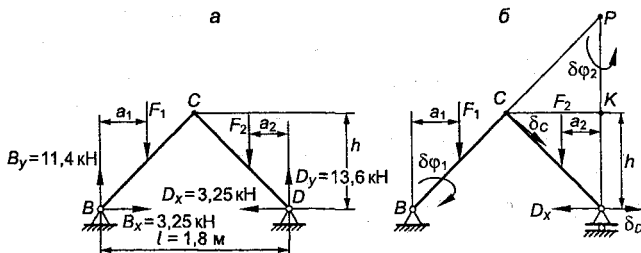


Рис. 13.25

Точка C получит перемещение $\delta_C \perp BC$; точка D получит горизонтальное перемещение δ_D . По виртуальным перемещениям δ_C и δ_D находим мгновенный центр вращения P стержня CD и виртуальный поворот $\delta\varphi_2$ стержня CD .

Составляем уравнение суммы работ внешних сил для звена BC относительно точки B , для звена CD - относительно точки P :

$$\begin{aligned} \sum F_i \delta_i = \delta\varphi_1 F_1 a_1 - \delta\varphi_2 F_2 a_2 + \delta\varphi_2 D_x PD = \delta\varphi_1 F_1 a_1 - \\ - \delta\varphi_2 (F_2 a_2 - D_x PD) = 0. \end{aligned} \quad (a)$$

Из $\triangle CPD$ следует: $PD = 2h$, так как CK - средняя линия. Запишем перемещения точки C для стержня BC и для стержня CD , которые равны

$$\delta_C = \delta\varphi_1 BC = -\delta\varphi_2 CP, \text{ или } \delta\varphi_1 = -\delta\varphi_2, \text{ так как } BC = CP.$$

Знак « \rightarrow » взят потому, что повороты происходят в противоположных направлениях.

Подставляя $\delta\varphi_2$ в (а), получим

$$\delta\varphi_1 (F_1 a_1 + F_2 a_2 - D_x 2h) = 0; \delta\varphi_1 \neq 0.$$

Откуда

$$D_x = \frac{F_1 a_1 + F_2 a_2}{2h} = \frac{10 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,3}{2,0} = 3,25 \text{ кН.}$$

Составляя уравнения моментов относительно опор B и D , найдем вертикальные составляющие реакций:

$$B_y = 11,4 \text{ кН}; D_y = 13,6 \text{ кН.}$$

Пример 13.15. Определить реакцию опоры C_y балки, нагруженной силами $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 15$ кН; $F_3 = 8$ кН (рис. 13.26).

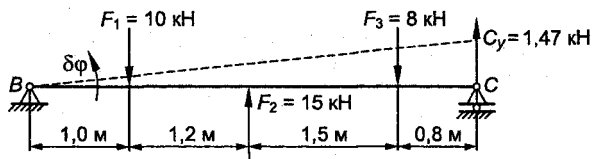


Рис. 13.26

Решение. Заменяем шарнир C неизвестной реакцией C_y . Возможным перемещением балки является элементарный угол поворота $\delta\varphi$ относительно опоры B .

Согласно началу возможных перемещений балка будет находиться в равновесии, если работа всех внешних сил (включая реакцию C_y) равна нулю:

$$\begin{aligned} \sum F_i \delta_i &= -1,0\delta\varphi F_1 + 2,2\delta\varphi F_2 - 3,7\delta\varphi F_3 + 4,5\delta\varphi C_y = \\ &= \delta\varphi(-1,0F_1 + 2,2F_2 - 3,7F_3 + 4,5C_y) = 0; \quad \delta\varphi \neq 0; \end{aligned}$$

$$C_y = \frac{10 \cdot 1 - 15 \cdot 2,2 + 8 \cdot 3,7}{4,5} = 1,47 \text{ кН.}$$

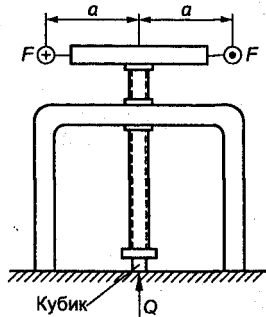


Рис. 13.27

Пример 13.16. Винтовой пресс сжимает чугунный кубик размерами $2 \times 2 \times 2$ см. Требуется определить максимальное усилие, которое необходимо приложить к рукояткам винта, чтобы разрушить кубик, если предел прочности чугуна $\sigma_b = 30\,000$ Н/см², длина рукоятки $a = 30$ см, шаг резьбы $h = 4$ мм (рис. 13.27). Трением в резьбе пренебречь.

Решение. Заменяем сжимаемое тело силой сопротивления Q , передаваемой на винт. Следовательно, имеется две внешние силы: пара сил с моментом $M = 2Fa$ (движущая) и сопротивление Q . Наложенная на систему связь определяет ее возможное перемещение, представляющее бесконечно малый угол поворота винта $\delta\varphi$. Возможное перемещение конца винта, имеющего шаг h , соответствующее связи, будет

$$\delta_x = \frac{h}{2\pi} \delta\varphi.$$

Согласно началу возможных перемещений сумма работ внешних сил равна нулю:

$$2Fa\delta\varphi - Q\frac{h}{2\pi}\delta\varphi = 0.$$

Откуда

$$F = \frac{Qh}{2\pi a} = \frac{120\,000 \cdot 0,4}{2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 30} = 127 \text{ Н},$$

где $Q = \sigma_B A = 30\,000 \cdot 2^2 = 120\,000 \text{ Н}$.

Пример 13.17. Два стальных стержня BC и CD расположены на одной линии (их собственным весом пренебрегаем) и соединены шарниром C . При приложении нагрузки F к узлу C последний опустился на величину $h = 4,5 \text{ см}$. Определить силу F и напряжения в стержнях, если $A = 2 \text{ см}^2$ (рис. 13.28).

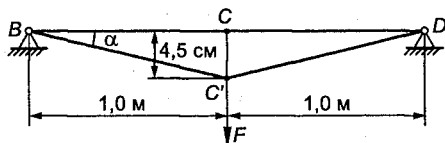


Рис. 13.28

Решение. Абсолютное удлинение стержня находим как разность длин $C'D$ и CD :

$$\Delta l = \sqrt{100^2 + 4,5^2} - 100 = 0,1 \text{ см}.$$

Полная потенциальная энергия деформации при растяжении стержней определяется по (13.21):

$$U = \frac{EA}{2l}(\Delta l)^2 \cdot 2 = \frac{EA}{l}(\Delta l)^2.$$

Используя теорему Лагранжа, найдем

$$F = \frac{\partial U}{\partial \Delta l} = \frac{2EA\Delta l}{l} = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 0,1}{100} = 40\,000 \text{ Н} = 40 \text{ кН}.$$

Напряжение в стержнях будет

$$\sigma = \epsilon E = \frac{0,1}{100} \cdot 2 \cdot 10^7 = 20\,000 \text{ Н/см}^2.$$

Решение задачи упростилось значительно.

Глава 14

СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

14.1. Особенности расчета брусьев при сложном нагружении

На практике детали конструкций часто подвергаются действию нагрузок, создающих различные комбинации из простых нагружений. При сложном нагружении в поперечных сечениях бруса одновременно могут действовать несколько внутренних силовых факторов. Так, валы редукторов при работе подвергаются поперечному изгибу с кручением. В поперечных сечениях одновременно возникают поперечная сила, изгибающий и крутящий моменты. Балка, на которую действует наклонная сила, подвергается поперечному изгибу с растяжением или сжатием, в зависимости от направления силы. В поперечных сечениях балки одновременно будут действовать поперечная сила, изгибающий момент и продольная (нормальная) сила. Решение такого типа задач проводится на основе *принципа независимости действия сил* и существенных затруднений не вызывает, так как опасное напряженное состояние просто находится суммированием напряженных состояний, создаваемых каждым в отдельности типом простого нагружения. Зная внутренние силовые факторы и используя соответствующие формулы для простых нагружений, определяются нормальные и касательные напряжения в различных точках поперечного сечения. Исследуя напряженное состояние в характерных точках, определяют главные напряжения и по соответствующей теории прочности производят проверку прочности или выбирают размеры поперечного сечения бруса.

Перемещения бруса в общем случае нагружения также находятся путем сложения перемещений, вызываемых в отдельности каждым простым нагружением.

14.2. Косой изгиб

Как отмечалось ранее, косой изгиб может быть плоским и пространственным. Плоский косой изгиб имеет место, когда все внешние силы действуют в одной плоскости, проходящей через ось бруса и образующей постоянный угол с его главной

плоскостью xOz (рис. 14.1, *a*). При плоском косом изгибе упругая линия бруса будет представлять собой плоскую кривую. При пространственном косом изгибе внешние нагрузки располагаются в разных плоскостях, проходящих через ось бруса. В этом случае углы между главными центральными осями поперечных сечений и действующими нагрузками изменяются по длине бруса, а упругая линия будет представлять собой пространственную кривую (рис. 14.1, *б*).

При расчетах на прочность и жесткость как плоский, так и пространственный косой изгиб приводят к двум прямым изгибам в главных плоскостях, для чего приложенные нагрузки разлагают на составляющие, действующие в плоскостях xOy и xOz , где оси y и z являются главными осями инерции сечений (рис. 14.1, *в*).

В общем случае при косом изгибе в поперечных сечениях действуют четыре внутренних силовых фактора: Q_y , Q_z , M_y , M_z . Однако, как и в случае прямого изгиба, влиянием касательных напряжений пренебрегают и рассматривают только действия изгибающих моментов.

Нормальное напряжение в произвольной точке C поперечного сечения, согласно принципу независимости действия сил, будет равно алгебраической сумме напряжений от изгибающих моментов M_z и M_y , действующих в главных плоскостях (рис. 14.2). Условимся считать в поперечном сечении изгибающий момент M_z положительным, если он вызывает в точках первого и второго квадрантов растягивающие напряжения, и отрицательным, ес-

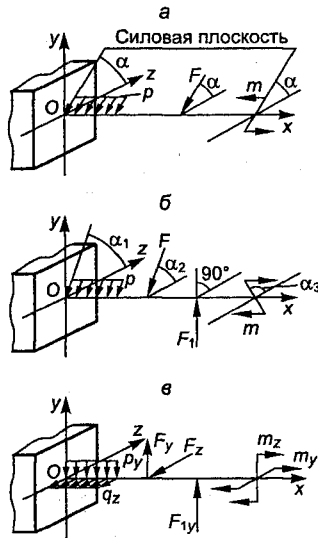


Рис. 14.1

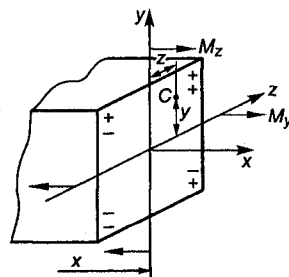


Рис. 14.2

ли вызывает сжимающие напряжения; изгибающий момент M_y будем считать положительным, если он вызывает в точках первого и четвертого квадрантов растягивающие напряжения, и отрицательным – если вызывает сжимающие напряжения, что соответствует характеру деформации балки при изгибе (см. рис. 14.2).

Суммарное напряжение в точке C будет равно

$$\sigma_C = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}, \quad (14.1)$$

где y и z – координаты точки C ; I_y , I_z – осевые моменты инерции сечения относительно осей y и z .

Формула (14.1) позволяет определять напряжение в любой точке поперечного сечения, независимо от его формы, если известны M_z и M_y для рассматриваемого сечения, которые принимаются из соответствующих эпюр. Изгибающие моменты подставляются в (14.1) согласно принятому условному правилу знаков. Обычно при использовании формулы (14.1) руководствуются следующим положением: рассматривая деформации бруса под воздействием моментов M_z и M_y , устанавливают знаки напряжений, возникающих в каждом квадранте сечения. Например, на рис. 14.2 от изгибающего момента M_z в первом и втором квадрантах возникают растягивающие напряжения, в третьем и четвертом – сжимающие, что в сечении отмечается соответствующими знаками «+» или «-». Изгибающий момент M_y вызывает в первом и четвертом квадрантах растягивающие напряжения, во втором и третьем – сжимающие. Теперь знаки у членов формулы (14.1) принимаются в зависимости от того, в каком квадранте располагается интересующая точка.

В случае плоского косоугольного изгиба, когда силовая плоскость образует постоянный угол с главной плоскостью xOz балки, изгибающие моменты M_z и M_y и нормальные напряжения можно выразить через полный изгибающий момент M , действующий в силовой плоскости. В качестве примера рассмотрим консольную балку прямоугольного поперечного сечения, нагруженную силой F , расположенной под углом α к оси z (рис. 14.3).

Разложим силу F на составляющие по главным осям y и z :

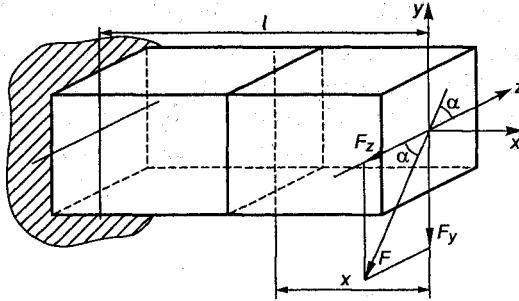


Рис. 14.3

$$\begin{aligned} F_y &= F \sin \alpha; \\ F_z &= F \cos \alpha. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Изгибающие моменты M_z и M_y от сил F_z и F_y в произвольном сечении будут

$$\begin{aligned} M_z &= F_y x = F x \sin \alpha = M \sin \alpha; \\ M_y &= F_z x = F x \cos \alpha = M \cos \alpha, \end{aligned} \quad (14.3)$$

где M - полный момент, действующий в сечении x , равный

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{F_y^2 x^2 + F_z^2 x^2} = x \sqrt{F_y^2 + F_z^2} = Fx.$$

Подставляя значения M_z и M_y из (14.3) в (14.1), получим

$$\sigma = \frac{M \sin \alpha y}{I_z} + \frac{M \cos \alpha z}{I_y},$$

или

$$\sigma = M \left(\frac{y \sin \alpha}{I_z} + \frac{z \cos \alpha}{I_y} \right). \quad (14.4)$$

Из выражений (14.1) и (14.4) следует, что нормальные напряжения в поперечном сечении при косом изгибе изменяются по линейному закону. Максимальные напряжения будут возникать в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Уравнение нейтральной линии при пространственном изгибе получим, положив в формуле (14.1) $\sigma = 0$:

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0, \quad (14.5)$$

откуда

$$y = -\frac{M_y I_z}{M_z I_y} z = z \operatorname{tg} \beta, \quad (14.6)$$

где $z \operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y I_z}{M_z I_y}$ - угловой коэффициент, определяющий угол наклона нейтральной линии к оси z (рис. 14.4).

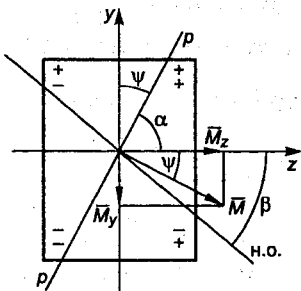


Рис. 14.4

При плоском косом изгибе отношение изгибающих моментов M_z и M_y по длине бруса постоянно и, согласно формуле (14.3), равно

$$\frac{M_y}{M_z} = \frac{M \cos \alpha}{M \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad (14.7)$$

где α - угол наклона силовой плоскости к оси z .

Подставляя в уравнение (14.6)

отношение $\frac{M_y}{M_z}$ из (14.7), получим

уравнение нейтральной линии при плоском изгибе:

$$y = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} z = \operatorname{tg} \beta z, \quad (14.8)$$

где $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y}$ - угловой коэффициент нейтральной линии.

Уравнение (14.8) можно получить, приравняв к нулю выражение (14.4).

Из уравнений (14.6) и (14.8) следует:

а) нейтральная линия представляет собой прямую, проходящую через центр тяжести сечения;

б) при пространственном изгибе положение нейтральной линии вдоль оси бруса изменяется в соответствии с изменением отношения моментов $\frac{M_y}{M_z}$;

в) при плоском изгибе положение нейтральной линии вдоль оси бруса остается постоянным, так как угол наклона $\beta = \text{const}$.

В случае пространственного изгиба положение полного изгибающего момента, действующего в сечении, удобно находить при помощи векторной диаграммы моментов. Представим изгибающие моменты M_z и M_y векторами \overline{M}_z и \overline{M}_y , равными по модулю моментам M_z и M_y . Векторы \overline{M}_z и \overline{M}_y откладываются вдоль осей y и z согласно направлению моментов M_z и M_y . Результирующий вектор-момент \overline{M} определяет величину и направление полного изгибающего момента M , действующего в сечении, а также положение следа силовой плоскости $p-p$.

Обозначим через ψ угол между вектором \overline{M} и осью z . Тангенс этого угла равен отношению модулей векторов \overline{M}_z и \overline{M}_y :

$$\text{tg}\psi = \frac{M_y}{M_z} \quad (14.9)$$

Так как плоскость действия полного изгибающего момента перпендикулярна к вектору \overline{M} , то след силовой плоскости $p-p$ в сечении будет составлять с осью z угол α (см. рис. 14.4):

$$\alpha = 90^\circ - \psi.$$

Определив положение следа силовой плоскости, по формуле (14.8) находят положение нейтральной линии в сечении.

Положительные углы β и α откладываются от оси z против хода часовой стрелки, отрицательные – по ходу часовой стрелки.

Выясним расположение нейтральной линии относительно следа $p-p$ силовой плоскости. Уравнение следа $p-p$ имеет вид

$$y = \operatorname{tg}\alpha z, \quad (14.10)$$

где $\operatorname{tg}\alpha$ - угловой коэффициент.

Проверим, выполняется ли условие перпендикулярности прямых нейтральной линии и следа $p - p$. Как известно из аналитической геометрии, две прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно -1 , и не перпендикулярны, если оно не равно -1 .

Согласно уравнениям (14.8) и (14.10) имеем

$$\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\alpha \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg}\alpha = -\frac{I_z}{I_y} \neq -1. \quad (14.11)$$

Таким образом, при косом изгибе, в отличие от прямого изгиба, нейтральная линия не перпендикулярна к плоскости действия полного изгибающего момента.

Необходимо отметить, что нейтральная линия и прямая $p - p$ располагаются в смежных квадрантах.

Возможны следующие случаи:

а) $I_z > I_y$; в этом случае в правой части уравнения (14.11)

отношение $\frac{I_z}{I_y}$ больше единицы, поэтому сумма углов $(\beta + \alpha)$

больше 90° . Нейтральная линия будет располагаться ближе к той главной оси инерции сечения, относительно которой момент инерции имеет меньшее значение (ось y на рис. 14.4);

б) $I_z < I_y$; в этом случае в правой части уравнения (14.11)

отношение $\frac{I_z}{I_y}$ меньше единицы, сумма углов $(\beta + \alpha)$ меньше

90° . Нейтральная линия будет ближе располагаться к оси z , относительно которой момент инерции сечения меньше;

в) $I_z = I_y$; в этом частном случае моменты инерции относительно всех осей, проходящих через центр тяжести, равны и все оси являются главными (например, сечения квадрат, круг, равносторонний треугольник). Таким образом, силовая плоскость независимо от ее ориентации у таких сечений будет всегда главной плоскостью, а нейтральная ось всегда будет перпендику-

лярна к ней, и, следовательно, у этих сечений кривой изгиб невозможен.

В общем случае $I_z \neq I_y$ при кривом изгибе брус изгибается в плоскости, повернутой от плоскости действия полного изгибающего момента в сторону оси с минимальным моментом инерции. Нейтральная линия делит сечение на две части, в одной части возникают растягивающие напряжения, в другой - сжимающие.

При *кривом изгибе* напряженное состояние в опасной точке принимается линейным и расчет на прочность производится по нормальным напряжениям, возникающим в поперечных сечениях, где изгибающие моменты M_z и M_y , как правило, имеют наибольшую величину. При *плоском кривом изгибе* оба момента M_z и M_y обычно имеют наибольшее значение в одном поперечном сечении, которое является опасным. При *пространственном кривом изгибе* моменты M_z и M_y обычно имеют наибольшее значение в разных сечениях, поэтому расчет требуется проводить для двух или более предположительно опасных сечений.

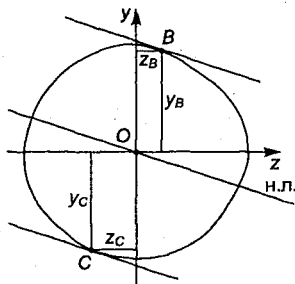


Рис. 14.5

Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. При этом в одной точке будет действовать наибольшее растягивающее напряжение, а в другой - наибольшее сжимающее.

Условия прочности для опасных точек запишутся в следующем виде (рис. 14.5):

$$\sigma_{x_p \max} = \sigma_B = \frac{M_z y_B}{I_z} + \frac{M_y z_B}{I_y} \leq [\sigma]_p, \quad (14.12)$$

$$\sigma_{x_c \max} = \sigma_C = \left| \frac{M_z y_C}{I_z} + \frac{M_y z_C}{I_y} \right| \leq [\sigma]_c, \quad (14.13)$$

где $[\sigma]_p$, $[\sigma]_c$ - допускаемые напряжения на растяжение и сжатие; y_B , z_B , y_C , z_C - координаты опасных точек.

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то достаточно обеспечить выполнение одного условия, соответствующего большему по абсолютной величине напряжению.

Для сечений с двумя осями симметрии (прямоугольник, двутавр), опасные точки легко устанавливаются по характеру изгиба бруса; ими будут угловые точки, наиболее удаленные от обеих главных центральных осей. Условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_{\text{хmax}} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]_p, \quad (14.14)$$

где W_z и W_y - осевые моменты сопротивления.

Для нахождения опасной точки у сечений сложной формы необходимо определить положение нейтральной линии, затем параллельно ей провести касательные к контуру сечения. Точки касания $B(y_B; z_B)$, $C(y_C; z_C)$ будут опасными точками (рис. 14.5).

Подбор сечений при косом изгибе осложняется наличием в условиях прочности (14.12 - 14.14.) одновременно двух неизвестных моментов сопротивления или моментов инерции. Поэтому сначала задаются их отношением, а затем производится проверка выбранного сечения.

Для прямоугольного и некоторых прокатных профилей (двутавр, швеллер) можно дать определенные рекомендации; для сложных сечений размеры определяют методом последовательного подбора.

Рассмотрим подбор прямоугольного и других сечений. Вынесем в (14.14) W_z за скобки:

$$\frac{1}{W_z} \left(M_z + \frac{W_z}{W_y} M_y \right) \leq [\sigma],$$

или

$$\frac{M_z + cM_y}{W_z} \leq [\sigma], \quad (14.15)$$

где $c = \frac{W_z}{W_y}$,

откуда находим момент сопротивления W_z :

$$W_z = \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]}. \quad (14.16)$$

Для прямоугольного сечения шириной b и высотой h величина c равна

$$c = \frac{6bh^2}{6b^2h} = \frac{h}{b},$$

где c - отношение сторон.

Для двутавровых сечений величина c изменяется в пределах 5 - 14, при расчетах в качестве первой пробы принимают 8; для швеллеров c принимают равным 6. Расчет круглых и кольцевых сечений ведут по общему изгибающему моменту:

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} \quad (14.17)$$

как при обычном прямом изгибе, так как для круга нейтральная линия перпендикулярна к следу силовой плоскости.

При косом изгибе прогибы и углы поворота определяются отдельно в каждой главной плоскости теми же методами, что и при прямом изгибе. Полный прогиб находится как геометрическая сумма составляющих прогибов:

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2}, \quad (14.18)$$

где δ_y и δ_z - прогибы в направлении главных центральных осей y и z .

Аналогично угол поворота поперечного сечения равен геометрической сумме углов поворота θ_y и θ_z этого сечения относительно главных центральных осей y и z :

$$\theta = \sqrt{\theta_y^2 + \theta_z^2}. \quad (14.19)$$

Угол между полным перемещением (прогибом) δ и осью z равен (рис. 14.6)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\delta_y}{\delta_z}. \quad (14.20)$$

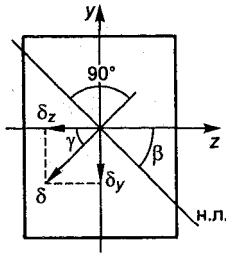


Рис. 14.6

Полный прогиб происходит в плоскости, перпендикулярной к нейтральной линии, а полный угол поворота происходит вокруг нейтральной линии.

В качестве примера вычислим прогиб свободного конца консольной балки прямоугольного поперечного сечения, нагруженной силой F , действующей под углом α к оси z (рис. 14.7).

Разложим силу F по направлению главных осей y и z , получим:

$$F_y = F \sin \alpha;$$

$$F_z = F \cos \alpha.$$

Воспользовавшись методом начальных параметров, найдем прогибы δ_y и δ_z :

$$\delta_y = -\frac{Fl^3 \sin \alpha}{3EI_z};$$

$$\delta_z = -\frac{Fl^3 \cos \alpha}{3EI_y}.$$

Полный прогиб

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2} = \frac{Fl^3}{3E} \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{I_z^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{I_y^2}}.$$

Угол γ между полным прогибом и осью z будет

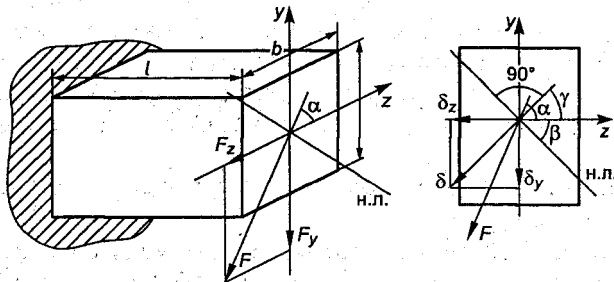


Рис. 14.7

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\delta_y}{\delta_z} = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_y}{I_z}.$$

Условие перпендикулярности нейтральной линии к линии полного прогиба выполняется, т.е.

$$\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \frac{I_y}{I_z} = -1.$$

Таким образом, *полный прогиб при косом изгибе* перпендикулярен к нейтральной линии. При *плоском косом изгибе* упругая линия будет представлять собой плоскую кривую, но расположенную не в силовой плоскости, а в плоскости, перпендикулярной к нейтральной линии. Очевидно, отклонение полного прогиба от силовой плоскости будет тем больше, чем больше отно-

шение $\frac{I_z}{I_y}$.

При косом изгибе наиболее рациональными формами поперечных сечений являются коробчатые, тонкостенные сечения.

Пример 14.1. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения $b \times h = 12 \times 24$ см, шарнирно опертая по концам, нагружена силой $F = 5000$ Н в плоскости поперечного сечения под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонтальной оси z (рис. 14.8, а). Определить нормальные напряжения в угловых точках сечения. Построить эпюры этих напряжений по сторонам сечения, определить положение нейтральной линии в опасном сечении, а также максимальный прогиб балки.

Решение. Разложим силу F на составляющие F_y и F_z по главным центральным осям сечения, определим опорные реакции и построим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y (см. рис. 14.8, б, в, г, д). Опасным сечением является сечение под силой F .

Чтобы не строить эпюру M_y в аксонометрии, рекомендуется балку поворачивать на 90° против часовой стрелки. Тогда силы, действующие в горизонтальной плоскости, условно будут действовать в вертикальной плоскости. При нахождении положения следа силовой плоскости и нейтральной линии в сечении балка переводится в исходное положение поворотом на 90° по часовой стрелке. Соответственно эпюра M_y повернется так же.

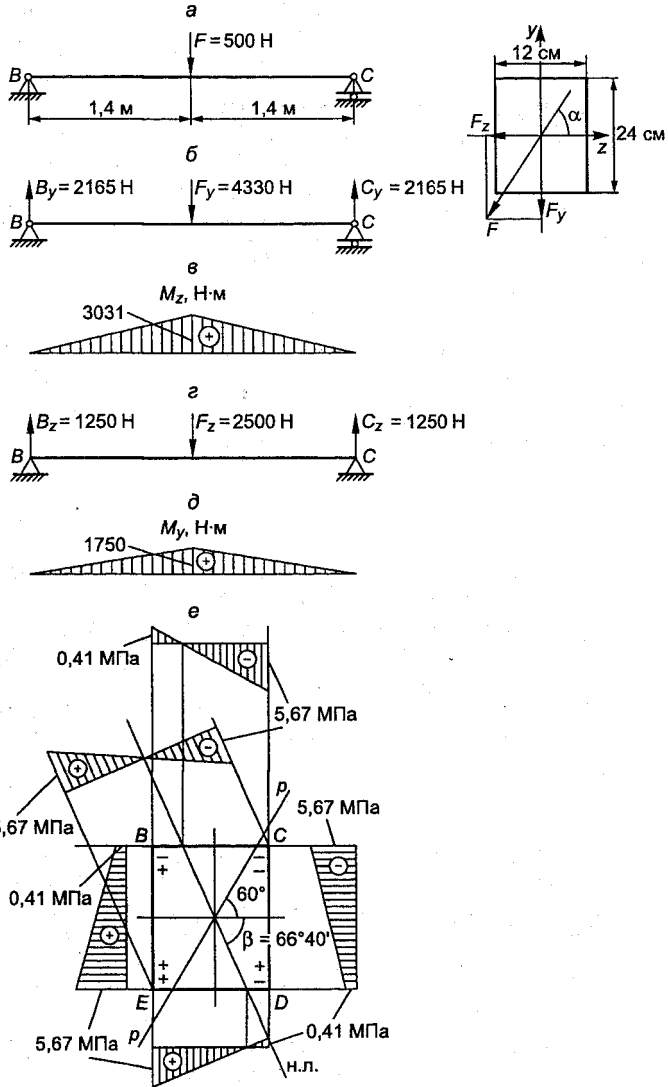


Рис. 14.8

Рассматривая деформации балки под действием моментов M_z и M_y , отмечаем знаки напряжений, возникающих в каждом квадранте сечения. От момента M_z в первом и втором квадран-

тах возникают сжимающие напряжения, в третьем и четвертом – растягивающие; от момента M_y в первом и четвертом квадрантах возникают сжимающие напряжения; во втором и третьем – растягивающие (см. рис. 14.8, *e*).

Определим напряжения в угловых точках сечения, используя формулу (14.14):

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y};$$

$$\sigma_C = -\frac{3031 \cdot 10^2 \cdot 6}{12 \cdot 24^2} - \frac{1750 \cdot 10^2 \cdot 6}{24 \cdot 12^2} = -5,67 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\frac{3031 \cdot 10^2 \cdot 6}{12 \cdot 24^2} + \frac{1750 \cdot 10^2 \cdot 6}{24 \cdot 12^2} = 0,41 \text{ МПа};$$

$$\sigma_E = \frac{3031 \cdot 10^2 \cdot 6}{12 \cdot 24^2} + \frac{1750 \cdot 10^2 \cdot 6}{24 \cdot 12^2} = 5,67 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = \frac{3031 \cdot 10^2 \cdot 6}{12 \cdot 24^2} - \frac{1750 \cdot 10^2 \cdot 6}{24 \cdot 12^2} = -0,41 \text{ МПа}.$$

Определим положения нейтральной линии по формуле (14.8). Силовая плоскость для плоского изгиба совпадает с направлением действия силы F .

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} = -\operatorname{ctg} 60^\circ \frac{12 \cdot 24^3 \cdot 12}{12 \cdot 24 \cdot 12^3} = -2,31;$$

$$\beta = -66^\circ 40'.$$

Эпюра распределения нормальных напряжений вдоль сторон прямоугольного сечения показана на рис. 14.8, *e*.

Полный прогиб равен геометрической сумме прогибов от сил F_y и F_z :

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2};$$

$$\delta_y = \frac{F_y l^3}{48EI_z} = \frac{4330 \cdot 280^3 \cdot 12}{48 \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 24^3} = 0,14 \text{ см};$$

$$\delta_z = \frac{F_z l^3}{48EI_y} = \frac{2500 \cdot 280^3 \cdot 12}{48 \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 24 \cdot 12^3} = 0,33 \text{ см};$$

$$\delta = \sqrt{0,14^2 + 0,33^2} = 0,36 \text{ см}.$$

Угол γ между полным прогибом и осью z равен

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\delta_y}{\delta_z} = \frac{0,14}{0,33} = 0,43; \gamma = 23^\circ 20'.$$

Таким образом, полный прогиб происходит в плоскости, перпендикулярной к нейтральной оси.

Пример 14.2. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон $b/h = 1/1,8$ загружена сосредоточенными силами: горизонтальной $F_z = 1400 \text{ Н}$ и вертикальной $F_y = 2000 \text{ Н}$ (рис. 14.9, а). Подобрать сечение балки, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 1000 \text{ Н/см}^2$, и определить положение нейтральной линии и следа силовой плоскости в опасном сечении.

Решение. Определяем опорные реакции и строим эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной главных плоскостях балки (см. рис. 14.9, б, в). Опасным будет сечение D или K , какое из них - не ясно. Поэтому расчет необходимо провести для каждого сечения.

Предположим, опасным сечением является сечение D . Положив для прямоугольного сечения величину $c = h/b = 1,8$, по формуле (14.16) найдем

$$W_z = \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]} = \frac{133,3 \cdot 10^2 + 1,8 \cdot 373,3 \cdot 10^2}{1000} = 80,6 \text{ см}^3;$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{10,8} = 80,6 \text{ см}^3; h = \sqrt[3]{80,6 \cdot 10,8} = 9,5 \text{ см};$$

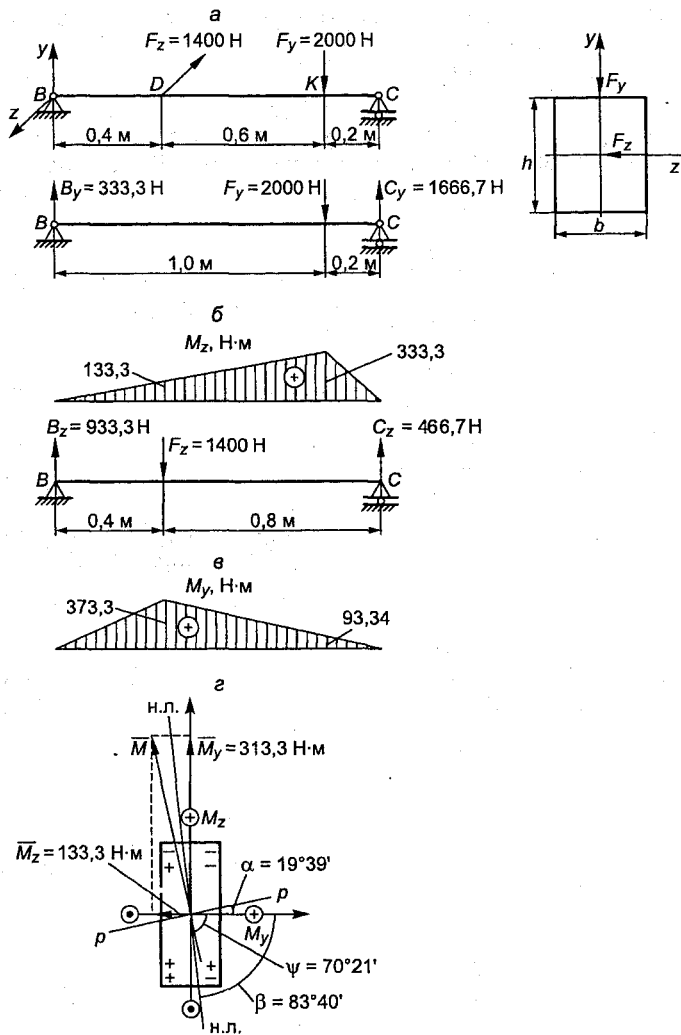


Рис. 14.9

$$b = \frac{h}{1.8} = \frac{9.5}{1.8} = 5.3\text{ см.}$$

Проверяем достаточность принятого предположения.

Для сечения D :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{133,3 \cdot 10^2 \cdot 6}{5,3 \cdot 9,5^2} + \frac{373,3 \cdot 10^2 \cdot 6}{9,5 \cdot 5,3^2} = 10,07 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Для сечения K :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{133,3 \cdot 10^2 \cdot 6}{5,3 \cdot 9,5^2} + \frac{93,3 \cdot 10^2 \cdot 6}{9,5 \cdot 5,3^2} = 6,28 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Опасным оказалось сечение D . В этом сечении балка перегружена на

$$\Delta = \frac{1007 - 1000}{1000} 100 \% = 0,7 \%,$$

что допустимо.

Для определения положения следа силовой плоскости построим в опасном сечении векторную диаграмму моментов (см. рис. 14.9, z):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{M_y}{M_z} = \frac{373,3}{133,3} = 2,8; \quad \psi = 70^\circ 21'.$$

След силовой плоскости $p - p$ составляет с осью z угол

$$\alpha = 90^\circ - \psi = 90^\circ - 70^\circ 21' = 19^\circ 39'.$$

Угол α откладывается от оси z против часовой стрелки и является положительным.

Положение нейтральной линии определяется по формуле (14.8):

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} = -\operatorname{ctg} (19^\circ 39') \frac{5,3 \cdot 9,5^3 \cdot 12}{12 \cdot 9,5 \cdot 5,3^3} = -9,0;$$

$$\beta = -83^\circ 40'.$$

Так как угол β отрицательный, то откладываем его от оси z по часовой стрелке. Положение следа силовой плоскости $p - p$ и положение нейтральной линии показаны на рис. 14.9, z .

Пример 14.3. Двутавровая балка нагружена сосредоточенными силами $F_y = 5$ кН, $F_z = 10$ кН и парой сил с момен-

том $M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$, действующим в плоскости, образующей угол $\alpha = 60^\circ$ с осью z . Требуется подобрать сечение балки, если допустимое напряжение $[\sigma] = 16\,000 \text{ Н/см}^2$. Определить в опасном сечении положение следа силовой плоскости и нейтральной линии, а также построить эпюры распределения нормальных напряжений по сторонам сечения и относительно нейтральной линии (рис. 14.10).

Решение. Разложим пару сил на составляющие относительно основных центральных осей сечения:

$$M_y = M \sin 60^\circ = 12 \cdot 0,866 = 10,39 \text{ кНм};$$

$$M_z = M \cos 60^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ кНм}.$$

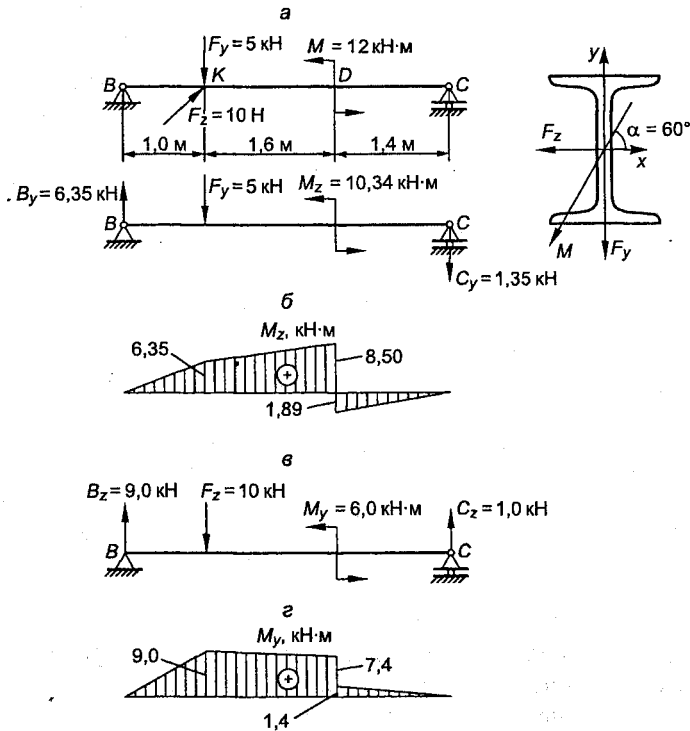


Рис. 14.10

Определим опорные реакции от сил, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях, и построим эпюры изгибающих моментов в вертикальной M_z (рис. 14.10, а, б) и горизонтальной M_y (рис. 14.10, в, г) плоскостях.

Выбираем опасное сечение. Им может быть сечение D или K . Предположим, что опасным сечением является K . Выполним для него подбор профиля двутавра, приняв $c = 8$:

$$W_z = \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]} = \frac{6,35 \cdot 10^5 + 8 \cdot 9 \cdot 10^5}{16000} = 490 \text{ см}^3.$$

Из таблиц ГОСТа принимаем профиль № 30 $W_z = 472 \text{ см}^3$, $W_y = 49,9 \text{ см}^3$.

Вычисляем максимальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{6,35 \cdot 10^5}{472} + \frac{9 \cdot 10^5}{49,9} = 19381 \text{ Н/см}^2 > 16000 \text{ Н/см}^2.$$

Берем профиль № 30а:

$$W_z = 518 \text{ см}^3; W_y = 60,1 \text{ см}^3;$$

$$I_z = 7780 \text{ см}^4; I_y = 436 \text{ см}^4;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{6,35 \cdot 10^5}{518} + \frac{9 \cdot 10^5}{60,1} = 16201 \text{ Н/см}^2.$$

Перенапряжение составляет

$$\Delta = \frac{16201 - 16000}{16000} 100 = 1,26\% < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

Проверяем, удовлетворяет ли профиль № 30а сечению D :

$$\sigma_{\max} = \frac{8,5 \cdot 10^5}{518} + \frac{7,4 \cdot 10^5}{60,1} = 13954 \text{ Н/см}^2 < [\sigma] = 16000 \text{ Н/см}^2.$$

Условие прочности удовлетворяется.

Таким образом, опасным сечением является сечение K . Определяем след силовой плоскости, для чего строим в опасном сечении векторную диаграмму моментов (рис. 14.11):

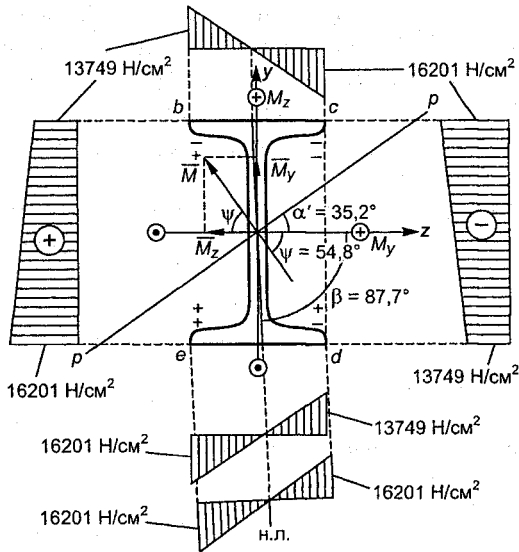


Рис. 14.11

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{M_y}{M_z} = \frac{9}{6,35} = 1,417; \quad \psi = 54,8^\circ;$$

$$\alpha' = 90 - 54,8 = 35,2^\circ.$$

Угол α' - положительный, так как откладывается от оси z против часовой стрелки.

Определяем положение нейтральной линии:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha' \frac{I_z}{I_y} = -\operatorname{ctg} 35,2 \frac{7780}{436} = -1,417 \frac{7780}{436} = -25,3;$$

$$\beta = -87,7^\circ.$$

Угол β - отрицательный, он должен откладываться от оси z по часовой стрелке.

Вычисляем напряжения в угловых точках профиля:

$$\sigma_c = -\frac{6,35 \cdot 10^5}{518} + \frac{9 \cdot 10^5}{60,1} = -1226 - 14975 = -16201 \text{ Н/см}^2;$$

$$\sigma_d = 1226 - 14975 = -13749 \text{ Н/см}^2;$$

$$\sigma_e = 1226 + 14975 = 16201 \text{ Н/см}^2;$$

$$\sigma_b = -1226 + 14975 = 13749 \text{ Н/см}^2.$$

Эпюры нормальных напряжений по сторонам сечения и относительно нейтральной линии представлены на рис. 14.11.

14.3. Изгиб с кручением

Изгиб в сочетании с кручением является наиболее распространенным видом нагружения *круглых* валов. На изгиб с кручением работают валы редукторов, коробок перемены передач, торсионы и т.д. Силы, передаваемые валу шкивами, зубчатыми колесами, всегда вызывают его изгиб и кручение.

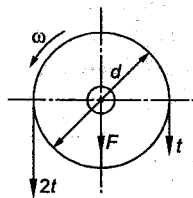


Рис. 14.12

На рис. 14.12 представлен закрепленный на валу шкив ременной передачи.

Обозначим натяжение ведущей ветви ремня $2t$, ведомой - t , передаваемую мощность - P кВт, частоту вращения - n об/мин.

Момент на шкиву и окружное усилие t будут равны

$$m = 9550 \frac{P}{n}; \quad t = \frac{2m}{d}.$$

Сила давления на вал

$$F = 2t + t = 3t.$$

Следовательно, момент m будет вызывать кручение вала, а сила F - его изгиб. Аналогичные результаты получим и для посаженного на вал колеса зубчатой передачи.

Рассмотрим консольный брус BD круглого поперечного сечения, нагруженный скручивающими моментами m_1, m_2 и силами F, F_1, F_2 , расположенными под углами $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ к оси z (рис. 14.13).

В поперечных сечениях будут действовать изгибающие моменты M_z и M_y , поперечные силы Q_z и Q_y и крутящий момент T .

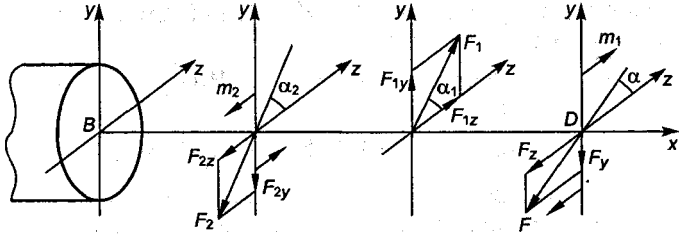


Рис. 14.13

Таким образом, в любом поперечном сечении одновременно возникают нормальные напряжения от изгибающих моментов M_z и M_y и касательные напряжения от поперечных сил Q_z , Q_y и крутящего момента T . Чтобы найти опасное сечение, необходимо построить эпюры всех внутренних силовых факторов в главных плоскостях yz и zx , для чего нагрузки, действующие на брус, разлагаются на составляющие по осям y и z .

Как известно, у брусьев круглого поперечного сечения косою изгиб невозможен, поэтому каждое поперечное сечение будет испытывать прямой изгиб под действием полного изгибающего момента:

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

След $p-p$ силовой плоскости будет располагаться к оси z под углом α (14.7):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{M_y}{M_z}.$$

Опасным является сечение, в котором одновременно имеют наибольшее значение полный изгибающий момент M и крутящий момент T . Для определения в опасном сечении опасной точки изобразим эпюры распределения нормальных напряжений от изгибающего момента M , касательных напряжений от крутящего момента T и суммарной поперечной силы:

$$Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2},$$

принимая за ось напряжений след плоскости $p-p$ (рис. 14.14, а).

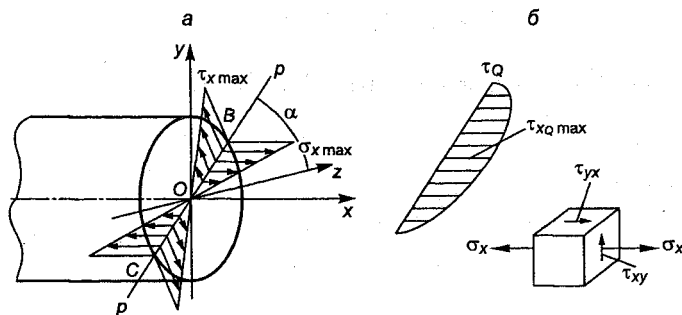


Рис. 14.14

Наибольшее нормальное растягивающее напряжение будет возникать в точке B , где след плоскости $p - p$ полного момента пересекает контур сечения, наибольшее сжимающее напряжение будет действовать в точке C .

Наибольшие касательные напряжения от крутящего момента T действуют на контуре сечения, значит, и в точке B .

Касательные напряжения от поперечной силы Q имеют второстепенное значение. В точках B и C они равны нулю. Наибольшее значение они имеют в центре сечения, где нормальные напряжения от изгибающего момента M равны нулю. В расчетах касательными напряжениями от поперечной силы пренебрегают, так как наибольшее главное напряжение имеет место в точке, где действуют наибольшее нормальное напряжение и наибольшее касательное напряжение от крутящего момента T .

Выделим в опасной точке B бесконечно малый элемент в виде кубика (рис. 14.14, б). Так как на поверхности вала напряжений нет, то элемент находится в плоском напряженном состоянии.

Как правило, валы изготавливают из стали, поэтому их расчет рекомендуется проводить по третьей или четвертой теории прочности.

Главные напряжения для выделенного элемента, учитывая, что $\sigma_y = 0$, определяют по формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2}; \quad \sigma_2 = 0. \quad (14.21)$$

Условие прочности по третьей теории прочности для плоского напряженного состояния имеет следующий вид:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставляя значения σ_1 и σ_3 из (14.21), получим

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2} \leq [\sigma].$$

Для вала круглого поперечного сечения напряжения σ_x и τ_x определяются по формулам

$$\sigma_x = \frac{M}{W_z}; \quad \tau_x = \frac{T}{W_p}.$$

Подставляя в (14.22) вместо σ_x и τ_x их значения и учитывая, что $W_p = 2W_z$, получим

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (14.23)$$

или

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (14.24)$$

где $M_{\text{прив}} = \sqrt{M^2 + T^2}$ - приведенный момент в сечении по третьей теории прочности; $[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

Условие прочности по четвертой теории прочности для рассматриваемого плоского напряженного состояния имеет вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma].$$

Подставляя из (14.21) главные напряжения, после простых преобразований получим

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_x^2} \leq [\sigma]. \quad (14.25)$$

Заменяя в (14.25) σ_x и τ_x их значениями и принимая $W_p = 2W_z$, получим формулу

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75 \cdot T^2}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (14.26)$$

или

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (14.27)$$

где $M_{\text{прив}} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot T^2}$ - приведенный момент в сечении по четвертой теории прочности.

Таким образом, эквивалентное напряжение при совместном действии изгиба с кручением равно приведенному моменту в сечении, деленному на осевой момент сопротивления.

Все выведенные формулы полностью применимы и к валам, имеющим кольцевое сечение.

Пример 14.4. Определить диаметр трансмиссии, передающей мощность $P = 8$ кВт, при частоте вращения $n = 400$ об/мин (рис. 14.15, а). Ветви ремней на шкивах образуют с горизонтом углы $\alpha_1 = 20^\circ$ и $\alpha_2 = 40^\circ$. Диаметры шкивов $D_1 = 16$ см, $D_2 = 30$ см. Натяжение в ведущей ветви ремня в 2 раза больше натяжения в ведомой ветви. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 8000$ Н/см², допускаемый угол закручивания $[\theta] = 0,15$ град/м. Расчет произвести по третьей и четвертой теориям прочности.

Решение. Определяем усилия, действующие на вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Вращающий момент на валу

$$M = 9550 \frac{P}{n} = 9550 \frac{8}{400} = 191 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_1 = M_2 = M;$$

$$t_1 = \frac{2M}{D_1} = \frac{2 \cdot 191}{0,16} = 2387,5 \text{ Н};$$

$$t_2 = \frac{2M}{D_2} = \frac{2 \cdot 191}{0,3} = 1273,3 \text{ Н};$$

$$F_1 = 3t_1 = 3 \cdot 2387,5 = 7162,5 \text{ Н};$$

$$F_2 = 3t_2 = 3 \cdot 1273,3 = 3819,9 \text{ Н}.$$

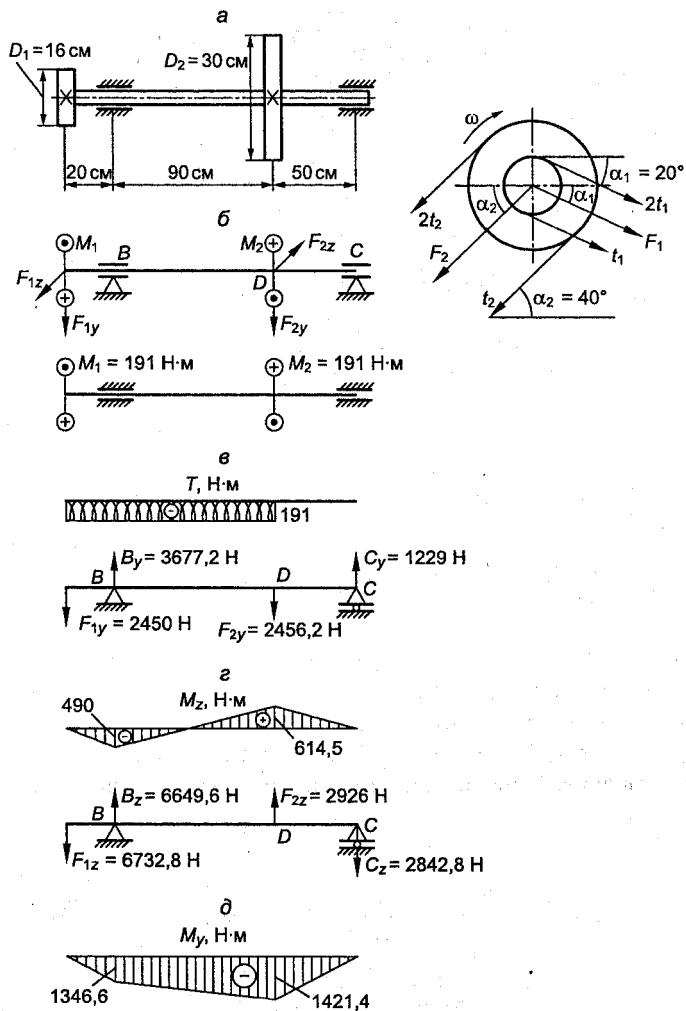


Рис. 14.15

Раскладываем силы F_1 и F_2 на составляющие в вертикальной и горизонтальной плоскостях:

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 7162,5 \cdot 0,94 = 6732,8 \text{ H};$$

$$F_{2z} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 3819,9 \cdot 0,766 = 2926 \text{ H};$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 7162,5 \cdot 0,342 = 2450 \text{ Н};$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 3819,9 \cdot 0,643 = 2456,2 \text{ Н}.$$

Расчетная схема показана на рис. 14.15, б. Строим эпюры крутящих и изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Крутящий момент

$$T = -M_1 = -191 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Эпюра крутящих моментов показана на рис. 14.15, в.

Определяем опорные реакции B_y и C_y :

$$C_y = \frac{F_{2y} \cdot 0,9 - F_{1y} \cdot 0,2}{1,4} = \frac{2456,2 \cdot 0,9 - 2450 \cdot 0,2}{1,4} = 1229 \text{ Н};$$

$$B_y = \frac{F_{1y} \cdot 1,6 + F_{2y} \cdot 0,5}{1,4} = \frac{2450 \cdot 1,6 + 2456,2 \cdot 0,5}{1,4} = 3677,2 \text{ Н}.$$

Эпюра M_z показана на рис. 14.15, г.

Определяем опорные реакции B_z и C_z :

$$C_z = \frac{F_{1z} \cdot 0,2 + F_{2z} \cdot 0,2}{1,4} = \frac{6732,8 \cdot 0,2 + 2926 \cdot 0,9}{1,4} = 2842,8 \text{ Н};$$

$$B_z = \frac{F_{1z} \cdot 1,6 - F_{2z} \cdot 0,5}{1,4} = \frac{6732,8 \cdot 1,6 - 2926 \cdot 0,5}{1,4} = 6649,6 \text{ Н}.$$

Эпюра M_y показана на рис. 14.15, д.

Из эпюр моментов следует, что опасным сечением является сечение D . Суммарный изгибающий момент в сечении D

$$M_{\text{сум}} = \sqrt{614,5^2 + 1421,4^2} = 1548,5 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Приведенный момент по третьей теории прочности

$$M_{\text{прив}} = \sqrt{1548,5^2 + 191^2} = 1560,2 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{прив}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1560,2 \cdot 10^2}{3,14 \cdot 8000}} = 5,82 \text{ см}.$$

Приведенный момент по четвертой теории прочности

$$M_{\text{прив}} = \sqrt{1548,5^2 + 0,75 \cdot 191^2} = 1557,3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1557,3 \cdot 10^2}{3,14 \cdot 8000}} = 5,82 \text{ см}.$$

Практически результаты по обеим теориям прочности одинаковы.

Проверим вал по условию жесткости:

$$\begin{aligned} \theta^\circ &= \frac{T \cdot 100}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{191 \cdot 10^2 \cdot 100 \cdot 180 \cdot 32}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 3,14^2 \cdot 5,8^4} = \\ &= 0,12 \text{ град/м} \left[\theta \right] = 0,15 \text{ град/м}. \end{aligned}$$

Принимаем $d = 5,8$ см.

Пример 14.5. Консольный стержень прямоугольного поперечного сечения нагружен в вертикальной плоскости силой $F_1 = 6,0$ кН; в горизонтальной плоскости - силой $F_2 = 5,6$ кН и в торцевом сечении B - парой сил с моментом 4 кН·м (рис. 14.16). Размеры поперечного сечения стержня: $b = 8$ см, $h = 12$ см. Материал - сталь, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа, допустимое напряжение $[\sigma] = 90$ МПа. Требуется проверить прочность стержня и определить угол поворота сечения B вокруг продольной оси. Проверку провести по третьей теории прочности.

Решение. Строим эпюры изгибающих и крутящих моментов:

$$M_z = -F_1 \cdot 0,8 = -6,0 \cdot 0,8 = -4,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y = -F_2 \cdot 1,4 = 5,6 \cdot 1,4 = -7,84 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T = m = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры показаны на рис. 14.16, *а, б, в*.

Из эпюр следует, что опасным является сечение в защемлении (рис. 14.16, *г*). В сечении действует $M_z = 4,8$ кН·м, $M_y = 7,84$ кН·м, $T = 4,0$ кН·м.

Чтобы проверить прочность стержня, необходимо в опасном сечении установить опасную точку, для которой вычислить по заданной теории прочности эквивалентное напряжение и сравнить его с допустимым.

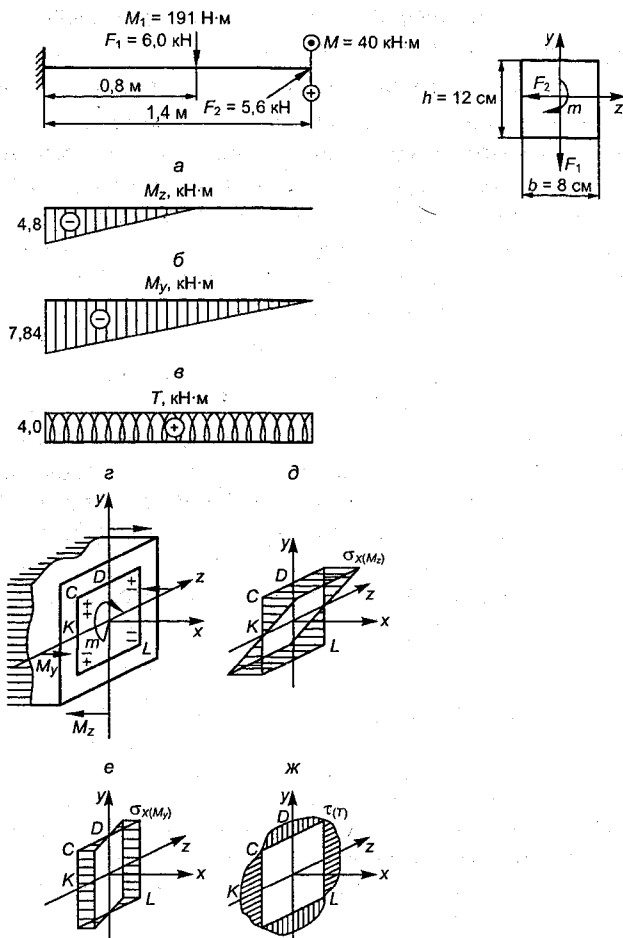


Рис. 14.16

Для определения опасной точки построим эпюры распределения нормальных и касательных напряжений в опасном сечении от изгибающих и крутящих моментов (рис. 14.16, д, е, ж).

Касательные напряжения от крутящего момента имеют максимальное значение в середине длинной стороны (точка K), в середине короткой стороны (точка D) касательные напряжения имеют меньшее значение. Касательные напряжения в точках K и D вычисляются по формулам для кручения брусков некруглого поперечного сечения (гл. 8, § 8.4).

Эпюры распределения напряжений показывают, что наибольшие нормальные напряжения σ_x и наибольшие касательные напряжения τ_x имеют место в разных точках сечения. Отсюда для нахождения опасной точки в сечении нужно вычислить эквивалентные напряжения в нескольких принимаемых за опасные точках. Такими могут быть три точки сечения.

Угловая точка С. В ней материал находится в линейном напряженном состоянии простого растяжения, равного сумме нормальных напряжений от изгибающих моментов M_z и M_y .

В *угловой точке L* материал находится также в линейном напряженном состоянии простого сжатия. Если материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, то прочность нужно проверять в обеих точках *С* и *L*.

В *точке К* в середине длинной стороны и *точке D* в середине короткой стороны прямоугольного сечения материал находится в плоском напряженном состоянии. В этих точках кроме нормальных напряжений от изгиба возникают касательные напряжения от кручения.

Проверим прочность материала в указанных точках *С*, *К*, *D*. Нормальные напряжения в точке *С* равны

$$\sigma_C = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{4,8 \cdot 10^5}{192} + \frac{7,84 \cdot 10^5}{128} = 8625 \text{ Н/см}^2 < [\sigma] = 9000 \text{ Н/см}^2;$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{8 \cdot 12^2}{6} = 192 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{12 \cdot 8^2}{6} = 128 \text{ см}^3.$$

Эквивалентное напряжение в точке *К* по третьей теории прочности

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экрв}(K)} &= \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_K}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{7,84 \cdot 10^5}{128}\right)^2 + 4\left(\frac{4 \cdot 10^5}{177,4}\right)^2} = 7606 \text{ Н/см}^2 < [\sigma] = 9000 \text{ Н/см}^2; \end{aligned}$$

$$W_K = \alpha_1 \cdot h \cdot b^2 = 0,231 \cdot 12 \cdot 8^2 = 177,4 \text{ см}^3.$$

По величине отношения $\frac{h}{b} = \frac{12}{8} = 1,5$ из табл. 8.2 находим $\alpha_1 = 0,231$; $\alpha_2 = 0,269$; $\beta = 0,196$.

Эквивалентное напряжение в точке D

$$\sigma_{\text{экв}(D)} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_k}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4,8 \cdot 10^5}{192}\right)^2 + 4\left(\frac{4 \cdot 10^5}{206,6}\right)^2} =$$

$$= 4609 \text{ Н/см}^2 < [\sigma] = 9000 \text{ Н/см}^2;$$

$$W_k = \alpha_2 \cdot h \cdot b^2 = 0,269 \cdot 12 \cdot 8^2 = 206,6 \text{ см}^3.$$

Таким образом, прочность стержня обеспечена. Наиболее опасной оказалась точка C , в которой материал находится в линейном напряженном состоянии.

Угол поворота сечения B относительно неподвижного сечения в защемлении будет

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_k} = \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 140}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 1204,2} = 0,0058 = 0,33^\circ;$$

$$I_k = \beta \cdot h \cdot b^3 = 0,196 \cdot 12 \cdot 8^3 = 1204,2 \text{ см}^4.$$

14.4. Расчет цилиндрических винтовых пружин растяжения - сжатия

Пружины представляют собой наиболее распространенный упругий элемент в машиностроении. Они используются в самых различных конструкциях как амортизаторы для смягчения толчков и ударов. В отдельных случаях они применяются как аккумуляторы упругой энергии для приведения в движение некоторых механизмов (защелки, предохранительные устройства, часовые механизмы и т.д.). В общем случае винтовая пружина может рассматриваться как пространственно изогнутый брус с осью, изогнутой по винтовой линии. В зависимости от вида рабочей нагрузки винтовые пружины делятся на пружины растяжения (рис. 14.17, *а*) и пружины сжатия (рис. 14.17, *б*).

Нагружение пружины производится, как правило, силами, направленными вдоль оси пружины. Зависимость перемещения пружины (осадки или удлинения) от осевой нагрузки F на-

зывается **характеристикой пружины**. Обычно пружины, применяемые в общем машиностроении, имеют линейную характеристику. Цилиндрическая винтовая пружина определяется следующими параметрами:

d - диаметр сечения проволоки пружины;

D - средний диаметр витка пружины;

n - число витков;

t_0 - зазор между витками;

α - угол подъема винтовой линии;

S - шаг пружины, связанный с углом подъема соотношением

$$S = \pi \cdot D \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Для пружин общего назначения шаг S значительно меньше длины витка $\pi \cdot D$, а угол подъема обычно составляет $5-10^\circ$. При определении числа витков добавляется 1,5 витка, необходимых для крепления пружины растяжения, а у пружины сжатия - для создания опорных поверхностей.

Рассмотрим цилиндрическую винтовую пружину, растягиваемую силами F , действующими вдоль оси пружины (рис. 14.18, *a*).

Для определения внутренних силовых факторов разсечем виток плоскостью I - I, перпендикулярной к оси проволоки, и рассмотрим равновесие отсеченной части.

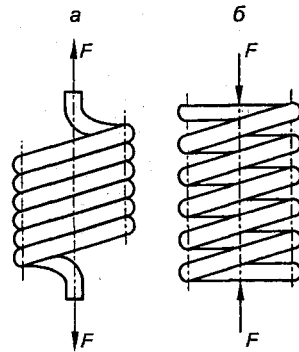


Рис. 14.17

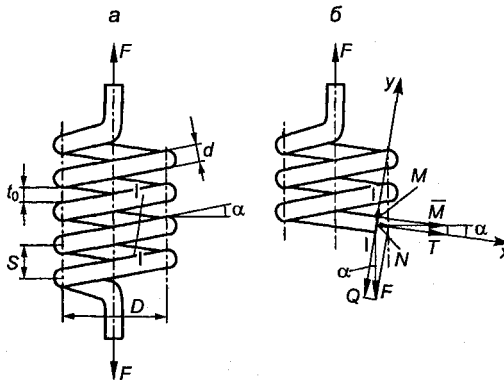


Рис. 14.18

Верхняя часть будет находиться в равновесии под действием внешней силы F и внутренних сил, возникающих в поперечном сечении витка. Из условия равновесия следует, что внутренние силы в сечении должны дать равнодействующую, направленную параллельно оси пружины, равную внешней силе F , и момент, уравнивающий момент, создаваемый внешней силой F относительно центра тяжести сечения:

$$M = F \cdot \frac{D}{2}.$$

Плоскость действия момента M образует с поперечным сечением витка угол α . На рис. 14.18, б момент представлен вектор-моментом \vec{M} . Раскладывая силу и момент на составляющие относительно осей, связанных с сечением, получим:

$$\begin{aligned} T &= M \cdot \cos \alpha = \frac{F \cdot D}{2} \cdot \cos \alpha; & Q &= F \cdot \cos \alpha; \\ M_{\text{изг}} &= M \cdot \sin \alpha = \frac{F \cdot D}{2} \cdot \sin \alpha; & N &= F \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (14.28)$$

Таким образом, проволока пружины работает на кручение, изгиб, сдвиг и растяжение, если это пружина растяжения, или на сжатие, если это пружина сжатия.

Так как угол подъема α - величина малая, то можно принять, что плоскость витка примерно лежит в плоскости, перпендикулярной к оси пружины, т.е. $\cos \alpha = 1,0$ и $\sin \alpha = 0$.

Тогда

$$T = F \cdot \frac{D}{2}; \quad M_{\text{изг}} = 0; \quad Q = F; \quad N = 0$$

и проволока пружины будет работать только на кручение и сдвиг.

Примем, что касательные напряжения от крутящего момента распределяются по поперечному сечению витка так же, как и при кручении прямого бруса круглого поперечного сечения (рис. 14.19, а), а касательные напряжения от поперечной силы распределяются по сечению равномерно (рис. 14.19, б).

Опасной является точка на контуре, в которой направление касательных напряжений совпадает (на рис. 14.19 точка B_1).

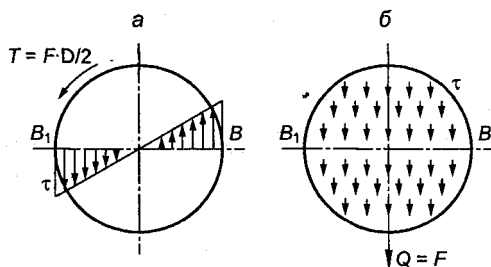


Рис. 14.19

Наибольшие касательные напряжения в сечении будут равны

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} + \frac{Q}{A} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \cdot \left(1 + \frac{d}{2D}\right). \quad (14.29)$$

Член в скобках представляет собой влияние поперечной силы на величину максимальных касательных напряжений.

На практике отношение $\frac{d}{2D}$ изменяется в пределах 1/20–1/40, что значительно меньше единицы. Поэтому в расчетах вторым слагаемым в скобках пренебрегают и считают, что проволока пружины работает только на кручение.

Тогда формула (14.29) примет вид

$$\tau_{\max} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}. \quad (14.30)$$

Из формулы (14.30) видно, что увеличение диаметра витка снижает, а увеличение диаметра проволоки увеличивает прочность пружины.

Когда диаметр проволоки соизмерим с диаметром витка, необходимо вводить поправку, учитывающую влияние кривизны витка на величину и распределения касательных напряжений. В этом случае наибольшие касательные напряжения будут определяться по более точной формуле

$$\tau_{\max} = k \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}. \quad (14.31)$$

где k – поправочный коэффициент, зависящий от индекса пружины D/d . Значение поправочного коэффициента может быть взято из табл. 14.1 или вычислено по формуле

$$k = \frac{4 \frac{D}{d} + 1}{4 \frac{D}{d} - 1} \quad (14.32)$$

Таблица 14.1

$\frac{D}{d}$	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Условие прочности для пружин записывается в виде

$$\tau_{\max} = k \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau], \quad (14.33)$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение на сдвиг.

Пружины изготавливаются из высококачественных сталей, для которых допускаемые напряжения равны $[\tau] = (200-800)$ МПа.

Для пружин, испытывающих переменные напряжения, допускаемые напряжения снижаются на 20-60 %. При определении перемещений (осадки или удлинения) пружины будем учитывать только кручение витков.

Обозначим через λ изменение длины пружины вдоль оси под действием внешней силы F . Зависимость перемещения λ от внешней нагрузки F найдем, приравняв потенциальную энергию деформации пружины U , вызванную кручением, работе W внешней силы F на перемещении λ , считая нагружение статическим.

Потенциальная энергия деформации при кручении равна

$$U = \frac{T^2 \cdot l}{2 \cdot GI_p} = \frac{F^2 \cdot D^2 \cdot \pi \cdot D \cdot n \cdot 32}{4 \cdot 2 \cdot G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{4 \cdot F^2 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}, \quad (14.34)$$

где $l = \pi Dn$ – длина проволоки пружины; G – модуль сдвига.

Работа внешней силы будет

$$W = \frac{F \cdot \lambda}{2}. \quad (14.35)$$

Приравнивая на основании закона сохранения энергии $U = W$, получим

$$\frac{F \cdot \lambda}{2} = \frac{4 \cdot F^2 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4},$$

откуда

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4}. \quad (14.36)$$

Так как в формуле (14.36) все величины, кроме F , постоянны, то зависимость λ от F будет линейной.

Усилие F , при котором перемещение равно единице (1 мм, 1 см и т.д.), называется **жесткостью пружины** и обозначается буквой C .

Из формулы (14.36) получим

$$\lambda = \frac{F}{\frac{Gd^4}{8D^3n}} = \frac{F}{C}, \quad (14.37)$$

где $C = \frac{Gd^4}{8D^3n}$ - жесткость пружины, выражаемая в Н/мм или в Н/см.

Из формул (14.36) и (14.37) следует, что увеличение числа витков n и диаметра витка D уменьшают жесткость, а увеличение диаметра проволоки d повышает жесткость пружины.

Пример 14.6. Подобрать сечение и число витков цилиндрической пружины, сжимаемой силой $F = 12$ кН. Отношение среднего диаметра D витков к диаметру проволоки d , из которой изготовлена пружина, $D/d = 8$. Осадка пружины под нагрузкой не более $\lambda = 100$ мм. Определить также высоту пружины в свободном состоянии, если минимальный зазор между витками под нагрузкой должен быть не менее $t_0 = 4$ мм. Допускаемое напряжение $[\tau] = 280$ МПа, модуль упругости $G = 0,85 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Определяем диаметр проволоки пружины из условия прочности (14.33):

$$k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau].$$

Для отношения $D/d = 8$ из табл. 14.1 находим значение поправочного коэффициента $k = 1,18$.

Подставляя значения величин в формулу, получим

$$1,18 \frac{8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 8}{3,14 \cdot d^2} = 28\,000,$$

откуда

$$d = \sqrt{\frac{1,18 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 8}{3,14 \cdot 28000}} = 3,2 \text{ см.}$$

Средний диаметр витка пружины

$$D = 3,2 \cdot 8 = 25,6 \text{ см.}$$

Число витков пружины находим по формуле для осадки (14.36):

$$n = \frac{\lambda G d^4}{8 F D^3} = \frac{10 \cdot 0,85 \cdot 10^7 \cdot 3,2^4}{8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 25,6^3} = 5,5.$$

Число витков пружины с учетом заделки концов будет

$$n = 5,5 + 1,5 = 7.$$

Для определения высоты пружины в свободном состоянии находим осадку одного витка пружины λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{n} = \frac{8 F D^3}{G d^4} = \frac{8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 25,6^3}{0,85 \cdot 10^7 \cdot 3,2^4} = 1,8 \text{ см.}$$

Шаг пружины в свободном состоянии

$$S = d + \lambda_0 + t_0 = 3,2 + 1,8 + 0,4 = 5,4 \text{ см.}$$

Высота пружины в свободном состоянии

$$h = S \cdot n = 5,4 \cdot 7 = 37,8 \approx 38 \text{ см.}$$

Пример 14.7. Определить наибольшее касательное напряжение в пружине клапанного механизма, а также начальное усилие F_0 , с которым клапан прижимается к седлу. Средний диаметр витков пружины $D = 6$ см, диаметр проволоки пружины $d = 1,2$ см, число витков $n = 12$. Клапан открывается при сжатии пружины на 1,0 см; предварительное сжатие пружины при закрытом клапане 1,8 см. В свободном состоянии зазор между витками пружины равен 0,6 см.

Решение. Осадка пружины при начальном усилии F_0 равна $\lambda_0 = 1,8$ см. Из формулы (14.36) для осадки пружины найдем

$$F_0 = \frac{\lambda_0 G d^4}{8 n D^3} = \frac{1,8 \cdot 0,85 \cdot 10^7 \cdot 1,2^4}{8 \cdot 12 \cdot 6^3} = 1527 \text{ Н.}$$

Осадка пружины при открывании клапана

$$\lambda = 1,8 + 1,0 = 2,8 \text{ см.}$$

Усилие F , сжимающее пружину, будет

$$F = \frac{\lambda G d^4}{8 D^3 n} = \frac{2,8 \cdot 0,85 \cdot 10^7 \cdot 1,2^4}{8 \cdot 12 \cdot 6^3} = 2377 \text{ Н.}$$

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = k \frac{8 F D}{\pi d^3} = 1,31 \frac{8 \cdot 2376 \cdot 6}{3,14 \cdot 1,2^3} = 24535 \text{ Н/см}^2 = 245 \text{ МПа.}$$

Зазор между витками пружины после открытия клапана

$$t = \frac{0,6 \cdot 12 - 1,8 - 1,0}{12} = 0,37 \text{ см} = 3,7 \text{ мм.}$$

Пример 14.8. Две пружины закреплены концами B и C на неподатливых опорах. Между пружинами помещается нагрузочная плита, жестко скрепленная с внутренними концами пружин. Через плиту на пружины передается осевая нагрузка $F = 1800$ Н. Не учитывая вес плиты, определить, как распределяется нагрузка между пружинами, если верхняя пружина имеет средний диаметр витка $D_1 = 6$ см, диаметр проволоки $d_1 = 0,8$ см, число витков $n_1 = 8$; нижняя – соответственно $D_2 = 10$ см, $d_2 = 1,0$ см, $n_2 = 5$, $G = 0,85 \cdot 10^7$ Н/см². Также определить вертикальное перемещение плиты и максимальные касательные напряжения в пружинах (рис. 14.20).

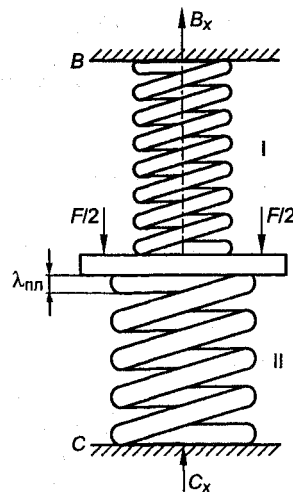


Рис. 14.20

Решение. Обозначим реакции опор через B_x и C_x и составим уравнение равновесия

$$B_x + C_x - F = 0. \quad (a)$$

Так как по условию опоры неподатливые и расстояние между ними постоянное, то уравнение перемещений будет иметь следующий вид:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad (б)$$

где λ_1 и λ_2 - соответственно растяжение первой пружины и сжатие второй.

Уравнение (б) можно выразить, рассматривая нижнюю опору C как лишнюю связь (см. § 9.1) или рассматривая перемещение нагрузочной плиты, что мы и сделаем.

$$\frac{8(F - C_x)D_1^3 n_1}{Gd_1^4} - \frac{8(F - B_x)D_2^3 n_2}{Gd_2^4} = 0. \quad (в)$$

Приняв, согласно (а), $F - C_x = B_x$, или $F - B_x = C_x$, найдем C_x или B_x .

$$\frac{8(F - C_x)D_1^3 n_1}{Gd_1^4} - \frac{8C_x D_2^3 n_2}{Gd_2^4} = 0. \quad (г)$$

Откуда

$$C_x = \frac{FD_1^3 n_1 d_2^4}{D_2^3 n_2 d_1^4 + D_1^3 n_1 d_2^4} = \frac{1800 \cdot 6^3 \cdot 8 \cdot 1^4}{10^3 \cdot 5 \cdot 0,8 + 6^3 \cdot 8 \cdot 1^4} = 543 \text{ Н};$$

$$B_x = 1800 - 543 = 1257 \text{ Н}.$$

Перемещение нагрузочной плиты происходит под действием силы $F - B_x = C_x$.

$$\lambda_{\text{пл}} = \frac{8(F - B_x)D_2^3 n_2}{Gd_2^4} = \frac{8 \cdot 543 \cdot 10^3 \cdot 5}{0,85 \cdot 10^7 \cdot 1^4} = 2,6 \text{ см}.$$

Максимальные касательные напряжения в пружинах будут такими:

$$\frac{D_1}{d_1} = 7,5; K_1 = 1,2; \frac{D_2}{d_2} = 10; K_2 = 1,14 \text{ (табл. 14.1);}$$

$$\tau_1 = K_1 \frac{8B_x D_1}{\pi d_1^3} = 1,2 \frac{8 \cdot 1257 \cdot 6}{3,14 \cdot 0,8^3} = 44971 \text{ Н/см}^2 = 450 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = K_2 \frac{8C_x D_2}{\pi d_2^3} = 1,14 \frac{543 \cdot 10}{3,14 \cdot 1^3} = 15771 \text{ Н/см}^2 = 158 \text{ МПа}.$$

14.5. Внецентренное растяжение и сжатие брусьев большой жесткости

Внецентренным растяжением или **сжатием** называется такой вид нагружения, при котором под действием внецентренно приложенной продольной внешней нагрузки в поперечных сечениях бруса одновременно действуют *нормальная растягивающая* или *сжимающая сила* и *изгибающий момент*. Этот вид нагружения получается тогда, когда равнодействующая внешних сил смещена относительно центра тяжести поперечного сечения и направлена параллельно оси бруса.

Пусть на брус произвольного поперечного сечения в точке B координатами z_F и y_F относительно главных осей сечения z , y действует сила F , являющаяся равнодействующей всех внешних сил (рис. 14.21).

Координаты z_F и y_F точки приложения силы F называются **эксцентриситетами** этой силы относительно главных осей сечения, а точка B приложения силы F называется **полюсом** или **центром давления**.

Перенеся силу F в центр тяжести сечения O , получим центральную растягивающую силу F и два момента относительно осей z и y (рис. 14.22):

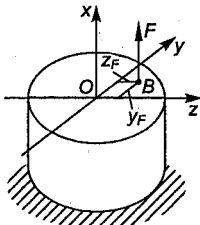


Рис. 14.21

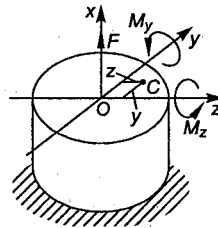


Рис. 14.22

$$M_z = Fy_F; M_y = Fz_F. \quad (14.38)$$

Таким образом, внецентренное растяжение (сжатие) приводится к центральному растяжению (сжатию) и изгибу в плоскостях xz и xy . В любом поперечном сечении бруса будет действовать нормальная сила, равная F , и изгибающие моменты, равные внешним моментам M_z и M_y . Нормальное напряжение в произвольной точке C с координатами z, y на основании принципа независимости действия сил равно сумме напряжений от нормальной силы и изгибающих моментов:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}, \quad (14.39)$$

или, заменяя M_z и M_y их значениями, получим

$$\sigma = F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y}{I_z} + \frac{z_F z}{I_y} \right). \quad (14.40)$$

В формулу (14.40) все величины подставляются со своими знаками: растягивающая сила F - со знаком плюс, сжимающая - со знаком минус, координаты y_F, y, z_F, z - с соответствующими своими знаками.

Из формулы (14.40) следует, что нормальные напряжения в сечении изменяются по линейному закону, а эпюра напряжений представляет собой плоскость. Таким образом, максимальные напряжения будут возникать в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, уравнение которой получим, приравняв к нулю (14.40):

$$F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y}{I_z} + \frac{z_F z}{I_y} \right) = 0.$$

Так как $F \neq 0$, то уравнение нейтральной линии будет

$$\frac{1}{A} + \frac{y_F y}{I_z} + \frac{z_F z}{I_y} = 0. \quad (14.41)$$

Положение нейтральной линии на поперечном сечении удобно находить через отрезки y_0 и z_0 , отсекаемые ею на осях y ,

z , определить которые можно, преобразовав уравнение (14.41) к виду уравнения в отрезках:

$$\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1,$$

$$\frac{y}{\frac{I_z}{Ay_F}} + \frac{z}{\frac{I_y}{Az_F}} = 1, \quad (14.42)$$

где $y_0 = -\frac{I_z}{Ay_F}$ и $z_0 = -\frac{I_y}{Az_F}$ - отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях y и z (рис. 14.23).

Из уравнений (14.41) и (14.42) следует:

а) при внецентренном растяжении и сжатии нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения;

б) положение нейтральной линии не зависит от величины и знака внешней нагрузки F ;

в) нейтральная линия и полюс располагаются по разные стороны от центра тяжести сечения;

г) нейтральная линия может как пересекать сечение, так и располагаться за его пределами.

Когда нейтральная линия пересекает сечение, в нем возникают растягивающие и сжимающие напряжения, когда она проходит за пределами сечения - напряжения в нем будут одного знака.

Из выражений для z_0 и y_0 видно, что чем ближе к центру тяжести располагается полюс, тем дальше от центра тяжести располагается нейтральная линия, и наоборот. Когда полюс совпадает с центром тяжести сечения, нейтральная линия уходит в бесконечность. В этом случае напряжения в сечении распределяются равномерно.

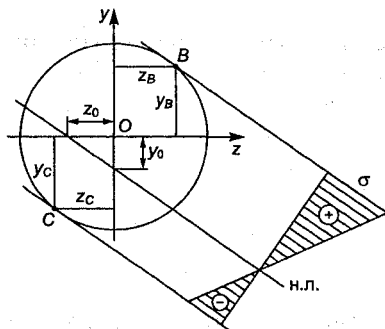


Рис. 14.23

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения наиболее удаленных от нейтральной линии. Поэтому для определения положения опасных точек необходимо построить нейтральную линию, затем провести параллельно ей касательные к контуру сечения, которые и определяют искомые точки B и C в растянутой и сжатой зонах сечения (см. рис. 14.23).

Условия прочности примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max p} = \sigma_B &= F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y_B}{I_z} + \frac{z_F z_B}{I_y} \right) \leq [\sigma]_p, \\ \sigma_{\max c} = \sigma_C &= F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y_C}{I_z} + \frac{z_F z_C}{I_y} \right) \leq [\sigma]_c,\end{aligned}\tag{14.43}$$

где y_B, z_B и y_C, z_C - координаты опасных точек B и C ; $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_c$ - допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

Для сечений, имеющих две оси симметрии, опасными будут точки, наиболее удаленные от осей симметрии. В этом случае условие прочности удобно записывать в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\max p} &= \frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]_p, \\ \sigma_{\max c} &= \left| \frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right| \leq [\sigma]_c.\end{aligned}\tag{14.44}$$

Формулы (14.43) и (14.44) справедливы и при действии сжимающей силы F при условии отсутствия продольного изгиба, т.е. когда опасным состоянием является наступление текучести, а не потеря устойчивости.

Как отмечалось, напряжения в поперечном сечении будут одного знака, если нейтральная линия располагается за контуром сечения или, в крайнем случае, касается контура сечения. Для этого сила F должна находиться в определенной области в окрестности центра тяжести. Эта область называется **ядром сечения**. Если точка приложения силы располагается внутри ядра сечения, то напряжение во всех точках сечения будет одного знака. Если точка приложения силы окажется за пределами ядра сечения, то нейтральная линия пересечет сечение и в нем одновременно будут действовать растягивающие и сжимающие напряжения. Если точка приложения силы будет располагать-

ся на границе ядра сечения, то нейтральная линия будет касаться контура сечения.

Отсюда ядром сечения называется область, расположенная вокруг центра тяжести поперечного сечения, обладающая тем свойством, что внешняя нагрузка, приложенная в любой ее точке, вызывает во всех точках сечения напряжения одного знака.

Рассмотрим поперечное сечение, на котором прямая $n - n$ является нейтральной линией, соответствующей полюсу B (рис. 14.24).

Координаты любой точки C , лежащей на нейтральной линии, удовлетворяют уравнению нейтральной линии:

$$\frac{1}{A} + \frac{y_F(-y_C)}{I_z} + \frac{z_F(-z_C)}{I_y} = 0. \quad (14.45)$$

Из уравнения (14.45) видно, что если точку C принять за полюс, то нейтральная линия пройдет через точку B . При перемещении полюса по прямой $n - n$ нейтральная линия будет вращаться вокруг точки B . Отсюда вытекает простое **правило** для построения ядра сечения: *необходимо последовательно размещать полюс в характерных точках контура сечения (например, в вершинах углов) и для каждого полюса находить положение нейтральной линии. Зона, ограниченная нейтральными линиями, будет представлять собой ядро сечения.* В том случае, когда сечение имеет внутренние углы, например угол D (рис. 14.25), эти узлы при обходе контура из рассмотрения исключаются, так как через точку D нельзя провести нейтральную линию, чтобы она не пересекла сечение.

Пример 14.9. Стойка П-образного сечения (рис. 14.26, а) нагружена продольной сжимающей силой $F = 350$ кН. Опреде-

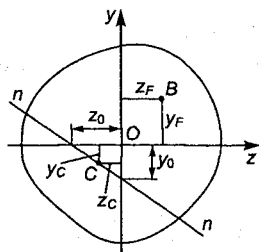


Рис. 14.24

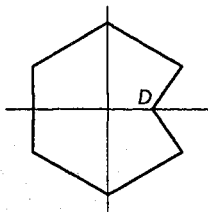


Рис. 14.25

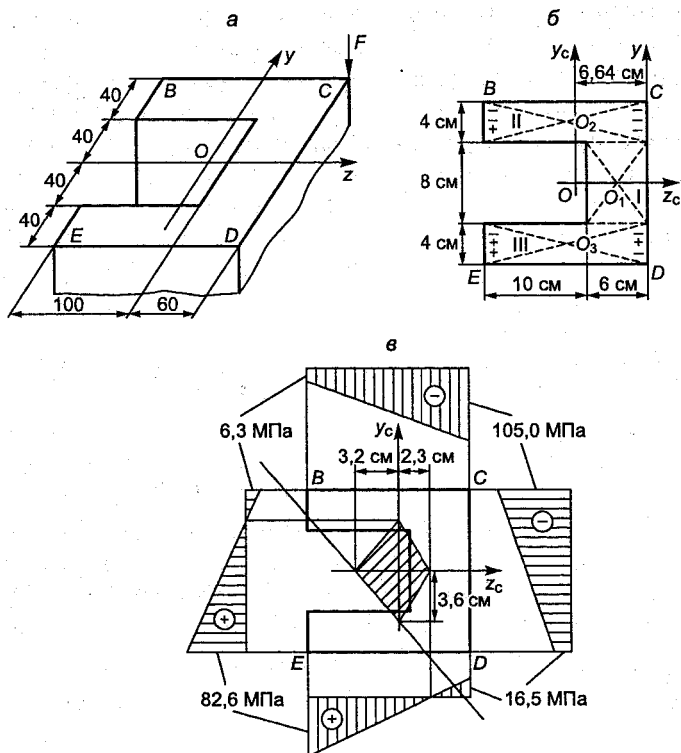


Рис. 14.26

лить положение нейтральной линии, построить эпюры нормальных напряжений для контурных точек сечения.

Решение. Ось z , как ось симметрии, является главной центральной осью сечения z_c . Вторая главная центральная ось y_c проходит через центр тяжести сечения O перпендикулярно к оси z_c . Вспомогательную ось y примем совпадающей с контуром сечения. Разобьем сечение на три прямоугольника и определим положение центра тяжести сечения O относительно оси y (рис. 14.26, б).

$$z_c = \frac{8 \cdot 6 \cdot (-3) + 4 \cdot 16 \cdot (-8) \cdot 2}{8 \cdot 6 + 4 \cdot 16 \cdot 2} = -6,64 \text{ см};$$

$$A = 8 \cdot 6 + 4 \cdot 16 \cdot 2 = 176 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_c} = \frac{8 \cdot 6^3}{12} + 8 \cdot 6 \cdot (6,64 - 3)^2 + 2 \frac{4 \cdot 16^3}{12} + 2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot (8 - 6,64)^2 = 3747,4 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c} = \frac{6 \cdot 8^3}{12} + 2 \frac{16 \cdot 4^3}{12} + 2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 6^2 = 5034,7 \text{ см}^4.$$

Напряжения в точках сечения определим по формуле (14.39), в данном случае сила F вызывает сжатия во всех квадрантах. Момент

$$M_z = Fy_F = 350 \cdot 10^3 \cdot 8 = 28 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}$$

в первом и втором квадрантах вызывает сжатие, в третьем и четвертом – растяжение; момент

$$M_y = Fz_c = 350 \cdot 10^3 \cdot 6,64 = 23,2 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}$$

вызывает сжатие в первом и четвертом квадрантах, растяжение – во втором и третьем.

Подставляя соответствующие величины в формулу (14.39), найдем искомые напряжения:

$$\sigma_C = -\frac{350 \cdot 10^3}{176} - \frac{28 \cdot 10^5 \cdot 8}{5034,7} - \frac{23,2 \cdot 10^5 \cdot 6,64}{3747,4} = -10548,5 \text{ Н/см}^2 = -105 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = -\frac{350 \cdot 10^3}{176} + \frac{28 \cdot 10^5 \cdot 8}{5034,7} - \frac{23,2 \cdot 10^5 \cdot 6,64}{3747,4} = -1650,3 \text{ Н/см}^2 = -16,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_E = -\frac{350 \cdot 10^3}{176} + \frac{28 \cdot 10^5 \cdot 8}{5034,7} + \frac{23,2 \cdot 10^5 \cdot 6,64}{3747,4} = 8255 \text{ Н/см}^2 = 82,5 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned}\sigma_B &= -\frac{350 \cdot 10^3}{176} - \frac{28 \cdot 10^5 \cdot 8}{5034,7} + \frac{23,2 \cdot 10^5 \cdot 6,64}{3747,4} = \\ &= -643,0 \text{ Н/см}^2 = -6,3 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Положение нейтральной линии определим, используя формулу (14.42):

$$\begin{aligned}y_0 &= -\frac{I_z}{Ay_F} = -\frac{5034,7}{176 \cdot 8} = -3,6 \text{ см;} \\ z_0 &= -\frac{I_z}{Az_F} = -\frac{3747,4}{176 \cdot 6,64} = -3,2 \text{ см.}\end{aligned}$$

Эпюра напряжений и положение нейтральной линии показаны на рис. 14.26, в.

Определим размеры и форму ядра сечения, располагая последовательно полюс в точках $BCDE$:

$$y_0^C = -\frac{5034,7}{176 \cdot 8} = -3,6 \text{ см;} \quad z_0^C = -\frac{3747,4}{176 \cdot 6,64} = -3,2 \text{ см;}$$

$$y_0^D = -\frac{5034,7}{176 \cdot (-8)} = 3,6 \text{ см;} \quad z_0^D = -\frac{3747,4}{176 \cdot 6,64} = -3,2 \text{ см;}$$

$$y_0^E = -\frac{5034,7}{176 \cdot (-8)} = 3,6 \text{ см;} \quad z_0^E = -\frac{3747,4}{176 \cdot (-9,36)} = 2,3 \text{ см;}$$

$$y_0^B = -\frac{5034,7}{176 \cdot 8} = -3,6 \text{ см;} \quad z_0^B = -\frac{3747,4}{176 \cdot (-9,36)} = 2,3 \text{ см.}$$

Форма и размеры ядра сечения показаны на рис. 14.26, в.

14.6. Изгиб с растяжением (сжатием)

На практике такой вид нагружения имеет место при совместном действии на балку поперечных и продольных сил (рис. 14.27, а) или действии наклонных сил, которые можно разложить на составляющие нормальные к оси и продольные силы, растягивающие или сжимающие балку (рис. 14.27, б).

Следует отметить, что при действии продольной сжимающей силы определять напряжения, используя принцип суперпозиции, можно только для балок небольшой длины, имеющих большую жесткость на изгиб, когда прогибы от поперечной нагрузки малы и незначительно изменяют направление линии действия продольной силы. В случае тонких длинных стержней прогибы могут быть значительными. Тогда продольные силы будут создавать до-

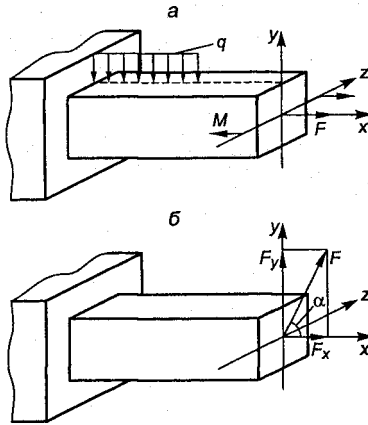


Рис. 14.27

полнительные изгибающие моменты в балке, приводящие к потере устойчивости. В данном параграфе рассматриваются только сравнительно жесткие, короткие стержни, для которых потеря устойчивости невозможна. При действии продольных и поперечных нагрузок в общем случае в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты M_z и M_y относительно главных осей y и z , поперечные силы Q_z и Q_y и продольная сила N . Суммарные нормальные напряжения в произвольном сечении в любой точке C получаются сложением напряжений, вызванных изгибом и растяжением или сжатием стержня:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}, \quad (14.46)$$

где y и z - координаты рассматриваемой точки.

В формуле (14.46) знаки перед членами обычно принимают в соответствии со знаками напряжений, возникающих в каждом квадранте сечения стержня под действием моментов M_z и M_y и продольной силы N . Пренебрегая, как и в расчетах на изгиб, касательными напряжениями от поперечных сил, в опасных точках будем иметь линейное напряженное состояние, и условие прочности примет вид:

$$\sigma_{\max p} = \frac{N}{A} + \frac{M_z y_D}{I_z} + \frac{M_y z_D}{I_y} \leq [\sigma]_p; \quad (14.47)$$

$$\sigma_{\max c} = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_z y_K}{I_z} + \frac{M_y z_K}{I_y} \right| \leq [\sigma]_c,$$

где y_D и z_D , y_K и z_K - координаты опасной точки; $[\sigma]_p$ и $[\sigma]_c$ - допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

Если сечение имеет две оси симметрии, то опасными являются угловые точки в зонах растяжения и сжатия, и условие прочности запишется так:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (14.48)$$

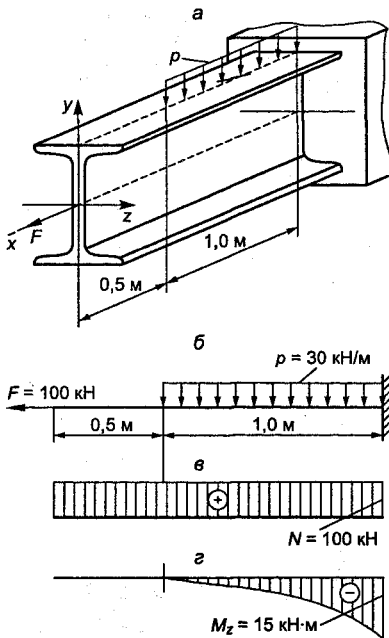


Рис. 14.28

При расчете брусков с поперечным сечением произвольной формы для определения положения опасной точки необходимо построить нейтральную линию способом, изложенным при рассмотрении внецентренного растяжения и сжатия, затем провести параллельно нейтральной линии касательные к контуру сечения. Точки касания определяют координаты опасной точки.

Пример 14.10. Определить требуемый номер профиля двутавра, нагруженного продольной силой $F = 100 \text{ кН}$ и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $p = 30 \text{ кН/м}$ (рис. 14.28, а). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение. Составляем расчетную схему, представлен-

ную на рис. 14.28, б. Брус работает на растяжение и поперечный изгиб.

Эпюры нормальных сил и изгибающих моментов представлены на рис. 14.28, в, г. Из эпюр видно, что опасным является сечение в заделке.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma].$$

Предварительно, не учитывая продольную силу, подбираем профиль двутавра по максимальной величине изгибающего момента:

$$\begin{aligned} W_z &= \frac{M_{z \max}}{[\sigma]} = \frac{15 \cdot 10^5}{16\,000} = \\ &= 93,75 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Из таблицы сортамента прокатной стали принимаем двутавр № 16 $W_z = 109 \text{ см}^3$, $A = 20,2 \text{ см}^2$. Производим проверку напряжений с учетом нормальной силы:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{100 \cdot 10^3}{20,2} + \frac{15 \cdot 10^5}{109} = \\ &= 18712 \text{ Н/см}^2 = 187 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Перенапряжение

$$\Delta = \frac{18\,712 - 16\,000}{16\,000} 100\% = 17\%,$$

что недопустимо, так как больше $[\sigma]$ на 17%. Принимаем двутавр № 18 $W_z = 143 \text{ см}^3$, $A = 23,4 \text{ см}^2$ и снова проверяем напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{100 \cdot 10^3}{23,4} + \frac{15 \cdot 10^5}{143} = 14\,763 \text{ Н/см}^2 = 148 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение составляет

$$\Delta = \frac{16000 - 14763}{16000} 100\% = 7,7\% > 5\%.$$

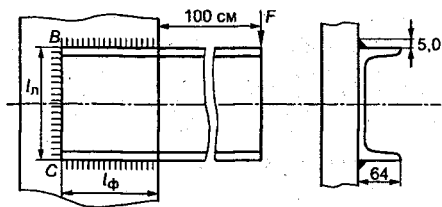


Рис. 14.29

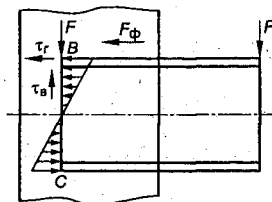


Рис. 14.30

Но так как промежуточного профиля нет, то принимаем окончательно двутавр № 18.

Пример 14.11. Рассчитать комбинированное сварное соединение швеллера № 16 с колонной, равнопрочное основному металлу при изгибе (рис. 14.29), если допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 160$ МПа, допускаемое напряжение металла сварного шва на срез $[\tau_s] = 0,65 \cdot [\sigma]$. Катет шва принять равным толщине стенки швеллера: $\beta = 0,7$.

Решение. Определяем допускаемый момент M в швеллере. Из сортамента для швеллера № 16 находим $W_z = 93,4$ см³; $A = 18,1$ см²; $h = 160$ мм; $b = 64$ мм. Толщина стенки $\delta = 5,0$ мм.

$$M = [\sigma] W_z = 16000 \cdot 93,4 = 1494,4 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{см.}$$

Максимальная нагрузка F будет

$$F = \frac{M}{l} = \frac{1494400}{100} = 19944 \text{ Н.}$$

Определим напряжения в сварных швах от силы F . Считается, что поперечная сила воспринимается только швами, параллельными силе, и напряжения по наименьшему сечению угловых швов распределяются равномерно (рис. 14.30):

$$\tau_b = \frac{F}{0,7Kh} = \frac{19944}{0,7 \cdot 0,5 \cdot 16} = 35,6 \text{ МПа} < [\tau_s] = 0,65 \cdot 160 = 104 \text{ МПа.}$$

Следовательно, для сопротивления силе F одного лобового шва достаточно.

В точке B (крайняя точка лобового шва) будут действовать напряжения τ_b и τ_r от внешнего изгибающего момента. Условие прочности имеет следующий вид:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_B^2 + \tau_T^2} \leq [\tau_3].$$

Откуда

$$\tau_T = \sqrt{[\tau_3]^2 - \tau_B^2} = \sqrt{104^2 - 35,6^2} = 97,72 \text{ МПа.}$$

Момент M уравнивается моментом пары сил $M_{л}$, действующих по наименьшему сечению лобового шва, и моментом пары сил M_{ϕ} , действующих по наименьшему сечению в фланговых швах.

Момент в лобовом шве при $K = 0,5$ см равен

$$M_{л} = \tau_T W_{zл} = 9772 \frac{0,7 \text{ КН}^2}{6} = 9772 \frac{0,7 \cdot 0,5 \cdot 16^2}{6} = 145928,5 \text{ Н} \cdot \text{см.}$$

Момент пары сил во фланговых швах

$$M_{\phi} = M - M_{л} = 1494400 - 1459285 = 1348471,5 \text{ Н} \cdot \text{см.}$$

Усилие, приходящееся на один фланговый шов:

$$Q_{\phi} = \frac{M_{\phi}}{h+K} = \frac{1348471,5}{16+0,5} = 81725,5 \text{ Н.}$$

Требуемая длина флангового шва

$$l_{\phi} = \frac{Q_{\phi}}{[\tau_3] \cdot 0,7 \cdot 0,5} = \frac{81725,5}{10400 \cdot 0,7 \cdot 0,5} = 22,5 \text{ см.}$$

Принимаем длины фланговых швов $l_{\phi} = 23$ см.

Пример 14.12. Стальной кронштейн толщиной $\delta = 14$ мм присоединен к стойке четырьмя болтами, расположенными по вертикальной линии (рис. 14.31). Сила, действующая на кронштейн, $F = 20$ кН. Определить диаметр болта для двух случаев: а) когда болты поставлены в отверстия без зазора; б) когда болты поставлены с зазором. Также проверить прочность кронштейна. Допускаемые напряжения для материала болтов: на растяжение $[\sigma] = 14000 \text{ Н/см}^2$; на срез $[\sigma_{ср}] = 9000 \text{ Н/см}^2$; на смятие $[\sigma_{см}] = 20000 \text{ Н/см}^2$; для материала кронштейна $[\sigma] = 16000 \text{ Н/см}^2$. Коэффициент трения между кронштейном и стойкой $f = 0,2$; коэффициент запаса по сдвигу деталей $K_1 = 1,4$.

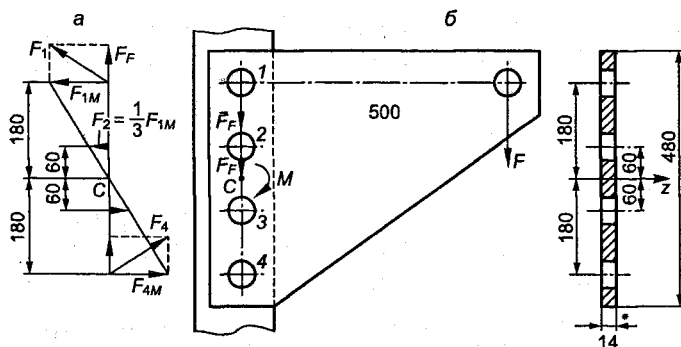


Рис. 14.31

Решение. Перенесем силу F в центр тяжести болтового соединения - точку C . Получим силу $F = 20$ кН и момент, равный $M = Fh = 20 \cdot 10^3 \cdot 50 = 10 \cdot 10^5$ Н·см.

Усилия, действующие на болты от момента M , будут пропорциональны расстоянию центра тяжести сечения болта до точки C и направлены перпендикулярно к радиусу. Составляя уравнение моментов относительно точки C , найдем усилие, приходящееся на каждый болт (рис. 14.31, а). Так как $F_{1M} = F_{4M}$ и $F_{2M} = F_{3M}$, то

$$\sum m_C = \left(18F_{1M} + \frac{1}{3}F_{1M}6 \right) 2 - M = 0.$$

Откуда $F_{1M} = 25\,000$ Н, $F_{2M} = 8333$ Н.

На каждый болт будет действовать еще усилие от сдвигающей силы F . Считая, что сила F равномерно распределяется между болтами, получим

$$F_F = \frac{F}{4} = \frac{20000}{4} = 5000 \text{ Н.}$$

Максимальная суммарная сила, равная геометрической сумме сил F_M и F_F , будет у болтов 1 и 4:

$$F_1 = F_4 = \sqrt{F_{1M}^2 + F_F^2} = \sqrt{25\,000^2 + 5\,000^2} = 25,5 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Когда болт поставлен без зазора, сила воспринимается телом болта (затяжка болта нагрузки не несет). Диаметр болта оп-

ределяется из условия прочности на срез и смятие (формулы (10.3), (10.6)). Расчет ведется по наибольшей суммарной силе:

$$d = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi n K [\tau]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 25,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1 \cdot 19000}} = 1,9 \text{ см.}$$

Принимаем наружный диаметр болта $d = 20 \text{ мм}$.

Проверяем прочность на смятие:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F_1}{d\delta} = \frac{25,5 \cdot 10^3}{2,0 \cdot 1,4} = 9107 \text{ Н/см}^2 < [\sigma_{\text{см}}] = 20\,000 \text{ Н/см}^2.$$

Когда болт поставлен с зазором, силу затяжки находим по формуле (10.11), принимая $F = F_1 = 25,5 \cdot 10^3 \text{ Н}$; $f = 0,2$; $K_1 = 1,4$; $K = 1$:

$$F_{\text{зат}} = \frac{K_1 F_1}{K f} = \frac{1,4 \cdot 25,5 \cdot 10^3}{0,2} = 175 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Диаметр болта находим по формуле (10.16):

$$d_1 = \sqrt{\frac{5,2 F_{\text{зат}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt{\frac{5,2 \cdot 175 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 14000}} = 4,5 \text{ см} = 45 \text{ мм.}$$

Этому значению d_1 удовлетворяет болт М48.

Таким образом, когда болт поставлен с зазором, его размеры значительно увеличиваются, соединение получается металлоемким, кроме того, сложно обеспечить требуемую затяжку болтов. Для данной конструкции постановка болтов с зазором нецелесообразна, более рационально поставить болты без зазора.

Проверим кронштейн на прочность при изгибе по сечению, ослабленному четырьмя отверстиями.

Момент инерции ослабленного сечения относительно оси z

$$I_z = \frac{1,4 \cdot 48^3}{12} - 2 \left(\frac{1,4 \cdot 2,0^3}{12} + 1,4 \cdot 2,0 \cdot 18^2 \right) - 2 \left(\frac{1,4 \cdot 2,0^3}{12} + 1,4 \cdot 2,0 \cdot 6^2 \right) = 10883 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления

$$W_z = \frac{10\,883}{0,5 \cdot 48} = 453 \text{ см}^3.$$

Наибольшее напряжение при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{10 \cdot 10^5}{453} = 2\,208 \text{ Н/см}^2 < [\sigma] = 16\,000 \text{ Н/см}^2.$$

Прочность кронштейна достаточна.

14.7. Изгиб плоских кривых брусьев

Кривым бруском называется брус, у которого осевая линия является кривой. Кривые брусья бывают малой и большой кривизны. Если высота поперечного сечения меньше 0,2 радиуса кривизны ρ оси бруса, то считают, что брус имеет малую кривизну; если высота поперечного сечения больше 0,2 радиуса кривизны ρ оси бруса, то считают, что брус имеет большую кривизну (рис. 14.32).

Расчет брусьев *малой кривизны* с достаточной для практики точностью может проводиться по формулам, полученным для прямых брусьев. Например, подсчеты максимальных напряжений по этим формулам для бруса прямоугольного поперечного сечения при $h/\rho = 0,2$ дают разницу в 7 % по сравнению с напряжениями, вычисленными по точным формулам; при уменьшении отношения погрешность резко уменьшается.

Рассчитывать брусья *большой кривизны* по формулам для прямых брусьев нельзя. К брусьям большой кривизны относятся грузоподъемные крюки, звенья цепей, проушины (рис. 14.33) и т.д.

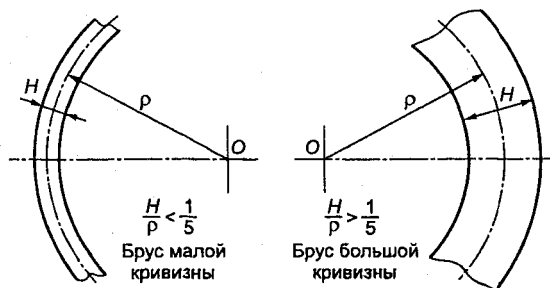


Рис. 14.32

При расчете брусев большой кривизны принимаются следующие допущения:

- а) геометрическая ось бруса представляет плоскую кривую;
- б) внешние нагрузки действуют в плоскости кривизны оси бруса;

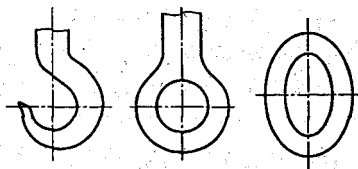


Рис. 14.33

в) поперечные сечения бруса симметричны относительно оси, лежащей в плоскости кривизны оси бруса (рис. 14.34).

Принятые допущения позволяют считать, что после нагружения ось бруса остается также плоской кривой.

Рассмотрим участок бруса большой кривизны постоянного поперечного сечения, нагруженный моментами m (рис. 14.35, а).

Исследования показывают, что к брусам большой кривизны при чистом изгибе применима гипотеза плоских сечений – поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации, и допущение об отсутствии давления продольных волокон друг на друга. Таким образом, материал бруса при чистом изгибе испытывает одноосное напряженное состояние (рис. 14.35, б).

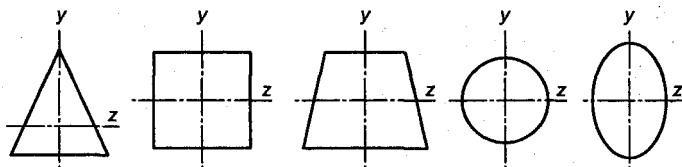


Рис. 14.34

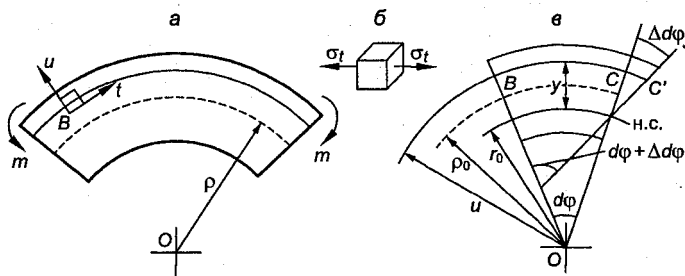


Рис. 14.35

Выделим из бруса двумя близкими сечениями, перпендикулярными к оси, элементарный участок бруса (рис. 14.35, в).

Обозначим через ρ_0 - радиус кривизны оси бруса; r_0 - радиус кривизны нейтрального слоя; O - центр кривизны.

Величина r_0 , как будет показано в дальнейшем, всегда меньше ρ_0 , и нейтральная линия смещается относительно центра тяжести сечения к центру кривизны.

Под действием изгибающих моментов одно сечение относительно другого повернется на некоторый угол $\Delta d\varphi$ вокруг нейтральной линии, в результате поворота сечения волокна получат соответствующие деформации.

Относительное удлинение волокна BC , расположенного на расстоянии u от нейтрального слоя, равно

$$\varepsilon_t = \frac{CC'}{BC} = \frac{y\Delta d\varphi}{u d\varphi} = \frac{(u-r_0)\Delta d\varphi}{u d\varphi}, \quad (14.49)$$

где u - расстояние волокна BC от центра кривизны.

Так как материал испытывает линейное напряженное состояние, то, применяя закон Гука при растяжении, получим выражения для напряжения, возникающего в волокне:

$$\sigma_t = E \frac{(u-r_0)\Delta d\varphi}{u u d\varphi}. \quad (14.50)$$

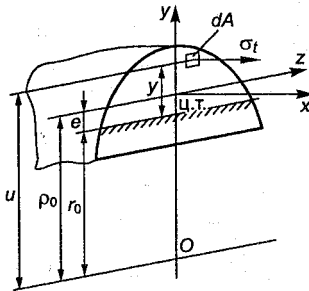


Рис. 14.36

Чтобы получить зависимость напряжения от изгибающего момента, действующего в сечении, выделим в поперечном сечении элементарную площадку dA (рис. 14.36) и напишем выражения для нормальной силы и изгибающего момента:

$$N = \int_A \sigma_t dA; \quad (14.51)$$

$$M = \int_A \sigma_t y dA. \quad (14.52)$$

Но нормальная сила в сечении равна нулю. Тогда, подставляя в (14.51) значение σ_t из (14.50), получим

$$N = \int_A E \frac{(u-r_0)}{u} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} dA = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_A \frac{u-r_0}{u} dA. \quad (14.53)$$

Так как $E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \neq 0$, то

$$\int_A \frac{u-r_0}{u} dA = 0. \quad (14.54)$$

Из выражения (14.54) следует, что нейтральная линия не проходит через центр тяжести поперечного сечения, так как интеграл (14.54) не представляет собой статический момент относительно центра тяжести сечения.

Заменяя в (14.52) σ_t и u значениями, запишем M в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} M &= \int_A E \frac{(u-r_0)(u-r_0)}{u} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} dA = \\ &= E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_A \frac{(u^2 - ur_0) - (ur_0 - r_0^2)}{u} dA = \\ &= E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \left[\int_A (u-r_0) dA - r_0 \int_A \frac{u-r_0}{u} dA \right]. \end{aligned} \quad (14.55)$$

Первый интеграл в правой части уравнения (14.55) является статическим моментом площади поперечного сечения относительно нейтральной оси:

$$\int_A (u-r_0) dA = S = Ae, \quad (14.56)$$

где e - расстояние от центра тяжести сечения до нейтральной оси;

$$e = \rho_0 - r_0. \quad (14.57)$$

Второй интеграл в уравнении (14.55), согласно выражению (14.54), равен нулю.

Тогда

$$M = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} Ae, \quad (14.58)$$

откуда получим

$$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{Ae}. \quad (14.59)$$

Подставляя выражение (14.59) в (14.50), получим расчетную формулу для определения нормальных напряжений в любой точке поперечного сечения кривого бруса:

$$\sigma_t = \frac{M}{Ae} \cdot \frac{u - r_0}{u},$$

или

$$\sigma_t = \frac{M}{Ae} \cdot \frac{y}{r_0 + y}, \quad (14.60)$$

где $y = u - r_0$; $u = r_0 + y$.

Знаки напряжений устанавливаются согласно деформации материала в рассматриваемой точке, вызываемой внешней нагрузкой.

Из выражения следует, что напряжения по высоте сечения изменяются по гиперболическому закону. *Наибольшие по абсолютной величине напряжения возникают в крайних точках сечения.*

Эпюра напряжений в сечении представляет собой гиперболу, одна из асимптот которой совпадает с осью кривизны, а другая - отстоит от оси y на расстоянии $\frac{M}{Ae}$ (рис. 14.37).

В зависимости от формы сечения наибольшие нормальные напряжения могут возникать как в верхней, так и в нижней точке сечения. Поэтому в расчетах необходимо определять напряжения в обеих точках сечения.

Для определения радиуса кривизны нейтрального слоя представим выражение (14.54) в виде разности двух интегралов:

$$\int_A \frac{u - r_0}{u} dA = \int_A dA - r_0 \int_A \frac{dA}{u} = 0.$$

Откуда радиус кривизны нейтрального слоя будет равен

$$r_0 = \frac{\int_A dA}{\int_A \frac{dA}{u}} = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{u}}. \quad (14.61)$$

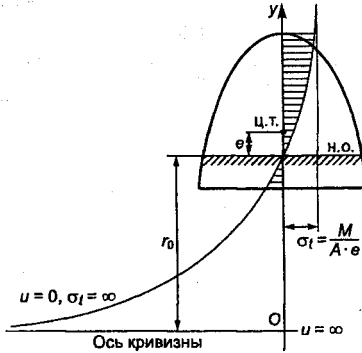


Рис. 14.37

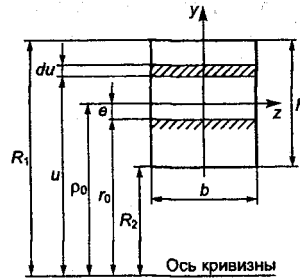


Рис. 14.38

Интеграл $\int \frac{dA}{u}$ является геометрической характеристикой сечения бруса большой кривизны при изгибе.

Результаты определения величины r_0 для различных сечений показывают, что радиус кривизны нейтрального слоя r_0 всегда меньше кривизны оси бруса ρ_0 , т.е. нейтральная ось при изгибе бруса большой кривизны смещается от центра тяжести к центру кривизны оси бруса.

В качестве примера определим r_0 для кривого бруса прямоугольного поперечного сечения (рис. 14.38).

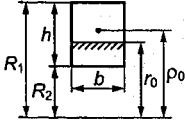
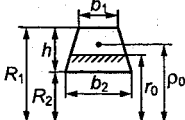
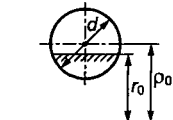
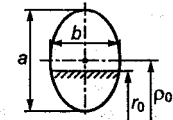
Выделим в поперечном сечении элементарную площадку $dA = bdu$ на расстоянии u от оси кривизны.

Подставляя все величины в уравнение (14.61), получим

$$r_0 = \frac{bh}{\int_{R_2}^{R_1} \frac{bdu}{u}} = \frac{h}{\ln u \Big|_{R_2}^{R_1}} = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

В табл. 14.2 приведены радиусы кривизны нейтрального слоя r_0 для наиболее распространенных поперечных сечений.

Радиусы кривизны нейтрального слоя r_0

Форма сечения	Радиус кривизны r_0
	$r_0 = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{h}{2,303 \lg \frac{R_1}{R_2}}$
	$r = \frac{h(b_1 + b_2)}{2 \left(\frac{b_2 R_1 - b_1 R_2}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1) \right)}$
	$r_0 = \frac{d^2}{4 \left(2\rho_0 - \sqrt{4\rho_0^2 - d^2} \right)}$
	$r_0 = \frac{a^2}{4 \left(2\rho_0 - \sqrt{4\rho_0^2 - a^2} \right)}$

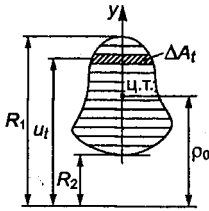


Рис. 14.39

Для сложных форм поперечных сечений r_0 может быть определен путем замены интегрирования по формуле (14.61) численным суммированием. Для этого сечение вычерчивается в масштабе и разбивается линиями, параллельными нейтральной оси, на отдельные полоски, площади которых и их расстояние до оси кривизны принимаются из чертежа (рис. 14.39).

Тогда

$$r_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta A_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta A_i}{u_i}}, \quad (14.62)$$

где i - номер полоски ($i = 1, 2, \dots, n$); n - число полосок.

Величина смещения e нейтральной оси от центра тяжести сечения

$$e = \rho_0 - r_0. \quad (14.63)$$

Величина e очень мала, поэтому для обеспечения требуемой точности ее нужно вычислять до 3-4-значной цифры, так как ошибка в значении r_0 непосредственно отражается на величине напряжений.

Для практических целей предложен прием разложения вычисляемых величин в ряды с последующим исключением первых взаимоуничтожающихся членов.

Представим выражение (14.54) в виде

$$\int \frac{y}{A r_0 + y} dA = \int \frac{y - e + e}{A r_0 + e + y - e} dA = \int \frac{y_1 + e}{A \rho_0 + y_1} dA = 0, \quad (14.64)$$

где $y = u - r_0$; $u = r_0 + y$; $\rho_0 = r_0 + e$; $y_1 = y - e$ - расстояние от элементарной площадки dA до оси, проходящей через центр тяжести (см. рис. 14.38).

Из (14.64) находим величину e :

$$e = \frac{\int \frac{y_1}{A \rho_0 + y_1} dA}{\int \frac{1}{A \rho_0 + y_1} dA} = \frac{\int y_1 \left(1 + \frac{y_1}{\rho_0}\right)^{-1} dA}{\int \left(1 + \frac{y_1}{\rho_0}\right)^{-1} dA}. \quad (14.65)$$

Разложим функцию $\left(1 + \frac{y_1}{\rho_0}\right)^{-1}$ в степенной ряд:

$$\left(1 + \frac{y_1}{\rho_0}\right)^{-1} = 1 - \frac{y_1}{\rho_0} + \left(\frac{y_1}{\rho_0}\right)^2 - \dots$$

Подставляя два первых члена ряда в (14.65), получим

$$e \approx \frac{\int y_1 \left(1 - \frac{y_1}{\rho_0}\right) dA}{\int \left(1 - \frac{y_1}{\rho_0}\right) dA}. \quad (14.66)$$

Интеграл $\int y_1 dA = 0$ как статический момент площади относительно центральной оси равен нулю.

Тогда выражение (14.66) принимает следующий вид:

$$e \approx \frac{\int y_1^2 dA}{\rho_0 A} \approx \frac{I_z}{\rho_0 A}, \quad (14.67)$$

где I_z - осевой момент инерции сечения относительно центральной оси.

Выражение (14.67) носит название **формулы Н.Н. Давиденкова**²¹). *Формула с достаточной для практики точностью может использоваться для брусьев с любым поперечным сечением.*

Основы теории расчета кривых стержней были даны академиком А.В. Гадוליным²², точная теория изгиба кривых стержней прямоугольного сечения была разработана Х.С. Головиным²³.

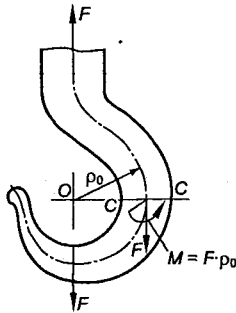


Рис. 14.40

На практике кривые брусья кроме внешних моментов нагружены еще растягивающей или сжимающей силой, например при подъеме груза с помощью крюка (рис. 14.40).

В этом случае в сечении C - C будут действовать продольная сила $N = F$ и изгибающий момент $M = F\rho_0$. При расчете на прочность необходимо учитывать напряжения от обоих силовых факторов.

Нормальные напряжения в поперечном сечении будут равны алгебраической сумме напряжений, обусловленных

нормальной силой и изгибающим моментом:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{Ae} \frac{y}{r_0 + y}, \quad (14.68)$$

где r_0 определяется без учета продольной силы N .

Касательные напряжения (за исключением тонкостенных брусьев) заметно не влияют на прочность и их обычно не определяют. При необходимости их можно определить по формуле

Журавского (11.15). Распределение касательных напряжений в сечениях кривого бруса примерно такое же, как и в поперечных сечениях прямого бруса при изгибе.

Подставляя в формулу (14.68) координаты наиболее удаленных точек сечения, получим условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{Ae} \frac{y_1}{r_0 + y_1} \leq [\sigma], \quad (14.69)$$

где y_1 – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных точек сечения.

Условие прочности по касательным напряжениям будет

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}^*}{I_z b} \leq [\tau]. \quad (14.70)$$

Если брус изготовлен из материала, имеющего различные допускаемые напряжения на растяжение и сжатие, то условие прочности должно выполняться для крайних точек сечения как в растянутой, так и в сжатой части сечения.

14.8. Перемещения в брусках большой кривизны

В брусках большой кривизны определять перемещения требуется при проверке жесткости, а также при решении статически неопределимых задач. Для определения перемещений в брусках *малой кривизны* используются интегралы Максвелла – Мора (13.30). При выводе формулы для перемещений в брусках *большой кривизны* необходимо учитывать взаимные продольные и угловые деформации от действия изгибающих моментов и продольных сил.

Выделим из бруса большой кривизны, испытывающего прямой изгиб, элемент длиной dS , на гранях которого действуют изгибающий момент M_F , нормальная N_F и поперечная Q_F силы (рис. 14.41).

Вывод формулы для определения перемещений проведем, используя начала возможных перемещений. Вариация потенциальной энергии, равная возможной работе внутренних силовых факторов M_1 , N_1 , Q_1 , возникающих под действием единичной силы (момента), приложенной в заданной точке в заданном направлении, согласно (13.44), будет определяться выражением

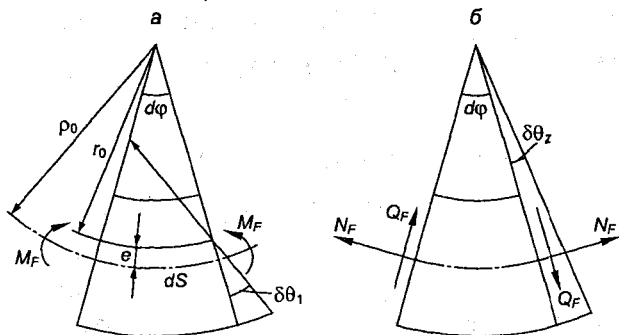


Рис. 14.41

$$\delta U = \sum_S \int M_1 \delta \theta_z + \sum_S \int N_1 \delta \varepsilon_S dS + \sum_S \int Q_1 \delta \gamma_{xy} dS, \quad (14.71)$$

где $\delta \theta_z$, $\delta \varepsilon_S$, $\delta \gamma_{xy}$ - возможные перемещения, на которых внутренние силовые факторы производят работу.

Подставим в (14.71) вместо возможных действительные перемещения от внутренних силовых факторов M_F , N_F , Q_F , возникающие под действием заданной системы сил.

С целью упрощения определения действительных перемещений будем считать левое сечение элемента условно зашпеченным. Тогда потенциальная энергия элемента на основании закона сохранения энергии будет равна работе, совершенной внутренними силовыми факторами M_F , N_F , Q_F на действительном перемещении правого сечения.

Полное удлинение осевого волокна

$$\varepsilon_S dS = \Delta dS = \Delta dS_1 + \Delta dS_2, \quad (14.72)$$

где ΔdS_1 - удлинение, вызванное поворотом сечения относительно нейтральной оси на угол $d\theta_1$; ΔdS_2 - удлинение, вызванное нормальной силой.

$$\Delta dS_1 = e d\theta_1 = \frac{M_F dS}{EAe\rho_0} e = \frac{M_F dS}{EA\rho_0} \quad (\text{см. формулу 14.59});$$

$$\Delta dS_2 = \frac{N_F dS}{EA}. \quad (14.73)$$

Подставляя (14.73) в (14.72), получим

$$\Delta dS = \frac{M_F dS}{EA\rho_0} + \frac{N_F dS}{EA}. \quad (14.74)$$

Полный угол поворота правого сечения

$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2, \quad (14.75)$$

где $d\theta_1$ - угол поворота, вызванный изгибающим моментом;
 $d\theta_2$ - угол поворота сечения, вызванный нормальной силой.

$$d\theta_1 = \frac{M_F d\varphi}{EAe} = \frac{M_F dS}{EAe\rho_0}; \quad (14.76)$$

$$d\theta_2 = \frac{N_F dS}{EA\rho_0}.$$

Подставляя (14.76) в (14.75), получим

$$d\theta = \frac{M_F dS}{EAe\rho_0} + \frac{N_F dS}{EA\rho_0}; \quad (14.77)$$

$$\gamma_{xy} = K_y \frac{Q_F}{GA}. \quad (14.78)$$

Заменяя в формуле (14.71) возможные перемещения действительными, получим выражение начала возможных перемещений:

$$\begin{aligned} \Delta_i = & \sum \int_S \frac{N_F N_1}{EA\rho_0} dS + \sum \int_S \frac{N_F N_1}{EA} dS + \sum \int_S \frac{M_F M_1}{EAe\rho_0} dS + \\ & + \sum \int_S \frac{N_F M_1}{EA\rho_0} dS + \sum \int_S K_y \frac{Q_F Q_1}{EA} dS. \end{aligned} \quad (14.79)$$

Из (14.79) получим общую формулу для нахождения перемещений кривого бруса большой кривизны:

$$\begin{aligned} \Delta_i = & \sum \int_S \frac{M_F M_1}{EAe\rho_0} dS + \sum \int_S \frac{N_F N_1}{EA} dS + \sum \int_S \frac{(M_F N_1 + N_F M_1)}{EA\rho_0} dS + \\ & + \sum \int_S K_y \frac{Q_F Q_1}{GA} dS, \end{aligned} \quad (14.80)$$

где M_F, N_F, Q_F - внутренние силовые факторы от внешней нагрузки; M_1, N_1, Q_1 - внутренние силовые факторы от единичной нагрузки, приложенной в точке, перемещение которой определяется. Обычно при вычислении перемещений влиянием поперечной силы пренебрегают. В формуле (14.80) последнее слагаемое исключается.

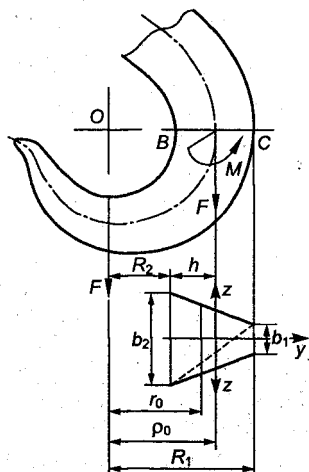


Рис. 14.42

Линейному перемещению соответствует единичная сосредоточенная сила, угловому - единичный момент.

В формуле (14.80) интегрирование распространяется на всю длину бруса. Если брус имеет несколько участков разной кривизны или подынтегральная функция имеет разрывы по длине, тогда интегрирование ведется по участкам и члены формулы будут представлять собой сумму интегралов на участках. Если перемещение, вычисленное по формуле (14.80), окажется отрицательным, то это значит, что оно происходит в сторону, противоположную направлению единичной обобщенной силы.

Пример 14.13. Определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в опасном сечении крюка трапециевидального сечения (рис. 14.42), поднимающего груз $F = 100$ кН. Крюк имеет следующие размеры: $b_1 = 2,6$ см; $b_2 = 7,6$ см; $R_1 = 15,2$ см; $R_2 = 3,8$ см.

Решение. Опасным является сечение BC . Определим площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{b_1 + b_2}{2} h = \frac{2,6 + 7,6}{2} 11,4 = 58,14 \text{ см}^2;$$

$$h = R_1 - R_2 = 15,2 - 3,8 = 11,4 \text{ см.}$$

Находим радиус кривизны оси бруса:

$$\rho_0 = \frac{S_0}{A} = \frac{\frac{b_2 h}{2} \left(R_2 + \frac{h}{3} \right) + \frac{b_1 h}{2} \left(R_2 + \frac{2}{3} h \right)}{\frac{b_1 + b_2}{2} h} =$$

$$= \frac{\frac{7,6 \cdot 11,4}{2} \left(3,8 + \frac{11,4}{3} \right) + \frac{2,6 \cdot 11,4}{2} \left(3,8 + \frac{2}{3} \cdot 11,4 \right)}{58,14} = 8,57 \text{ см.}$$

Вычисляем, пользуясь табл. 14.2, радиус кривизны нейтрального слоя:

$$r_0 = \frac{h(b_1 + b_2)}{2 \left[\frac{b_2 R_1 - b_1 R_2}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1) \right]} =$$

$$= \frac{11,4(7,6 + 2,6)}{2 \left[\frac{7,6 \cdot 15,2 - 2,6 \cdot 3,8}{11,4} \ln \frac{15,2}{3,8} - (7,6 - 2,6) \right]} = 7,38 \text{ см.}$$

Смещение нейтральной оси от центра тяжести

$$e = \rho_0 - r_0 = 8,57 - 7,38 = 1,19 \text{ см.}$$

Напряжение от растягивающей силы F во всех точках сечения одинаково. В точке B материал испытывает суммарное растягивающее напряжение от изгиба и от растяжения силой F .

Изгибающий момент в сечении равен

$$M = F \rho_0 = 100 \cdot 10^3 \cdot 8,57 = 857 \cdot 10^3 \text{ Н/см.}$$

Напряжения в точках B и C следующие:

$$\sigma_B = \frac{F}{A} + \frac{M}{Ae} \cdot \frac{y_B}{r_0 - y_B} = \frac{100 \cdot 10^3}{58,14} + \frac{857 \cdot 10^3}{58,14 \cdot 1,19} \cdot \frac{3,58}{3,8} = 134 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_C = \frac{100 \cdot 10^3}{58,14} - \frac{857 \cdot 10^3}{58,14 \cdot 1,19} \cdot \frac{(15,2 - 7,38)}{15,2} = -46,5 \text{ МПа.}$$

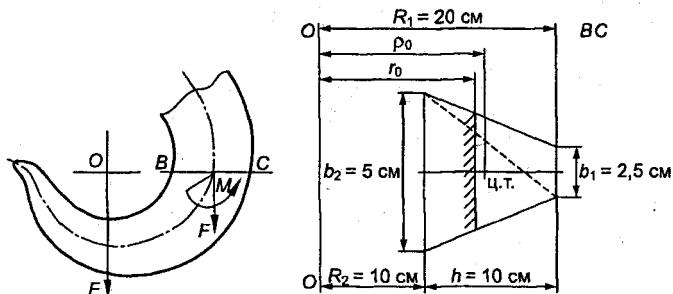


Рис. 14.43

Пример 14.14. Определить допускаемую нагрузку на крюк трапециевидного сечения, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 10\,000 \text{ Н/см}^2$. Размеры сечения указаны на рис. 14.43.

Решение. Опасным является сечение BC . Находим радиус кривизны оси бруса:

$$\rho_0 = \frac{S_0}{A} = \frac{\frac{5 \cdot 10}{2} \left(10 + \frac{1}{3} \cdot 10\right) + \frac{2,5 \cdot 10}{2} \left(10 + \frac{2}{3} \cdot 10\right)}{\frac{5 + 2,5}{2} \cdot 10} = 14,44 \text{ см.}$$

Вычислим радиус кривизны нейтрального слоя:

$$\rho_0 = \frac{10(5+2,5)}{2 \left[\frac{5 \cdot 20 - 2,5 \cdot 10}{10} \ln \frac{20}{10} - (5-2,5) \right]} = 13,9 \text{ см.}$$

Смещение нейтральной оси от центра тяжести

$$e = 14,44 - 13,9 = 0,54 \text{ см.}$$

Опасной является точка B .

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_B = \frac{F}{37,5} + \frac{14,44}{37,5} \cdot \frac{3,9}{0,54} = 10\,000;$$

$$F \left(\frac{1}{37,5} + \frac{14,44}{37,5} \cdot \frac{3,9}{0,54} \right) = 10\,000.$$

Откуда

$$F = \frac{10000}{\frac{1}{37,5} + \frac{14,44}{37,5 \cdot 0,54} + \frac{3,9}{10}} = 32\,819 \text{ Н} = 32,8 \text{ кН.}$$

Пример 14.15. Определить угол поворота свободного конца бруса большой кривизны постоянного сечения (рис. 14.44).

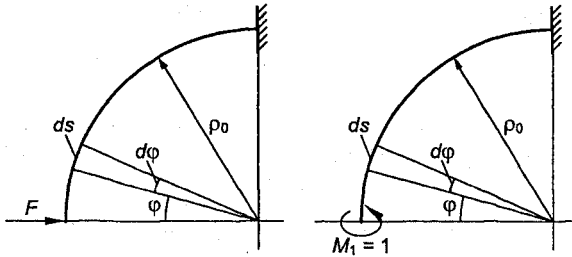


Рис. 14.44

Решение. В произвольном сечении φ внутренние силовые факторы от внешней нагрузки F и от единичного момента $m_1 = 1$ будут

$$M_F = -F\rho_0 \sin\varphi; \quad N_F = -F \sin\varphi; \quad Q_F = -F \cos\varphi;$$

$$M_1 = -1; \quad N_1 = 0; \quad Q_1 = 0.$$

Подставляя эти величины в формулу (14.71), найдем искомое перемещение:

$$\Delta_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{M_F M_1 ds}{EAe\rho_0} + \int_0^{\pi/2} \frac{N_F N_1 ds}{EA\rho_0} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(-F\rho_0 \sin\varphi)(-1)\rho_0 d\varphi}{EAe\rho_0} + \int_0^{\pi/2} \frac{(-F \sin\varphi)(-1)\rho_0 d\varphi}{EA\rho_0} =$$

$$= \frac{F\rho_0}{EAe} + \frac{F}{EA} = \frac{F}{EA} \left(1 + \frac{\rho_0}{e} \right).$$

Глава 15

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

15.1. Общие понятия о статически неопределимых стержневых системах

Любая кинематически неизменяемая конструкция, состоящая из элементов, имеющих форму бруса, называется **стержневой системой**. Перемещение в таких системах возможно только за счет деформации составляющих ее элементов. Стержневые системы, в которых опорные реакции и внутренние силовые факторы в элементах не могут быть определены с помощью уравнений равновесия статики и метода сечений, называются **статически неопределимыми**. Для прочностного расчета таких систем требуется составлять дополнительные уравнения, называемые **уравнениями перемещений**.

Статически неопределимые конструкции широко используются в машиностроении. Это коленчатые валы многоцилиндровых двигателей внутреннего сгорания, рамы плугов, комбайнов, каркасы кузовов, металлоконструкции в грузоподъемных сооружениях и т.д. Статически неопределимые системы позволяют за счет более рационального распределения усилий по элементам конструкции достигать значительной экономии металла; дополнительные связи увеличивают жесткость конструкции и предохраняют ее при нарушении любой связи от разрушения. Это особенно важно для мобильных машин. Недостатком таких систем является их высокая чувствительность к изменению температуры, к неточности изготовления отдельных элементов, к нарушению расположения опор, в результате чего в элементах конструкции будут возникать дополнительные напряжения.

Если элементы системы работают в основном на растяжение или сжатие, то стержневая система называется **фермой**. Для ферм характерно приложение внешних сил в узлах (рис. 15.1).

Если стержни работают главным образом на изгиб и кручение, то стержневая система называется **рамой**. У рамы нагрузка может быть приложена в любой точке стержня между узлами (рис. 15.2).

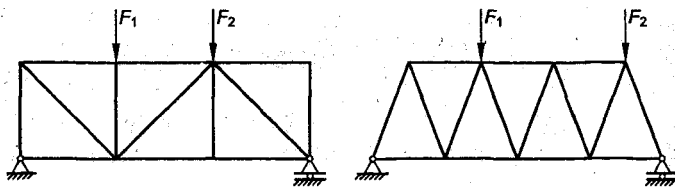


Рис. 15.1

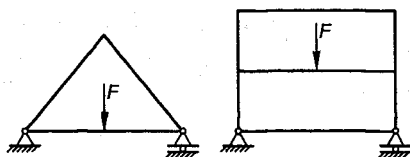


Рис. 15.2

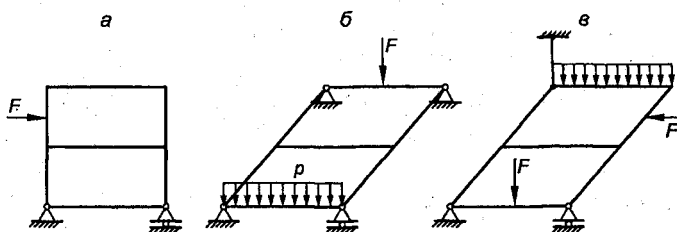


Рис. 15.3

В современных фермах стержни обычно соединяются между собой в узлах жестко с помощью сварки, болтов или заклепок. Поэтому в стержнях фермы кроме нормальных усилий действуют еще изгибающие моменты от жесткости узлов. Однако эти моменты в фермах малы и обычно не учитываются, а в расчетах узлы рассматриваются как шарнирные без трения. В рамах, напротив, изгибающие моменты значительны и, как правило, определяют нагруженность системы, поэтому в расчетах рассматривать жесткие узлы как шарнирные недопустимо.

Стержневые системы делятся на плоские, плоскопространственные и пространственные (рис. 15.3).

В *плоских рамах и фермах* геометрические оси всех элементов а также внешние нагрузки до и после деформации располагаются в одной плоскости, являющейся главной плоскостью сечений (рис. 5.3, а).

В *плоскопространственных системах* геометрические оси всех элементов находятся в одной плоскости, а внешние силы действуют перпендикулярно этой плоскости (рис. 15.3, б).

В *пространственных системах* геометрические оси элементов и внешние силы располагаются как угодно в пространстве (рис. 15.3, в). В дальнейшем будут рассматриваться плоские стержневые системы.

15.2. Определение степени статической неопределимости системы

Всякое ограничение, накладываемое на перемещение стержня, называется **связью**. Наложение одной связи отнимает у стержня одну степень свободы. Связи в стержневых системах делятся на внешние и внутренние, или взаимные.

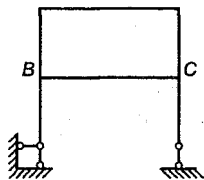


Рис. 15.4

Внешние связи ограничивают абсолютные перемещения системы как жесткого целого.

Это связи, накладываемые на систему опорами. Например, плоская рама (рис. 15.4) имеет три внешние связи, необходимые для определения положения рамы на плоскости.

Внутренние, или взаимные, связи ограничивают перемещения элементов системы относительно друг друга. Это связи, накладываемые между элементами системы.

Так, плоская рама, показанная на рис. 15.4, имеет шесть внутренних связей, запрещающих элементу *BC* поворачиваться и смещаться в горизонтальном и вертикальном направлении относительно стоек.

Количество связей, при котором система является статически определимой и кинематически неизменяемой, называется **необходимым числом связей**. Связи, накладываемые на систему сверх необходимых, называются **лишними** или **дополнительными связями**. Эти связи могут быть удалены без нарушения кинематической неизменяемости системы.

Необходимо отметить, что как лишние связи могут рассматриваться только с позиции удовлетворения условиям равновесия, но не работы системы, так как эти связи, уменьшая усилия и перемещения в элементах, способствуют повышению ее надежности. Такие связи нужны для получения наиболее рациональной конструктивной схемы.

Степенью статической неопределимости системы называется разность между числом наложенных связей и числом независи-

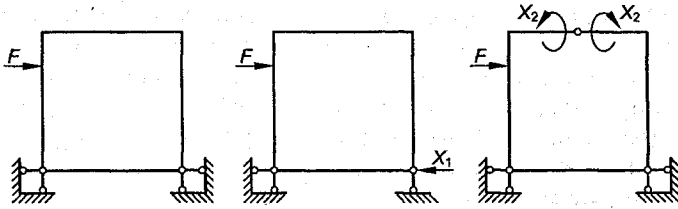


Рис. 15.5

мых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы. Таким образом, степень статической неопределенности равняется числу дополнительных связей и определяет количество недостающих уравнений, необходимых для решения статически неопределимой системы.

Системы, у которых при расчете лишними являются внешние опорные связи, называются **внешне статически неопределимыми**, если внутренние связи – **внутренне статически неопределимыми**. Системы, являющиеся внешне и внутренне статически неопределимыми, называются **комбинированными**. В некоторых системах за лишние можно принять как внешние, так и внутренние связи. Так, в раме, изображенной на рис. 15.5, можно считать лишней внешнюю связь (силу X_1) или внутреннюю связь (момент X_2 в любом сечении рамы).

Число дополнительных связей удобно находить с помощью кинематического анализа стержневых систем. Для этого необходимо подсчитать общее число степеней свободы системы, предполагая, что между стержнями-элементами никаких связей нет, и вычесть из него число внешних опорных и внутренних связей, налагаемых на движение ее элементов. Каждый стержень-элемент на плоскости имеет три степени свободы, в пространстве – шесть степеней свободы.

Тогда общее число H степеней свободы будет:
для плоской системы

$$H = 3D - C_0 - C_B, \quad (15.1)$$

для пространственной системы

$$H = 6D - C_0 - C_B, \quad (15.2)$$

где D – число стержней, образующих систему; C_B – число внутренних связей; C_0 – число внешних опорных связей.

Возможны три качественно различных результата:

$H > 0$ - система кинематически изменяема, обладает подвижностью; такие системы не могут применяться в качестве инженерных сооружений;

$H = 0$ - система кинематически неизменяема, обладает только необходимыми связями, является статически определимой;

$H < 0$ - система статически неопределима, имеет лишние (дополнительные) связи.

При пользовании формулами (15.1) и (15.2) следует помнить, что в *плоской* системе шарнирно-подвижная опора налагает одну внешнюю связь, шарнирно-неподвижная опора - две, защемление (заделка) - три внешние связи; каждый шарнир, соединяющий два элемента, накладывает две внутренние связи; неподвижное соединение двух элементов в узле эквивалентно трем внутренним связям. Шарнир, соединяющий n элементов, следует рассматривать как $(n - 1)$ совпадающих простых шарниров. Поскольку такой шарнир накладывает две связи на каждую пару стержней, то общее количество внутренних связей, накладываемых этим шарниром, будет равно

$$C_{\text{в}} = 2(n-1). \quad (15.3)$$

Например, пусть полный шарнир связывает пять стержней (рис. 15.6). Из рисунка видно, что число простых шарниров на единицу меньше числа сходящихся в полном шарнире стержней.

Согласно (15.3) получим

$$C_{\text{в}} = 2(5-1) = 8.$$

Пространственная система образуется из стержней-элементов, расположенных в пространстве, которые соединяются между собою шаровыми шарнирами так, чтобы была обеспечена кинематическая неизменяемость системы. В пространственной системе заделка соответствует шести внешним связям, *шаровая подвижная опора* (рис. 15.7, а) допускает вращение во-

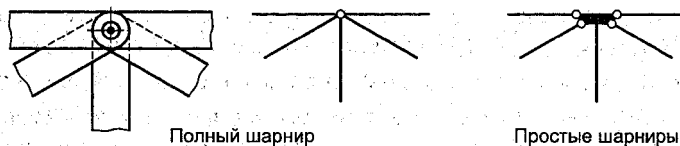


Рис. 15.6

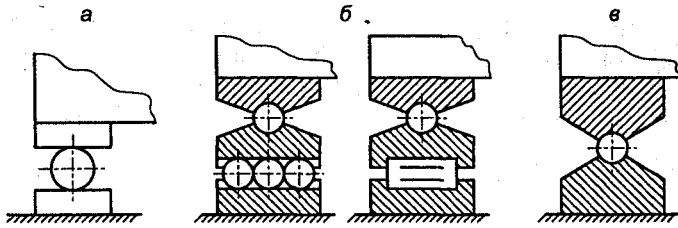


Рис. 15.7

круг любой оси и поступательное перемещение в плоскости опорной подушки. Она эквивалентна одной внешней связи. Шаровая опора на цилиндрических катках (рис. 15.7, б) допускает перемещение в направлении движения катков, что равносильно наложению двух внешних связей. Неподвижная шаровая опора (рис. 15.7, в) допускает вращение вокруг любой оси, т.е. накладывает три внешние связи. Шаровой шарнир допускает взаимное вращение элементов вокруг любой оси. Таким образом, он накладывает три внутренние связи. Неподвижное соединение двух стержней в узле эквивалентно шести внутренним связям. Кинематическая неизменяемость пространственных стержневых систем обеспечивается соответствующей расстановкой связей.

Положение системы как жесткого целого на плоскости определяется наложением трех опорных связей, в пространстве – наложением шести опорных связей.

Пример 15.1. Найти степень статической неопределимости плоской системы, изображенной на рис. 15.8, а.

Решение. Для использования формулы (15.1) освободим систему от основания и расчленим ее отдельные элементы (рис. 15.8, б).

Получим $D = 3$; $C_o = 3$; $C_v = 12$. Степень статической неопределимости системы

$$H = 3 - 3 - 12 - 3 = -6.$$

Система б раз внутренне статически неопределима. На рис. 15.8, б первый элемент

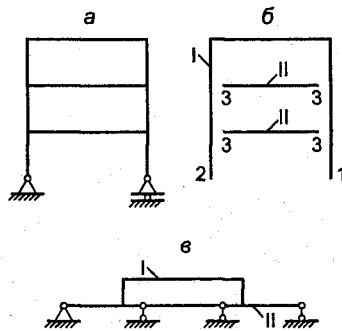


Рис. 15.8

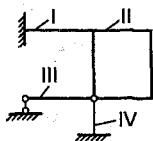


Рис. 15.9

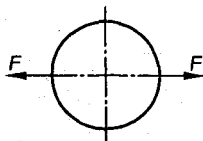


Рис. 15.10

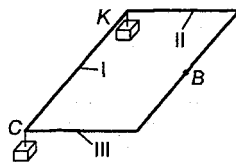


Рис. 15.11

представляет собой изогнутый стержень; числами обозначены удаленные внешние и внутренние связи.

Пример 15.2. Найти степень статической неопределимости плоской системы, показанной на рис. 15.8, в.

Решение. Получим $D = 2$; $C_0 = 5$; $C_B = 6$.

Степень статической неопределимости системы

$$H = 2 \cdot 3 - 5 - 6 = -5.$$

Система 5 раз (3 раза внутренне и 2 раза внешне) статически неопределима.

Пример 15.3. Найти степень статической неопределимости плоской системы (рис. 15.9).

Решение. Имеем $D = 4$; $C_0 = 7$; $C_B = 3 + 2(4 - 1) = 9$.

Откуда

$$H = 3 \cdot 4 - 7 - 9 = -4.$$

Пример 15.4. Найти степень статической неопределимости плоской системы (рис. 15.10).

Решение. Для системы не указаны внешние связи, но приложены внешние силы, удовлетворяющие условиям равновесия. В таких случаях принято считать положение системы на плоскости определенным, т.е. считать, что она имеет необходимые внешние связи.

Таким образом, имеем $D = 1$; $C_0 = 3$; $C_B = 3$.

Откуда

$$H = 1 \cdot 3 - 3 - 3 = -3.$$

Система 3 раза внутренне статически неопределима.

Полученный результат легко понять, если замкнутый контур представить в виде согнутого стержня, концы которого жестко соединены между собой, что равносильно введению трех дополнительных внутренних связей.

Пример 15.5. Найти степень статической неопределимости пространственной рамы (рис. 15.11), имеющей в контуре шаровой шарнир В.

Решение. Имеем $D = 3$; $C_0 = 12$; $C_B = 15$ (12 внутренних связей обеспечивают неподвижность звеньев II и III в узлах C и K ; три внутренние связи накладывает шарнир B). Первый элемент является изогнутым стержнем, заделанным в опорах.

По формуле (15.2) найдем

$$H = 6 \cdot 3 - 12 - 15 = -9.$$

Система 9 раз статически неопределима (6 раз внешне и 3 раза внутренне).

15.3. Метод сил. Выбор основной системы

Метод сил заключается в том, что статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей, действие которых заменяется силами и моментами. Их величины подбираются так, чтобы перемещения в системе оставались прежними, как и при наличии дополнительных связей. Таким образом, неизвестными при этом способе являются силы. Отсюда и происходит название «метод сил». Расчет по данному методу начинается с выбора основной системы.

Основной системой называется статически определимая, кинематически неизменяемая система, получаемая из заданной в результате освобождения ее от внешних нагрузок и дополнительных связей. Для каждой статически неопределимой системы можно подобрать несколько основных систем.

Наиболее рациональной основной системой считается такая, которая в наибольшей степени упрощает расчет. Вместе с тем необходимо помнить, что не всякая система с отброшенными дополнительными связями может быть принята в качестве основной.

Например, для рамы 3 раза статически неопределимой (рис. 15.12, *a*) можно предложить несколько основных систем, которые получаются путем отбрасывания трех лишних связей (рис. 15.12, *b*, *в*, *г*). Вариант *д* не может быть принят в качестве основной системы, так как он представляет собой мгновенно изменяемую систему. При действии нагрузки эта система не находится в равновесии, она имеет возможность незначительно поворачиваться относительно левой опоры как жесткое тело. Уравнения равновесия статики для нее не удовлетворяются. Мгновенно изменяемые, а также близкие к ним системы не могут использоваться в качестве инженерных конструкций.

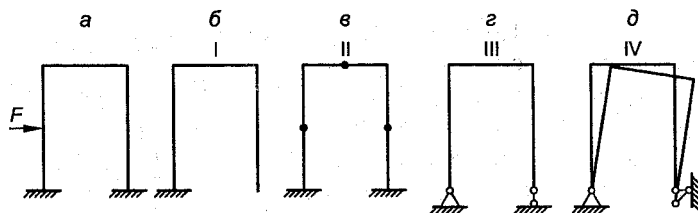


Рис. 15.12

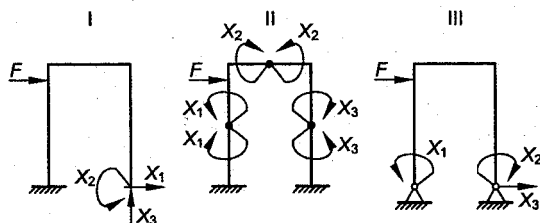


Рис. 15.13

После выбора основной системы к ней прикладываются внешние нагрузки и неизвестные силы X_1, X_2, \dots, X_n , заменяющие действие отброшенных связей.

Основная система, к которой приложены все внешние нагрузки и неизвестные силы, заменяющие отброшенные связи, называется **эквивалентной**. В эквивалентной и заданной системах возникающие в соответствующих сечениях усилия и перемещения тождественны.

На рис. 15.13 показаны эквивалентные системы, соответствующие основным системам (см. рис. 15.12).

Силы, заменяющие внутренние связи, являются взаимными. Поэтому в сечениях, где рама разрезана или вводится шарнир, к обеим частям системы прикладываются равные и противоположно направленные силы и моменты.

Величины неизвестных сил подбираются так, чтобы перемещения в эквивалентной и заданной системах были одинаковыми.

15.4. Теоремы о взаимности работ и перемещений

Теорема о взаимности работ вытекает из принципа независимости действия сил. Рассмотрим балку, находящуюся в равновесии под действием двух сил F_1 и F_2 , приложенных в точках

B и *C* (рис. 15.14). Подсчитаем работу, которую совершают силы F_1 и F_2 при их статическом приложении, в такой последовательности:

а) сначала в точке *B* прикладывается сила F_1 , а затем в точке *C* прикладывается сила F_2 ;

б) сначала в точке *C* прикладывается сила F_2 , а затем в точке *B* прикладывается сила F_1 .

Условимся перемещения обозначать через Δ_{iF} , где первый индекс i указывает направление перемещения, а второй - причину, его вызывающую. Например, Δ_{1F_2} означает перемещение по направлению первой силы, вызванное второй силой, а Δ_{2F_2} - перемещение по направлению второй силы, вызванное действием этой же силы.

Для первого случая работа

$$W_I = \frac{1}{2}F_1\Delta_{1F_1} + \frac{1}{2}F_2\Delta_{2F_2} + F_1\Delta_{1F_2}, \quad (15.4)$$

где $F_1\Delta_{1F_2}$ - работа совершаемая силой F_1 на дополнительном перемещении Δ_{1F_2} , вызванном действием силы F_2 .

Для второго случая работа

$$W_{II} = \frac{1}{2}F_2\Delta_{2F_2} + \frac{1}{2}F_1\Delta_{1F_1} + F_2\Delta_{2F_1}, \quad (15.5)$$

где $F_2\Delta_{2F_1}$ - работа, совершаемая силой F_2 на дополнительном перемещении Δ_{2F_1} , вызванном действием силы F_1 .

Так как величина работы не зависит от порядка приложения сил, то, приравнявая выражения (15.4) и (15.5), получим

$$\frac{1}{2}F_1\Delta_{1F_1} + \frac{1}{2}F_2\Delta_{2F_2} + F_1\Delta_{1F_2} = \frac{1}{2}F_2\Delta_{2F_2} + \frac{1}{2}F_1\Delta_{1F_1} + F_2\Delta_{2F_1}.$$

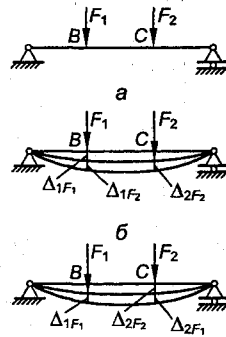


Рис. 15.14

Откуда после преобразований найдем

$$F_1 \Delta_1 F_2 = F_2 \Delta_2 F_1. \quad (15.6)$$

Полученное выражение носит название **теоремы о взаимности работ** или **теоремы Бетти**²⁴. Теорема формулируется следующим образом: *работа первой силы на перемещении точки ее приложения, вызванном второй силой, равна работе второй силы на перемещении точки ее приложения, вызванном первой силой.*

Под силами и перемещениями понимаются обобщенные силы и обобщенные перемещения.

Если положить $F_1 = F_2 = 1$, то перемещения (15.6) будут представлять собой перемещения от единичных сил. Условимся перемещения от единичных сил обозначать буквой δ с соответствующими индексами.

На основании теоремы о взаимности работ получим

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (15.7)$$

Выражение (15.7) носит название **теоремы о взаимности перемещений** или **теоремы Максвелла**²⁵.

Теорема формулируется так: *перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное действием второй единичной силы, равно перемещению по направлению второй единичной силы, вызванному действием первой единичной силы.*

Теоремы о взаимности работ и перемещений позволяют существенно упростить решение многих задач по определению деформаций системы. Так как перемещения пропорциональны силам, то перемещение Δ_{ik} можно представить как произведение силы X_k на перемещение от единичной силы δ_{ik} :

$$\Delta_{ik} = X_k \delta_{ik}. \quad (15.8)$$

Перемещение в направлении i от силового фактора X_k равно произведению этого силового фактора на перемещение в направлении i от силового фактора, аналогичного X_k , но равного единице.

15.5. Канонические уравнения метода сил

Пусть заданная система имеет n дополнительных связей, т.е. является n раз статически неопределимой. Заменяя дополнительные связи соответствующими силами и моментами, полу-

чим эквивалентную систему. Рассматривая перемещения в эквивалентной системе, составим n уравнений перемещений, выражающих условие равенства нулю суммарных перемещений по направлению каждой из отброшенных связей. Эти уравнения составляются по определенному закону (канону) и называются **каноническими уравнениями метода сил**.

Перемещение по направлению любой i -й отброшенной связи складывается из перемещений от заданной нагрузки и от каждой неизвестной силы, заменяющей дополнительную связь, и, согласно принципу независимости действия сил, может быть представлено в виде суммы слагаемых:

$$\Delta_i = \Delta_{iX_1} + \Delta_{iX_2} + \dots + \Delta_{iX_i} + \dots + \Delta_{iX_n} + \Delta_{iF} = 0, \quad (15.9)$$

где $\Delta_{iX_1}, \Delta_{iX_2}, \Delta_{iX_i}, \Delta_{iX_n}$ - перемещения по направлению i -й связи от неизвестных сил X_1, X_2, \dots, X_n ; Δ_{iF} - перемещение по направлению i -й связи, вызванное внешней нагрузкой; при этом под индексом F будем понимать любую систему внешних сил, которая в общем случае может быть произвольной.

Каждое слагаемое Δ_{iX_k} обозначает перемещение в направлении силы с первым индексом под действием силы, указанной во втором индексе. Например, Δ_{1X_2} - перемещение по направлению силы X_1 от силы X_2 ; Δ_{iX_k} - перемещение по направлению силы X_i от силы X_k .

Выразим, согласно (15.8), перемещение, вызванное каждым неизвестным силовым фактором X_k , через соответствующее этому фактору единичное перемещение δ_{ik} :

$$\Delta_{iX_k} = \delta_{ik} X_k, \quad (15.10)$$

где δ_{ik} - перемещение по направлению i -го силового фактора под действием единичного силового фактора, заменяющего неизвестный силовой фактор X_k .

Очевидно, что линейное единичное перемещение имеет размерность [длина / сила], единичное угловое перемещение имеет размерность [1 / длина-сила]. Подставляя соответствующие

выражения (15.10) в (15.9), получим n канонических уравнений для расчета статически неопределимой системы:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1i}X_i + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2i}X_i + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \dots + \delta_{3i}X_i + \dots + \delta_{3n}X_n + \Delta_{3F} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{ni}X_i + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} &= 0. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Канонические уравнения выражают условия равенства нулю суммарных перемещений по направлению каждой отброшенной связи. Отсутствие перемещений по направлению отброшенных связей составляет физическую сущность канонических уравнений метода сил.

Коэффициенты при неизвестных силах в уравнениях (15.11) представляют собой перемещения в основной системе, вызванные единичными силами, заменяющими неизвестные силы. Их можно разделить на две группы: коэффициенты с одинаковыми индексами типа δ_{ii} и коэффициенты с разными индексами типа δ_{ij} ($i \neq j$). Первые называются **главными** или **собственными перемещениями**. Они являются перемещением по направлению i -го силового фактора под действием единичного, заменяющего этот же силовой фактор. Данные коэффициенты всегда положительны. Вторые называются **побочными перемещениями**. Они означают перемещение по направлению i -го силового фактора под действием единичного, заменяющего j -й силовой фактор. Согласно теореме о взаимности перемещений эти коэффициенты попарно равны, т.е. $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. Побочные перемещения могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Свободные члены являются перемещениями в основной системе под действием заданных внешних сил. Буква Δ в уравнениях для свободного члена указывает на то, что это перемещение вызывается не единичной силой, а всей системой внешних сил. Данные члены также могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. В том случае, когда они равны нулю, соответствующие силы X_i равны нулю, а значит, связи не работают. Когда все побочные перемещения обращаются в нуль, тогда каждое каноническое уравнение в системе будет содержать только одну неизвестную силу:

$$\delta_{ii}X_i + \Delta_{iF} = 0, (i=1, 2, \dots, n). \quad (15.12)$$

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений определяются с помощью интегралов Максвелла - Мора или способа Верещагина, путем перемножения эпюр внутренних силовых факторов, построенных в основной системе от единичных сил, заменяющих неизвестные силы, и от внешней нагрузки. Индексы указывают на то, какие эпюры должны быть перемножены.

После вычисления всех свободных членов и коэффициентов при неизвестных силах решается система канонических уравнений и определяются неизвестные силы X_1, X_2, \dots, X_n .

Необходимо отметить, что ошибки в вычислении коэффициентов канонических уравнений могут существенно изменять значение сил. Поэтому следует проводить проверку правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений, а также решения уравнений.

Проверка правильности определения коэффициентов канонических уравнений проводится путем вычисления условного перемещения по направлению всех лишних неизвестных от всех единичных сил, которое должно равняться сумме коэффициентов при всех неизвестных силах:

$$\delta_{ss} = \sum \delta_{ii} + 2 \sum_{i \neq j} \delta_{ij}. \quad (15.13)$$

Для вычисления условного перемещения δ_{ss} необходимо построить для основной системы, нагруженной всеми единичными силами, суммарную единичную эпюру \overline{M}_s . Тогда перемещение δ_{ss} определяется как произведение суммарной единичной эпюры на саму себя.

Такая проверка называется **универсальной проверкой всех единичных перемещений**. Если расхождение при проверке превышает 1 %, то ошибка в расчетах находится путем построчных проверок. При построчной проверке произведение суммарной единичной эпюры на i -ю единичную эпюру должно равняться сумме коэффициентов i -го канонического уравнения:

$$\delta_{is} = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}. \quad (15.14)$$

Проверка правильности свободных членов канонических уравнений сводится к вычислению условного перемещения по направлению всех лишних неизвестных от внешних сил Δ_{sF} , которое должно равняться сумме всех свободных членов. Оно находится как произведение грузовой эпюры на суммарную единичную эпюру:

$$\Delta_{sF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF}. \quad (15.15)$$

Расхождение свыше 1 % не допускается.

Правильность решения системы канонических уравнений проверяется подстановкой найденных значений неизвестных сил в каждое уравнение. Во всех уравнениях правая часть должна равняться нулю.

После определения величин и направления неизвестных сил строятся эпюры всех внутренних силовых факторов. К основной системе прикладываются, с учетом знаков, все найденные силы X_1, X_2, \dots, X_n и заданные нагрузки и обычным порядком, как для любой статически определимой системы, строятся суммарные эпюры внутренних силовых факторов M, N, Q , по которым затем рассчитывается конструкция на прочность.

Суммарную эпюру изгибающего момента можно построить путем алгебраического сложения эпюры от заданной нагрузки (грузовой эпюры) и единичных эпюр, умноженных на величину соответствующих сил X_i с учетом знаков (исправленных единичных эпюр):

$$M_F = M_F^0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n, \quad (15.16)$$

где M_F^0 - изгибающий момент в сечениях основной системы от заданной нагрузки; $\bar{M}_n X_n$ - изгибающий момент в тех же сечениях основной системы от сил X_1, X_2, \dots, X_n .

По значениям изгибающих моментов в характерных сечениях строят эпюру M_F на каждом участке системы. Построенные эпюры изгибающих моментов нормальных и поперечных сил для эквивалентной системы будут являться эпюрами M_F, N_F, Q_F для заданной статически неопределимой системы.

Обязательна проверка равновесия каждого вырезанного из рамы узла под действием внешних сил и внутренних силовых факторов, значения которых берутся непосредственно из сум-

марных эпюр. Такая проверка называется **статической**, она является необходимой, но недостаточной. Поэтому проводится еще **деформационная проверка**, заключающаяся в определении перемещений в системе по направлению лишних неизвестных. Так как у эквивалентной системы перемещение Δ_i в направлении любого лишнего неизвестного должно отсутствовать, то произведение окончательной (суммарной) эпюры изгибающих моментов M_F на каждую эпюру единичных сил \overline{M}_i должно равняться нулю:

$$\int \frac{M_F \overline{M}_i dx}{EI_z} = 0, \text{ или } \int \frac{\Omega_i \overline{M}_i^c dx}{EI_z} = 0, \quad (15.17)$$

где M_F - изгибающий момент в рассматриваемом сечении; \overline{M}_i - изгибающий момент в сечении от единичных сил; Ω_i - площадь эпюры изгибающих моментов; \overline{M}_i^c - величина изгибающего момента от единичных сил под центром тяжести эпюры изгибающих моментов.

Обычно имеет место некоторая неувязка, для оценки которой необходимо при вычислении по формуле (15.17) отдельно найти суммы положительных и отрицательных членов. Если разность этих сумм в процентах от меньшей суммы не превышает 1-3 %, то решение считается удовлетворительным. Для избежания ошибок в расчетах рекомендуется проводить указанные проверки по ходу решения задачи.

После установления опасного сечения по наибольшему значению изгибающего момента размеры поперечного сечения или номер прокатного профиля подбирают по условию прочности при изгибе без учета продольной силы:

$$\frac{M_z^{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (15.18)$$

где W_z - осевой момент сопротивления сечения; $[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

Так как в поперечных сечениях кроме изгибающего момента действует продольная сила, вызывающая в сечении нормальные напряжения, то необходимо вычислить максимальное напряжение с учетом продольной силы и сравнить с допускаемым:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z^{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (15.19)$$

где N - продольная сила в опасном сечении; A - площадь поперечного сечения.

Если σ_{\max} отличается от $[\sigma]$ не более чем на 5 %, расчет считается законченным. В противном случае проводится корректирование размеров сечения с последующей проверкой σ_{\max} .

15.6. Определение перемещений в статически неопределимых системах

После раскрытия статической неопределимости и нахождения неизвестных сил X_1, X_2, \dots, X_n эквивалентная система полностью соответствует заданной. Естественно, что и перемещения в эквивалентной системе будут такими же, как в заданной системе. Следовательно, силы X_1, X_2, \dots, X_n можно рассматривать как заданные внешние силы, приложенные к эквивалентной системе. Эпюры внутренних силовых факторов, построенные от этих сил и внешней нагрузки, будут эпюрами внутренних силовых факторов в статически неопределимой системе.

К основной системе в заданной точке в направлении искомого перемещения прикладывается единичная сила (или единичный момент) и строится эпюра изгибающих моментов от единичного силового фактора. Величина перемещения определится путем умножения суммарной эпюры изгибающих моментов на единичную эпюру.

Так как окончательная эпюра моментов в статически неопределимой системе не зависит от выбора основной системы, то при определении перемещений следует выбирать такую основную систему, для которой построение эпюры от единичной нагрузки было бы наиболее просто.

15.7. Особенности расчета симметричных систем

Основную систему для симметричных статически неопределимых систем необходимо выбирать так, чтобы симметрия сохранялась.

Симметричной называется конструкция, имеющая плоскость симметрии, относительно которой одна ее часть по форме конту-

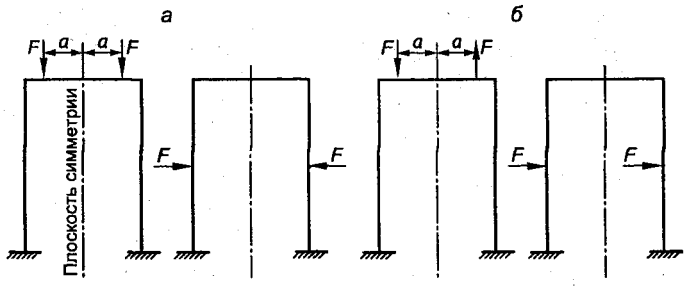


Рис. 15.15

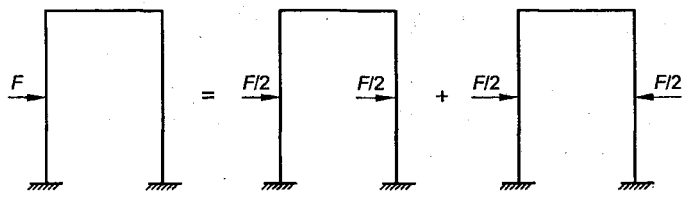


Рис. 15.16

ра, наложенным связям и характеристикам жесткости представляет собой зеркальное отображение другой части (рис. 15.15).

Внешняя нагрузка, действующая на симметричную конструкцию, называется **симметричной**, если силы приложенные к правой части, являются зеркальным отображением сил, приложенных к левой части (рис. 15.15, а); если же силы, приложенные к правой части, по величине являются зеркальным отображением сил, приложенных к левой части, но противоположны им по знаку, то нагрузка называется **кососимметричной** (рис. 15.15, б).

Симметричные конструкции с симметричной нагрузкой будем называть **симметричными системами**, с кососимметричной нагрузкой - **кососимметричными системами**. Отметим, что, используя принцип независимости действия сил, любую нагрузку, приложенную к симметричной конструкции, можно разложить на симметричную и кососимметричную нагрузки (рис. 15.16). В результате разложения получаем симметричную и кососимметричную системы, совмещение которых дает заданную систему.

Аналогично внешним нагрузкам классифицируются и внутренние силовые факторы. Так, изгибающие моменты и нормальные силы относительно сечения являются **симметричными**

силовыми внутренними факторами, а крутящий момент и поперечная сила – кососимметричными силовыми факторами.

Совершенно очевидно, что в сечении, расположенном на оси симметрии, независимо от характера внешней нагрузки все коэффициенты канонических уравнений, у которых один индекс принадлежит симметричному, а другой – кососимметричному силовому фактору, будут равны нулю, так как перемножение кососимметричных эпюр от единичных силовых факторов на симметричные эпюры от единичных факторов дает нуль. При этом система канонических уравнений распадается на простые независимые системы, из которых отдельно определяются неизвестные силы. Так как симметричной внешней нагрузке соответствует симметричная эпюра изгибающих моментов, то свободные члены, представляющие собой перемещения в направлении кососимметричных внутренних силовых факторов, будут равны нулю.

При кососимметричной внешней нагрузке, которой соответствует кососимметричная эпюра изгибающих моментов, свободные члены, представляющие собой перемещения в направлении симметричных внутренних силовых факторов, будут равны нулю. Это значит, что при симметричной нагрузке в плоскости симметрии кососимметричные внутренние силовые факторы равны нулю, а при кососимметричной нагрузке симметричные внутренние силовые факторы равны нулю.

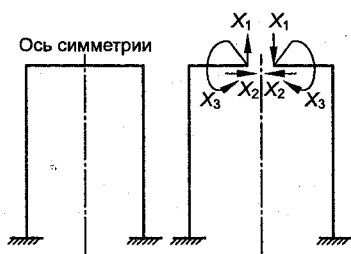


Рис. 15.17

Рассмотрим симметричную статически неопределимую раму (рис. 15.17). Выберем основную систему, разрезав раму по оси симметрии. Здесь X_1 – кососимметричный силовой фактор; X_2 и X_3 – симметричные силовые факторы. Система канонических уравнений для рассматриваемой рамы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} &= 0. \end{aligned} \quad (15.20)$$

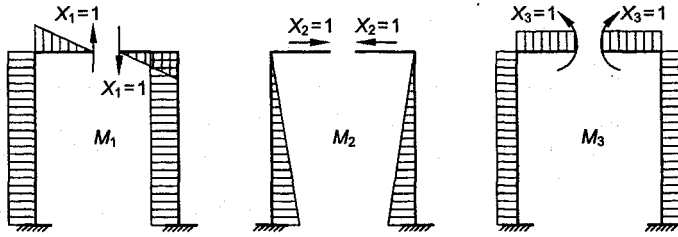


Рис. 15.18

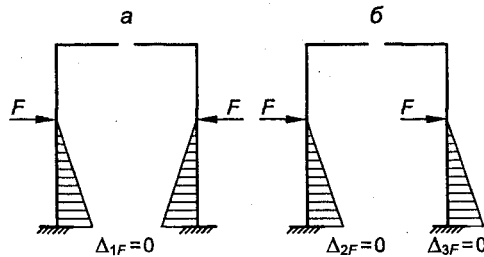


Рис. 15.19

Эпюры изгибающих моментов от единичных сил, заменяющих неизвестные силы X_1, X_2, X_3 , будут от X_1 – кососимметричной; от X_2 и X_3 – симметричной (рис. 15.18).

При перемножении таких эпюр коэффициенты

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0.$$

Система канонических уравнений (15.20) после вычеркивания коэффициентов, равных нулю, будет такой:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} &= 0. \end{aligned} \quad (15.21)$$

Если внешняя нагрузка *симметрична* (рис. 15.19, а), тогда $\Delta_{1F} = 0$ и, следовательно, $X_1 = 0$.

Если внешняя нагрузка *кососимметрична* (рис. 15.19, б), тогда $\Delta_{2F} = 0$ и $\Delta_{3F} = 0$. В этом случае, как указывалось, связи не работают, а значит, симметричные силовые факторы X_2 и X_3 будут равны нулю.

Использование свойств симметрии систем позволяет значительно упростить определение неизвестных сил.

В качестве обобщения изложенного можно рекомендовать следующий порядок расчета статически неопределимых систем.

1. Найти степень статической неопределимости заданной системы.

2. Выбрать основную систему. Она выбирается так, чтобы возможно большее число побочных коэффициентов обращалось в нуль. Если система обладает геометрической симметрией, то при выборе основной системы симметрия должна сохраняться.

3. Построить эквивалентную систему, для чего к основной системе приложить заданную нагрузку и неизвестные усилия, заменяющие отброшенные связи.

4. Составить канонические уравнения метода сил, число которых должно равняться степени статической неопределимости системы.

5. Построить в основной системе эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки M_F .

6. Построить в основной системе эпюры изгибающих моментов от единичных сил, заменяющих неизвестные силы $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$.

7. Определить коэффициенты и свободные члены уравнений, используя для прямолинейных элементов метод Верещагина, а для криволинейных – интеграл Максвелла – Мора.

8. Проверить правильность вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.

9. Решить систему канонических уравнений и найти значения лишних неизвестных.

10. Проверить правильность решения системы канонических уравнений.

11. Построить суммарную эпюру изгибающих моментов и эпюры поперечных и нормальных сил. Для построения эпюр удобно воспользоваться методом сложения.

12. Проверить правильность построения эпюр по равновесию узлов и по дифференциальным зависимостям между внутренними силовыми факторами, а также выполнить деформационную проверку правильности решения задачи.

13. Подобрать поперечные сечения стержней.

15.8. Расчет статически неопределимых балок

Статически неопределимые балки часто встречаются в различных конструкциях машин: трансмиссионные валы, многопролетные неразрезные балки, опирающиеся более чем на две опоры, а также балки других типов, имеющие лишние опорные связи. В зависимости от числа дополнительных опор система может быть 1, 2 и более раз статически неопределимой. Расчет статически неопределимых балок методом сил с использованием канонических уравнений выполняется в последовательности, изложенной ранее.

Пример 15.6. Построить эпюры внутренних силовых факторов и подобрать поперечное сечение в форме квадрата для рамы, изображенной на рис. 15.20, а, если $[\sigma] = 16\,000 \text{ Н/см}^2$, жесткость всех стержней рамы одинакова. Найти перемещение точки D. Материал – сталь, $E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$.

Решение.

1. Находим степень статической неопределимости системы по формуле (15.1):

$$H = 3 \cdot 1 - 5 = -2,$$

где $D = 1$, $C_0 = 5$, $C_B = 0$.

2. Выбираем основную систему, отбросив две связи в опоре B (рис. 15.20, а). Полученная основная система является *статически определимой и кинематически неизменяемой*.

3. Строим эквивалентную систему (рис. 15.20, в), приложив к основной системе заданную нагрузку и неизвестные лишние силы X_1 и X_2 , заменяющие отброшенные связи.

4. Составляем для эквивалентной системы канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

5. Строим в основной системе эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (рис. 15.20, г, д):

$$0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м};$$

$$M_{x_1} = -\frac{px_1^2}{2}; M_{x_1=0} = 0; M_{x_1=2} = -\frac{10 \cdot 2^2}{2} = -20 \text{ кН/м};$$

$$M_{x_2} = p \cdot 2 \cdot 1 = -10 \cdot 2 \cdot 1 = -20 \text{ кН/м}.$$

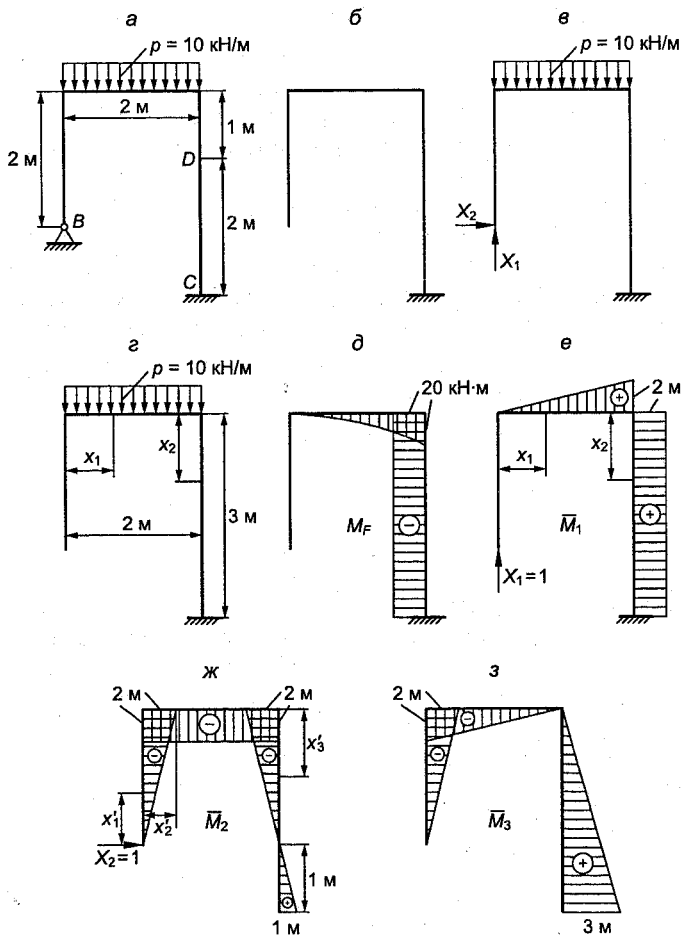


Рис. 15.20

6. Строим в основной системе эпюры изгибающих моментов от единичных сил, заменяющих неизвестные силы X_1 и X_2 (рис. 15.20, е, ж):

$$0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м};$$

$$M_{x_1} = 1 \cdot x_1; M_{x_1=0} = 0; M_{x_1=2} = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}; M_{x_2} = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м};$$

$$0 \leq x'_1 \leq 2 \text{ м};$$

$$M_{x'_1} = 1 \cdot x'_1; M_{x'_1=0} = 0; M_{x'_1=2} = -1 \cdot 2 = -2 \text{ м};$$

$$M_{x'_2} = -1 \cdot 2 = -2 \text{ м};$$

$$M_{x'_3} = 1 \cdot x'_3 - 2; M_{x'_3=0} = -2 \text{ м}; M_{x'_3=3} = 1 \cdot 2 - 2 = 0 \text{ м}.$$

7. Определяем коэффициенты канонических уравнений, используя способ Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1}{EI_z} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{EI_z} = \frac{44}{3EI_z};$$

$$\delta_{22} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1}{EI_z} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{EI_z} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3}}{EI_z} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}}{EI_z} = \frac{41}{3EI_z};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{EI_z} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{EI_z} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2}{EI_z} = \frac{7}{EI_z};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 1}{EI_z} - \frac{20 \cdot 3 \cdot 2}{EI_z} = \frac{140}{EI_z};$$

$$\Delta_{2F} = -\frac{\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 2 \cdot 2}{EI_z} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 20}{EI_z} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 20}{EI_z} = \frac{170}{EI_z};$$

8. Проводим проверку правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений, для чего строим в основной системе суммарную \overline{M}_s единичную эпюру моментов (рис. 15.20, з). Умножая эпюру \overline{M}_s саму на себя,

в результате должны получить сумму коэффициентов при всех неизвестных членах в уравнениях:

$$\delta_{ss} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3}}{EI_z} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3}}{EI_z} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2}{EI_z} = \frac{43}{EI_z}.$$

Сложив коэффициенты всех членов уравнений, получим ту же величину

$$\delta_{\Sigma} = \frac{44}{3EI_z} + \frac{41}{3EI_z} - 2 \frac{7}{EI_z} = \frac{43}{3EI_z}.$$

Следовательно, все коэффициенты вычислены верно. Умножим грузовую эпюру на суммарную единичную, получим

$$\Delta_{sF} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{EI_z} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 20}{EI_z} = \frac{250}{3EI_z};$$

$$\Delta_{\Sigma} = \frac{170}{3EI_z} - \frac{140}{EI_z} = \frac{250}{3EI_z}.$$

Сложив все свободные члены уравнений, убеждаемся, что они вычислены правильно.

9. Подставляем найденные значения коэффициентов в канонические уравнения и находим лишние неизвестные X_1 и X_2 :

$$\frac{44}{3EI_z} X_1 - \frac{7}{EI_z} X_2 - \frac{140}{EI_z} = 0;$$

$$-\frac{7}{EI_z} X_1 + \frac{41}{3EI_z} X_2 + \frac{170}{3EI_z} = 0.$$

После упрощения уравнений получим:

$$\frac{44}{3} X_1 - 7 X_2 - 140 = 0;$$

$$-7 X_1 + \frac{41}{3} X_2 + \frac{170}{3} = 0.$$

Откуда $X_2 = 0,983$ кН, $X_1 = 10,015$ кН.

Положительное значение сил X_1 и X_2 указывает, что их направление совпадает с направлением единичных сил.

10. Проверяем правильность решения канонических уравнений, подставляя в них значения X_1 и X_2 :

$$\frac{44}{3}10,015 - 7 \cdot 0,983 - 140 = 146,887 - 146,881;$$

$$-7 \cdot 10,015 + \frac{41}{3}0,983 + \frac{170}{3} = -70,105 + 70,101.$$

Наибольшая погрешность $\Delta = \frac{0,006}{147}100 = 0,004\%$, что вполне допустимо.

11. Строим эпюры изгибающих моментов нормальных и поперечных сил. Найденные значения неизвестных будем рассматривать как внешние силы, приложенные к основной системе. Умножая ординаты единичных эпюр на значения неизвестных X , строим «исправленные» эпюры $\bar{M}_1 X_1$, $\bar{M}_2 X_2$ (рис. 15.21, а, б). На рис. 15.21, в, г, д и 15.22, а, б, в представлены эпюры поперечных и нормальных сил в основной системе от сил X_1 и X_2 и заданной нагрузки.

Суммарные эпюры внутренних силовых факторов в заданной системе M_Σ , Q_Σ , N_Σ получаются простым суммированием эпюр от внешней нагрузки и от сил X_1 и X_2 в характерных сечениях основной системы (рис. 15.21, е; 15.22, г, д). Суммарная эпюра Q_Σ на горизонтальном элементе (ригеле) системы пересекает ось. Следовательно, изгибающий момент в этом сечении будет иметь экстремум. Вычислим экстремальное значение момента:

$$Q_x = X_1 - px_3 = 0; x_{\text{экс}} = \frac{X_1}{p} = \frac{10,015}{10} = 1,002 \text{ м};$$

$$M_{\Sigma 3} = X_1 x_{\text{экс}} - X_2 2 - \frac{px_{\text{экс}}^2}{2} = 10,015 \cdot 1,002 -$$

$$-0,983 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 1,002^2}{2} = 3,049 \text{ кН/м}.$$

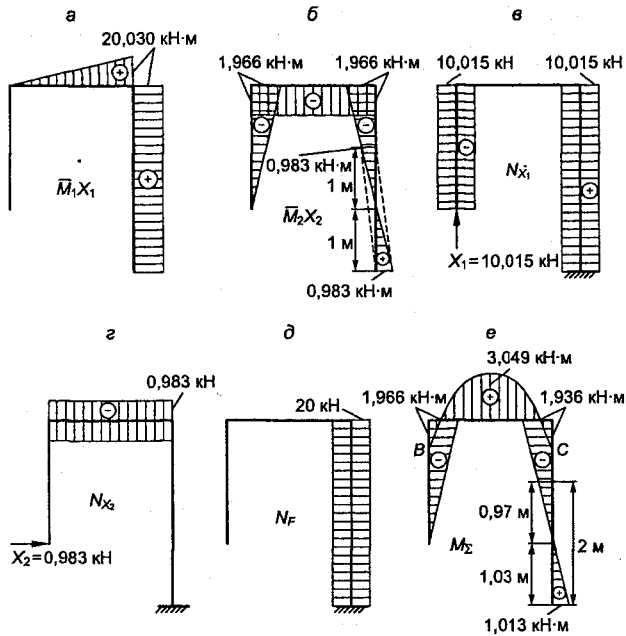


Рис. 15.21

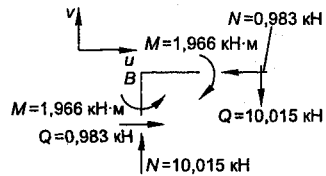
12. Проводим проверку правильности построения эпюр по равновесию узлов и по дифференциальным зависимостям между внутренними силовыми факторами.

Узел B

$$\sum m_B = M_{BC} - M_{BD} = 1,966 - 1,966 = 0;$$

$$\sum v = N - Q = 10,015 - 10,015 = 0;$$

$$\sum u = Q - N = 0,983 - 0,983 = 0.$$



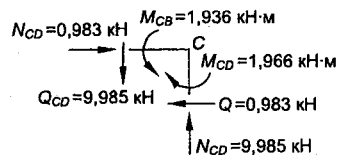
Узел находится в равновесии, так как все уравнения удовлетворяются.

Узел C

$$\sum m_C = 1,936 - 1,936 = 0;$$

$$\sum v = N_{CD} - Q_{CB} = 9,385 - 9,385 = 0;$$

$$\sum u = 0,983 - 0,983 = 0.$$



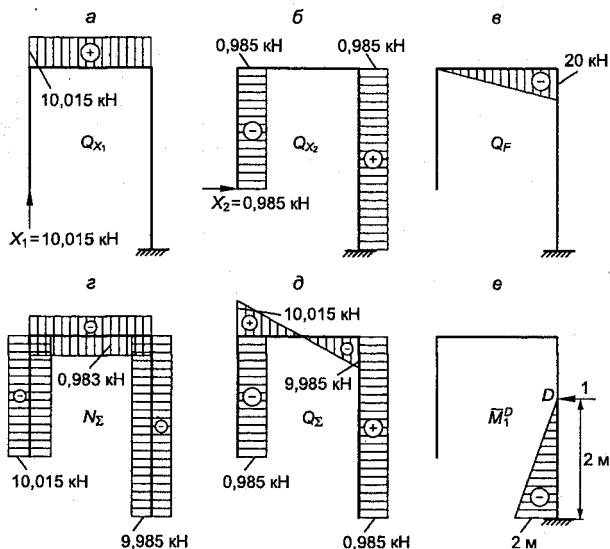


Рис. 15.22

Узел находится в равновесии. Дифференциальные зависимости для всех эпюр выполняются.

Конечной проверкой правильности решения статически неопределимой системы служит *деформационная проверка*, устанавливающая отсутствие перемещений по направлению отброшенных связей, что определяется перемножением эпюры суммарного момента M_{Σ} на каждую из единичных эпюр. Результат перемножения должен равняться нулю:

$$\Delta_{1F} = \frac{\Omega_F \bar{M}_1}{EI_z} = \frac{10 \cdot 2^3}{12} - \frac{1}{2} \cdot 1,966 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1,936 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1,936 \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1,013 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{9,706 - 9,700}{EI_z}$$

$$\text{Погрешность } \Delta = \frac{9,706 - 9,700}{9,700} 100\% = 0,06\%$$

$$\Delta_{2F} = \frac{\Omega_F \bar{M}_2}{EI_z} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,966 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^3}{12} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1,966 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1,936 \cdot 2 \cdot 2}{EI_z} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,013 \cdot 3 \cdot 1}{EI_z} = \frac{13,329 - 13,333}{EI_z}$$

$$\text{Погрешность } \Delta = \frac{13,329 - 13,333}{13,329} \cdot 100\% = 0,03\%$$

Результат перемножения эпюр указывает на правильность определения неизвестных сил.

13. Подбираем поперечное сечение. Из эпюры M_{Σ} следует, что опасное сечение имеет место на ригеле, где $M_{\max} = 3,049 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и $N = 0,983 \text{ кН}$. Размеры квадратного сечения без учета нормальных сил

$$a = \sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 3,049 \cdot 10^5}{16\,000}} = 4,85 \text{ см.}$$

Принимаем $a = 4,9 \text{ см}$.

Проводим проверку прочности выбранного сечения с учетом нормальных сил по формуле

$$\frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Подставляя величины, получим

$$\frac{3,049 \cdot 10^5 \cdot 6}{4,9^3} + \frac{0,983 \cdot 10^3}{4,9^2} = 15597 \leq [\sigma] = 16000 \text{ Н/см}^2.$$

Недонапряжение $\frac{16000 - 15597}{16000} \cdot 100\% = 2,5\%$, что допустимо.

Определяем перемещение точки D , для чего к основной системе в точке D прикладываем единичную силу (рис. 15.22),

и строим эпюру \bar{M}_1^D . Перемножая эпюры M_F , $\bar{M}_1 X_1$, $\bar{M}_2 X_2$ на единичную эпюру \bar{M}_1^D , находим искомое перемещение:

$$\Delta_1(F, X_1, X_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 20,030 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,983 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1}{EI_z} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,983 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1}{EI_z} = \frac{0,716}{EI_z} = \frac{0,716 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^7 \cdot 48,04} = -0,75 \text{ см.}$$

Знак «-» указывает, что точка D перемещается противоположно направлению единичной силы.

Проверим результат, умножая суммарную эпюру M_Σ (см. рис. 15.21) на единичную эпюру (рис. 15.22, е):

$$\Delta_1(F, X_1, X_2) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 1,013 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,954 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1}{EI_z} =$$

$$= -\frac{0,715 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^7 \cdot 48,04} = -0,75 \text{ см.}$$

Результат получили прежний.

Пример 15.7. Построить эпюры внутренних силовых факторов и подобрать сечение в виде двутавра для рамы (рис. 15.23, а), если $[\sigma] = 16000 \text{ Н/см}^2$, жесткость всех стержней рамы одинакова. Материал - сталь $E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$.

Решение.

1. Находим степень статической неопределимости системы:

$$H = 3 \cdot 4 - 6 - 10 = -4,$$

где $D = 4$, $C_0 = 6$, $C_B = 10$.



Рис. 15.23

2. Выбираем основную систему. Так как рама обладает геометрической симметрией, то целесообразно принять симметричную основную систему, разрезав раму по шарнирам (рис. 15.23, б). Заменяв четыре связи неизвестными силами X_1, X_2, X_3, X_4 (рис. 15.23, в), составим для эквивалентной системы канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3F} = 0;$$

$$\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4F} = 0.$$

Так как X_1 и X_3 являются симметричными, а X_2 и X_4 кососимметричными силовыми факторами, то в уравнениях все коэффициенты, у которых один индекс принадлежит симметричному, а другой – кососимметричному силовому фактору, будут равны нулю:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{14} = \delta_{41} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{34} = \delta_{43} = 0.$$

Кроме того, замечаем, что внешняя нагрузка является симметричной, следовательно, $\Delta_{2F} = \Delta_{4F} = 0$, а значит, кососимметричные силовые факторы X_2 и X_4 в плоскости симметрии обращаются в нуль:

$$X_2 = 0; X_4 = 0.$$

Исключая из системы уравнений все члены, обращающиеся в нуль, получим

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

3. Строим эпюры в основной системе от единичных сил, заменяющих неизвестные силы X_1 и X_3 и заданной нагрузки (рис. 15.24, а, б, в), а также суммарную эпюру от единичных сил \bar{M}_s (рис. 15.24, г).

4. Определяем все коэффициенты уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI_z} = \frac{16}{3EI_z};$$

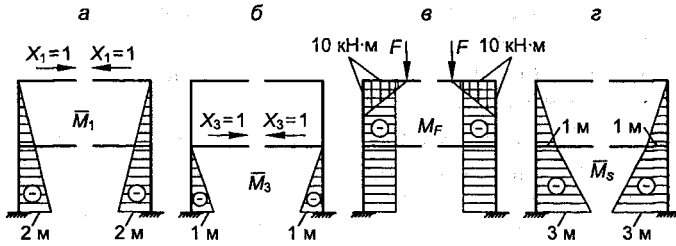


Рис. 15.24

$$\delta_{33} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}{EI_z} = \frac{2}{3EI_z};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot 1}{EI_z} = \frac{5}{3EI_z};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1}{EI_z} = \frac{40}{3EI_z};$$

$$\Delta_{3F} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10}{EI_z} = \frac{10}{3EI_z}.$$

5. Проверяем правильность вычисления всех коэффициентов и свободных членов, для чего умножаем каждую единичную эпюру и эпюру от нагрузки на суммарную эпюру от единичных сил \bar{M}_s . При этом суммы коэффициентов в каждом уравнении должны равняться произведению соответствующей единичной эпюры на эпюру \bar{M}_s , а сумма свободных членов уравнений - произведению эпюры \bar{M}_F от нагрузки на эпюру \bar{M}_s . В данном случае эпюру \bar{M}_s умножать саму на себя нельзя, так как из уравнений исключены коэффициенты при неизвестных силах X_2 и X_4 .

$$\delta_{1s} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot 1}{EI_z} = \frac{21}{3EI_z};$$

$$\delta_{1\Sigma} = \frac{16}{3EI_z} + \frac{5}{3EI_z} = \frac{21}{3EI_z};$$

$$\delta_{3s} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1}{EI_z} = \frac{7}{3EI_z};$$

$$\delta_{3\Sigma} = \frac{5}{3EI_z} + \frac{2}{3EI_z} = \frac{7}{3EI_z};$$

$$\Delta_{sF} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10}{EI_z} = \frac{50}{EI_z};$$

$$\delta_{\Sigma} = \frac{40}{EI_z} + \frac{10}{EI_z} = \frac{50}{EI_z}.$$

Таким образом, вычисления проведены правильно.

6. Подставляем полученные величины коэффициентов в уравнения и находим лишние неизвестные X_1 и X_3 :

$$\frac{16}{3}X_1 + \frac{5}{3}X_3 + 40 = 0;$$

$$\frac{5}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_3 + 10 = 0.$$

$$X_1 = -12,857 \text{ кН}; X_3 = 17,143 \text{ кН}.$$

Знак «—» указывает, что направление силового фактора X_1 нужно изменить на обратное.

7. Строим суммарные эпюры изгибающих моментов нормальных и поперечных сил путем суммирования эпюр от найденных значений неизвестных X_1 , X_3 и заданной нагрузки в характерных точках основной системы. Исправленные единичные эпюры $\bar{M}_1 X_1$, $\bar{M}_3 X_3$, эпюры нормальных и поперечных сил в основной системе от сил X_1 и X_3 от внешней нагрузки представлены на рис. 15.25, а, б, в, г, д, е. Суммарные эпюры M_{Σ} , N_{Σ} , Q_{Σ} на рис. 15.25, ж, з, и.

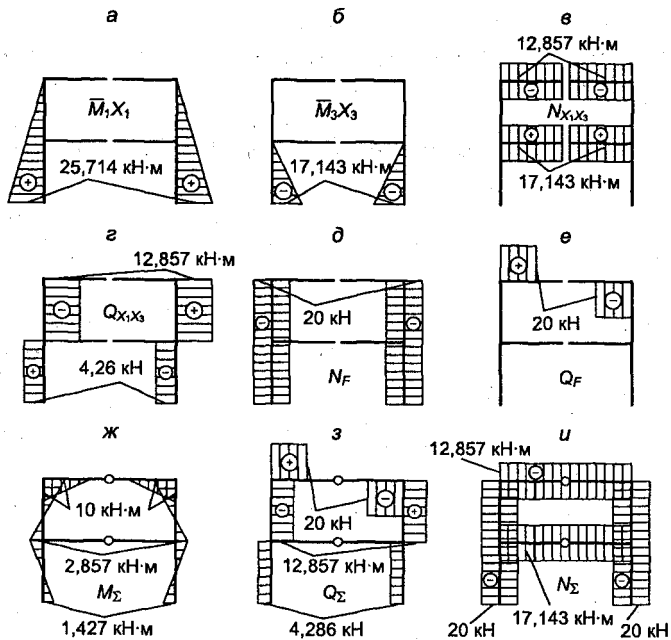


Рис. 15.25

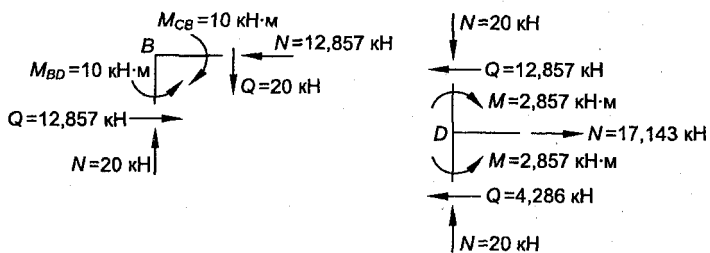


Рис. 15.26

8. Статическая проверка показывает, что все узлы находятся в равновесии (рис. 15.26) и дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами выполняются.

$$\sum m_B = M_{CD} - M_{BD} = 10 - 10 = 0;$$

$$\sum u = Q - N = 12,857 - 12,857 = 0;$$

$$\sum V = N - Q = 20 - 20 = 0;$$

$$\sum m_D = 2,857 - 2,857 = 0;$$

$$\sum u = 12,857 + 4,286 - 17,143 = 0;$$

$$\sum V = 20 - 20 = 0;$$

Таким образом, эпюры внутренних силовых факторов построены верно.

Результат умножения суммарной эпюры M_Σ на суммарную эпюру единичных сил \bar{M}_S указывает на правильность определения лишних неизвестных:

$$\Delta_{SF} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,857 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1}{EI_z} +$$

$$+ \frac{-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,857 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,427 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 1\right) \cdot 1}{EI_z} = \frac{-5,714 + 5,711}{EI_z}.$$

$$\text{Погрешность } \Delta = \frac{0,003}{5,711} \cdot 100\% = 0,053\%.$$

9. Опасным является сечение на стойке у узла B , где $M_{\max} = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $N = 20 \text{ кН}$.

Подбираем сечение $W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^5}{16000} = 62,5 \text{ см}^3$. Выбираем двутавр №14, $W_z = 81,7 \text{ см}^3$, $A = 17,4 \text{ см}^2$.

Проверяем прочность выбранного сечения с учетом нормальной силы:

$$\frac{10 \cdot 10^5}{81,7} + \frac{20 \cdot 10^3}{17,4} = 13389 < [\sigma] = 16000 \text{ Н/см}^2.$$

Недонапряжение $\frac{16000 - 13389}{16000} \cdot 100\% = 16,3\%$, что превышает допустимое значение 5%. Проверим ближайший меньший профиль №12, $W_z = 58,4 \text{ см}^3$, $A = 14,7 \text{ см}^2$.

Перенапряжение $\frac{18484-16000}{16000}100\%=15,5\%$, что значительно

не превышает допустимое значение. Так как промежуточный профиль отсутствует, то следует принять профиль №14, хотя его несущая способность используется недостаточно.

Пример 15.8. Построить эпюру изгибающих моментов и подобрать прямоугольное сечение для кольцевой рамы радиусом $R = 20$ см, нагруженной двумя силами $F = 25$ кН, а также определить перемещение сечения D (рис. 15.27). Материал – сталь $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см²; $[\sigma] = 16000$ Н/см².

Решение. Рама является трижды статически неопределимой системой. Условия симметрии рамы относительно вертикального и горизонтального диаметра позволяют для расчета рассмотреть одну ее четверть, при этом поперечная сила в сечении

будет равна нулю, а нормальная сила $N = \frac{F}{2}$ (рис. 15.28). Таким

образом, неизвестным в сечении будет только один внутренний силовой фактор – изгибающий момент X_1 , для определения которого напишем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Для вычисления коэффициентов уравнения воспользуемся интегралом Максвелла – Мора. Составим уравнения изгибающих моментов для произвольного сечения с угловой координатой φ от силы N и от единичного момента, заменяющего неизвестный момент X_1 (рис. 15.29):

$$M_F = -\frac{FR}{2}(1 - \cos\varphi), \quad \bar{M}_1 = 1;$$

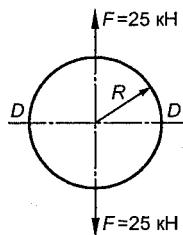


Рис. 15.27

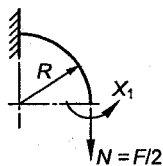
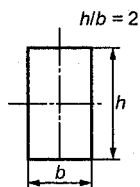


Рис. 15.28

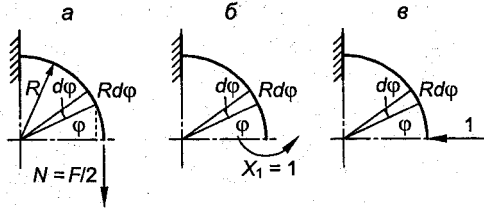


Рис. 15.29

$$\delta_{11} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI_z} R d\varphi = \frac{R}{EI_z} \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{R\pi}{2EI_z} = \frac{0,20 \cdot 3,14}{2EI_z} = \frac{0,314}{EI_z};$$

$$\Delta_{1F} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_F \bar{M}_1}{EI_z} R d\varphi = - \int_0^{\pi/2} \frac{F}{2EI_z} R(1 - \cos\varphi) \cdot 1 \cdot R d\varphi =$$

$$= - \frac{FR^2(\pi - 2)}{4EI_z} = - \frac{25 \cdot 0,20^2(3,14 - 2)}{4EI_z} = - \frac{0,285}{EI_z}.$$

Подставляя коэффициенты в каноническое уравнение и решая его, получим

$$\frac{0,314}{EI_z} X_1 - \frac{0,285}{EI_z} = 0; \quad X_1 = 0,908 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Изгибающий момент в сечении с угловой координатой φ будет равен

$$M_\varphi = X_1 - \frac{FR}{2}(1 - \cos\varphi) = 0,908 - \frac{25 \cdot 0,2}{2}(1 - \cos\varphi) = 0,908 - 2,5(1 - \cos\varphi);$$

$$M_{\varphi=0} = 0,908 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{\varphi=90} = 0,908 - 2,5 \cdot 1 = -1,592 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Нормальная сила в поперечном сечении с координатой φ равна

$$N_\varphi = \frac{F}{2} \cos\varphi; \quad N_{\varphi=0} = \frac{F}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ кН}; \quad N_{\varphi=90} = 0.$$

Поперечная сила в сечении будет

$$Q_\varphi = \frac{F}{2} \sin\varphi; \quad Q_{\varphi=0} = 0; \quad Q_{\varphi=90} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ кН}.$$

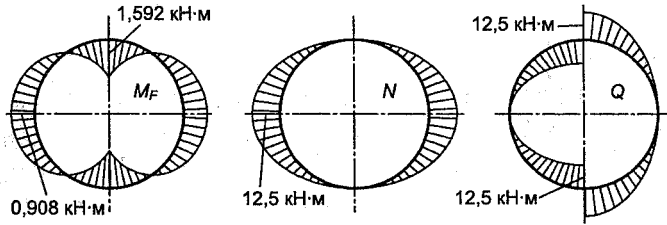


Рис. 15.30

Эпюры внутренних силовых факторов для кольцевой рамы показаны на рис. 15.30.

Поперечное сечение определим из условия прочности на изгиб:

$$b = 3 \sqrt{\frac{3M_{\max}}{2[\sigma]}} = 3 \sqrt{\frac{3 \cdot 1,592 \cdot 10^5}{2 \cdot 16000}} = 2,5 \text{ см};$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3} b^3; \quad h = 5 \text{ см}.$$

Перемещение сечения D найдем, используя интеграл Максвелла - Мора. Для этого приложим в точке D единичную силу и запишем уравнение изгибающего от нее момента (рис. 15.29, в):

$$\bar{M}_{1\varphi} = -R \sin \varphi - 1 = -20 \sin \varphi.$$

Подставляя в интеграл Максвелла - Мора M_{φ} и $\bar{M}_{1\varphi}$, найдем перемещение сечения D :

$$\Delta_D = - \int_0^{\pi/2} \frac{[0,908 - 2,5(1 - \cos \varphi)] \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \sin \varphi}{2 \cdot 10^7 \cdot 2,5 \cdot 5^3} d\varphi = 0,026 \text{ см} = 0,26 \text{ мм}.$$

Пример 15.9. Определить усилия в стержнях статически неопределимой фермы, изображенной на рис. 15.31, а, если жесткости стержней одинаковы, нагрузка $F = 50$ кН.

Решение. Находим, как и для рамных систем, степень статической неопределимости фермы:

$$H = 3 \cdot 13 - 4 - 36 = -1,$$

где $D = 13$, $C_0 = 4$, $C_B = 2 \cdot 2 - 2(4 - 2) \cdot 2 + 2(3 - 1) \cdot 3 + 2(5 - 7) = 36$.

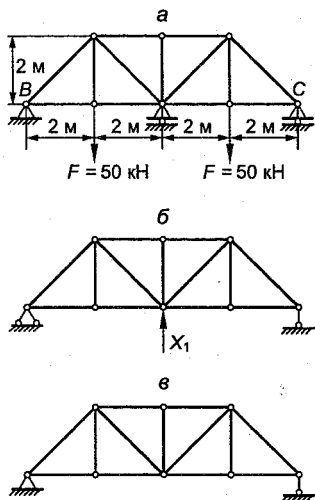


Рис. 15.31

Ферма 1 раз внешне статически неопределима.

За лишнюю неизвестную примем реакцию средней опоры X_1 (рис. 15.31, б). Основная система показана на рис. 15.31, в. При расчете ферм требуется строго следить за тем, чтобы основная система была кинематически неизменяемой. Поэтому нужно дополнительно проверять структуру образования фермы (чтобы она состояла из шарнирных треугольников) и характер ее опорных связей.

Принятая основная система структурно образована правильно. Каноническое уравнение метода сил будет

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Для определения коэффициентов δ_{11} и Δ_{1F} необходимо найти усилия во всех стержнях от силы $X_1 = 1$, заменяющей неизвестную силу X_1 , и от заданной нагрузки. Так как стержни работают на растяжение и сжатие, то перемещения δ_{ik} будут определяться только нормальными силами, действующими в стержнях. Поскольку нормальные силы по длине стержней не меняются, то построение эпюр становится излишним. Удобно составлять таблицу усилий в стержнях от заданной нагрузки и единичных сил. Определение усилий в стержнях в настоящее время проводится преимущественно аналитическими способами. Аналитические способы расчета начинаются с нахождения опорных реакций, которые вычисляются из уравнений равновесия, составляемых для всей системы как жесткого целого. Затем из системы исключаются стержни, усилия в которых заведомо равны нулю.

Так, если в двухстержневом узле (рис. 15.32, а) нагрузка к узлу не приложена, то в обоих стержнях нормальные силы отсутствуют; если нагрузка приложена по направлению одного стержня (рис. 15.32, б), то усилие в нем равно приложенной силе, а в другом стержне - равно нулю. В ненагруженном трехстержневом узле (рис. 15.32, в), в котором два стержня распо-

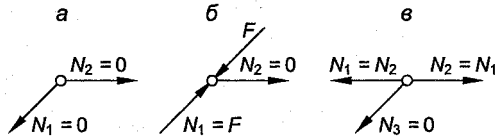


Рис. 15.32

лагаются по одной прямой, а третий под некоторым углом к ним, усилия в первых двух стержнях равны между собой, а в третьем стержне усилие отсутствует.

Для определения внутренних усилий используют *способ вырезания узлов* и *способ сквозных сечений*, подразделяющийся на способ моментной точки и способ проекций.

Сечениями выделяют отдельные узлы или части фермы, а затем рассматривают условия их равновесия под действием внешних сил и усилий в рассеченных стержнях.

Найдем усилия во всех стержнях основной системы от заданной нагрузки (рис. 15.33).

Опорные реакции

$$B_y = C_y = 50 \text{ кН.}$$

Исключаем из рассмотрения стержни, усилия в которых равны нулю. Таким стержнем будет N_{3-4} .

Вырезаем узел B и из условия равновесия узла находим усилия N_{B-1} и N_{B-2} (рис. 15.34):

$$B_y + N_{B-1} \sin 45^\circ = 0;$$

$$N_{B-1} = -B_y \frac{2}{\sqrt{2}} = -50 \cdot 1,414 = -70,72 \text{ кН;}$$

$$N_{B-1} \cos 45^\circ + N_{B-2} = 0;$$

$$N_{B-2} = -N_{B-1} \frac{2}{\sqrt{2}} = 70,72 \cdot 0,707 = 50 \text{ кН.}$$

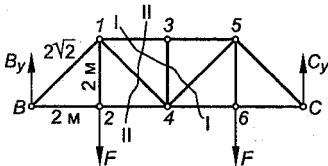


Рис. 15.33

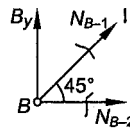


Рис. 15.34

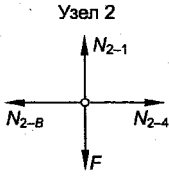


Рис. 15.35

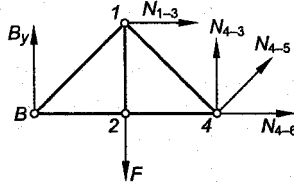


Рис. 15.36

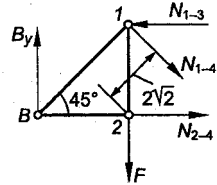


Рис. 15.37

Знак « \leftarrow » показывает, что стержень N_{B-1} сжат (усилие направлено к узлу B).

Вырезаем узел 2, где сходятся три стержня и приложена сила F (рис. 15.35).

Из схемы узла следует:

$$N_{2-4} = N_{2-B} = 50 \text{ кН};$$

$$N_{2-1} = F = 50 \text{ кН}.$$

Для определения усилия N_{1-3} проведем сквозное сечение I - I и напишем уравнение моментов для левой отсеченной части относительно узла 4 (рис. 15.36):

$$\sum m_4 = B_y \cdot 4 + N_{1-3} \cdot 2 - F \cdot 2 = 0;$$

$$N_{1-3} = F - 2B_y = 50 - 100 = -50 \text{ кН}.$$

Стержень N_{1-3} сжат.

Проведем сквозное сечение II - II и из уравнения моментов относительно узла 2 найдем усилие N_{1-4} (рис. 15.37):

$$\sum m_2 = B_y \cdot 2 + N_{1-4} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{1-3} \cdot 2 = 0;$$

$$N_{1-4} = N_{1-3} \sqrt{2} - \sqrt{2} B_y = 50\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 50 = 0.$$

Так как ферма обладает геометрической симметрией и симметрией нагрузки, то усилия в симметрично расположенных стержнях правой части фермы будут одинаковыми. Значения усилий во всех стержнях приведены в табл. 15.1. В ней также представлены усилия в стержнях от единичной силы $X_1 = 1$, определение которых проводится аналогично.

Таблица 15.1

№ стержня	l , м	N_F , кН	\bar{N}_1	$\bar{N}_1^2 l$, м	$\bar{N}_1 N_F l$, кН·м	$\bar{N}_1 X_1$, кН	$N = N_F + \bar{N}_1 X_1$, кН
В-1	2,83	-70,72	0,707	1,415	-141,497	41,42	-29,3
В-2	2	50	-0,500	0,5	-50	-29,29	20,71
2-4	2	50	-0,500	0,5	-50	-29,29	20,71
2-1	2	50	0	0	0	0	50
1-3	2	-50	1	2,0	-100	58,58	8,58
1-4	2,83	0	-0,707	1,415	0	-41,42	-41,42
3-4	2	0	0	0	0	0	0
С-5	2,83	-70,72	0,707	1,415	-141,497	41,42	-29,3
С-6	2	50	-0,500	0,5	-50	-29,29	20,71
5-6	2	50	0	0	0	0	50
5-4	2,83	0	-0,707	1,415	0	-41,42	-41,42
3-5	2	-50	1	2,0	-100	58,58	8,58
6-4	2	50	-0,500	0,5	-50	-29,29	20,71
			$\Sigma 11,66$	$\Sigma -683$			

Применяя способ Верещагина, находим:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z} \sum_1^{13} \bar{N}_1^2 l = \frac{11,66}{EI_z};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_z} \sum_1^{13} \bar{N}_1 N_F l = \frac{683}{EI_z}.$$

Каноническое уравнение принимает следующий вид:

$$11,66 X_1 - 683 = 0.$$

Решая уравнение, получим:

$$X_1 = \frac{683}{11,66} = 58,58 \text{ кН}.$$

Усилия в стержнях определяются путем суммирования силы N_F и силы \bar{N}_1 , увеличенной в X_1 раз. В последней колонке табл. 15.1 приведены значения действующих усилий во всех стержнях заданной формы.

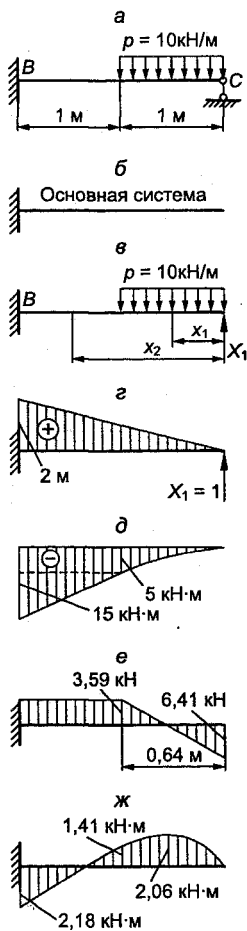


Рис. 15.38

Пример 15.10. Построить эпюры внутренних силовых факторов для балки, изображенной на рис. 15.38, а. Жесткость балки по всей длине одинакова.

Решение. Находим степень статической неопределенности.

$$H = 1 \cdot 3 - 4 = -1,$$

где $D = 1$, $C_0 = 4$, $C_B = 0$.

Выбираем основную систему, приняв за лишнюю неизвестную реакцию опоры C (рис. 15.38, б).

Соответствующая эквивалентная система показана на рис. 15.38, в. Каноническое уравнение перемещений одно:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Коэффициенты уравнения δ_{11} и Δ_{1F} определим по способу Верещагина. Эпюры изгибающих моментов в основной системе от заданной нагрузки и единичной силы $X_1 = 1$ приведены на рис. 15.38, в, г, д.

$$\delta_{11} = \frac{\Omega_1 \bar{M}_1^C}{EI_z} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}}{EI_z} = \frac{8}{3EI_z},$$

$$\Delta_{1F} = \frac{\Omega_F \bar{M}_1^C}{EI_z} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{5}{3} \cdot 1}{EI_z} = \frac{205}{12EI_z}.$$

Решая каноническое уравнение, получим:

$$\frac{8}{3}X_1 - \frac{205}{12} = 0; \quad X_1 = 6,41 \text{ кН.}$$

Строим эпюры M и Q :

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м;}$$

$$M_{x_1} = 6,41x_1 - 10\frac{x_1^2}{2}; M_{x_1=0} = 0; M_{x_1} = 6,41 - 5 = 1,41 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_{x_1} = -6,41 + 10x_1, Q_{x_1=0} = -6,41 \text{ кН}, Q_{x_1=1} = -6,41 + 10 = 3,59 \text{ кН};$$

$$x_{\text{экс}} = \frac{6,41}{10} = 0,641 \text{ м}, M_{x_{\text{экс}}} = 6,41 \cdot 0,641 - \frac{10 \cdot 0,641^2}{2} = 2,06 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м};$$

$$M_{x_2} = 6,41x_2 - 10 \cdot 1(x_2 - 0,5), M_{x_2=2} = 6,41 \cdot 2 - 15 = -2,18 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Эпюры M и Q показаны на рис. 15.38, *е, ж*.

Пример 15.11. Построить эпюры внутренних силовых факторов для неразрезной балки, изображенной на рис. 15.39, *а*.

Решение. При расчете подобных балок удобно в качестве основной принимать систему, получаемую из заданной врезанием на промежуточных опорах шарниров. При таком выборе основной системы неразрезная балка распадается на отдельные однопролетные балки, имеющие по одной общей опоре. Лишними неизвестными являются изгибающие моменты в опорных сечениях, которые определяются из условий отсутствия взаимных углов поворота сечений над опорами. Эпюры моментов от заданных нагрузок и опорных единичных моментов в каждом пролете строятся, как для свободной двухопорной балки. Находим степень статической неопределимости системы:

$$H = 1 \cdot 3 - 5 = -2,$$

где $D = 1$, $C_0 = 5$, $C_B = 0$.

В качестве основной принимаем систему с врезанными на опорах C и D шарнирами (рис. 15.39, *б*). Эквивалентная система показана на рис. 15.39, *в*.

Эпюры моментов от заданных нагрузок и опорных единичных моментов представлены на рис. 15.39, *г, д, е*.

Канонические уравнения метода сил имеют следующий вид:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Применяя правило Верещагина, определим коэффициенты уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{EI_z} = \frac{4}{3EI_z};$$

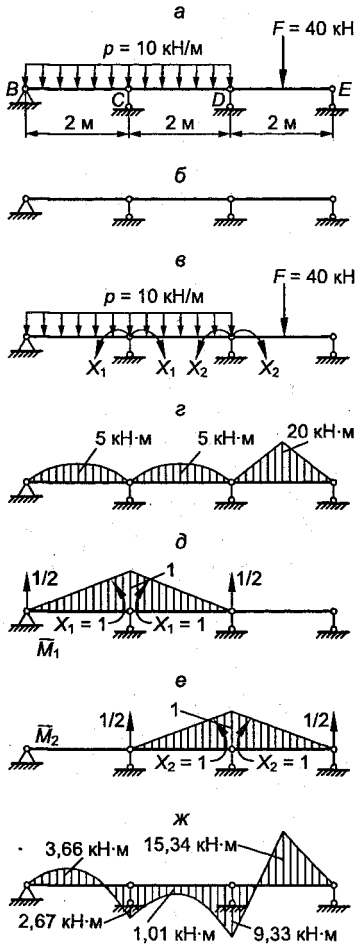


Рис. 15.39

$$\delta_{22} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{EI_z} = \frac{4}{3EI_z};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{EI_z} = \frac{1}{3EI_z};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{EI_z} = \frac{20}{3EI_z};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}{EI_z} =$$

$$= \frac{40}{3EI_z}.$$

Решая систему канонических уравнений, получим:

$$\frac{4}{3EI_z} X_1 + \frac{1}{3EI_z} X_2 + \frac{20}{3EI_z} = 0;$$

$$\frac{1}{3EI_z} X_1 + \frac{4}{3EI_z} X_2 + \frac{40}{3EI_z} = 0;$$

$$X_2 = -9,33 \text{ кН}\cdot\text{м}, X_1 = -2,67 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x=3} = 5 - \frac{1}{2} \cdot 2,67 - \frac{1}{2} \cdot 9,33 =$$

$$= -1,01 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x=4} = 9,33 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x=5} = 20 - \frac{1}{2} \cdot 9,33 = 15,34 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_{x=6} = 0.$$

Для построения эпюры поперечных сил найдем реакции опор, для чего рассмотрим равновесия всех пролетов раз-

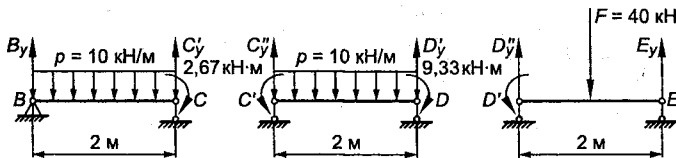


Рис. 15.40

дельно, прикладывая к ним кроме заданной нагрузки найденные опорные моменты (рис. 15.40).

Минус указывает, что моменты имеют обратное направление. Суммарная эпюра изгибающего момента получается путем сложения эпюр моментов от заданных сил с эпюрами от опорных моментов (рис. 15.39, ж).

$$M_{x=0} = 0; M_{x=1} = 5 - \frac{1}{2} \cdot 2,67 = 3,66 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_{x=2} = 2,67 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составляя сумму моментов относительно точек B, C, C', D, D', E , находим реакции опор $B_y, C'_y, C''_y, D'_y, D''_y$ и E_y . Полные реакции опор C и D будут равны сумме

$$C_y = C'_y + C''_y; D_y = D'_y + D''_y;$$

$$B_y \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 + 2,67 = 0; B_y = 8,67 \text{ кН};$$

$$C'_y \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - 2,67 = 0; C'_y = 11,34 \text{ кН};$$

$$C''_y \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - 2,67 + 9,33 = 0; C''_y = 6,67 \text{ кН};$$

$$D'_y \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - 9,33 + 2,67 = 0; D'_y = 13,33 \text{ кН};$$

$$D''_y \cdot 2 - 40 \cdot 1 - 9,33 = 0; D''_y = 24,67 \text{ кН};$$

$$E_y \cdot 2 - 40 \cdot 1 - 9,33 = 0; E_y = 15,32 \text{ кН};$$

$$C_y = 11,34 + 6,67 = 18,01 \text{ кН}; D_y = 13,33 + 24,67 = 38 \text{ кН}.$$

Заменяя опоры реакциями, строим обычным способом эпюру поперечных сил (рис. 15.41).

$$Q_{x1} = 8,67 - 10x_1; Q_{x1=0} = 8,67 \text{ кН};$$

$$Q_{x1=2} = 8,67 - 10 \cdot 2 = -11,33 \text{ кН};$$

$$Q_{x2} = 8,67 - 10x_2 + 18,01 = 26,68 - 10x_2;$$

$$Q_{x2=2} = 26,68 - 20 = 6,68 \text{ кН}; Q_{x2=4} = 26,68 - 40 = -13,32 \text{ кН};$$

$$Q_{x3} = 8,67 + 18,01 + 38 - 10 \cdot 4 = 24,68 \text{ кН}; Q_{x4} = -15,32 \text{ кН}.$$

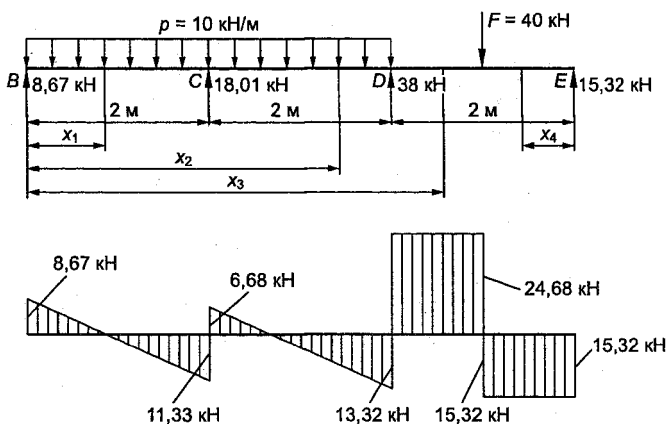


Рис. 15.41

Проверка правильности расчетов проводится аналогично, проверке для рамных конструкций.

15.9. Метод перемещений. Канонические уравнения метода перемещений

При решении статически неопределимых задач наряду с *методом сил* успешно, особенно в строительной механике, применяется *метод перемещений*. Фактически методы равнозначны. Их преимущества объясняются только особенностями статически неопределимых систем.

Принципиальное отличие метода перемещений от метода сил заключается в том, что при раскрытии статической неопределимости в качестве неизвестных принимаются не силы, а линейные и угловые перемещения жестких узлов.

Жесткими называются узлы, в которых концы сходящихся стержней жестко соединены между собой. Если в одном узле сходящиеся стержни собраны в несколько жестких групп, то считается, что такой узел имеет количество узлов, равное числу групп.

Так как в узлах стержни жестко соединены между собой, то при деформации системы углы поворота концевых сечений всех сходящихся в узле стержней будут равны (рис.15.42).

Следовательно, число неизвестных углов поворота φ_i в системе равно числу незакрепленных жестких узлов n_y .

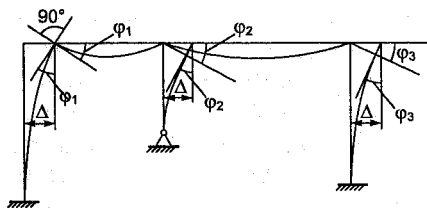


Рис. 15.42

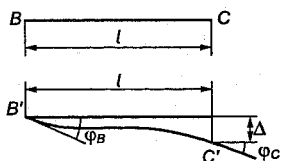


Рис. 15.43

При определении числа неизвестных линейных перемещений узлов пренебрегают влиянием поперечных и продольных сил на деформацию стержней, откуда следует, что расстояние между узлами, связанными прямыми стержнями, остается постоянным, равным начальному (рис. 15.43).

При принятых допущениях все узлы (см. рис. 15.42) имеют одинаковое линейное перемещение Δ , т.е. система имеет одно неизвестное линейное перемещение $\Delta_{\text{л}}$. Чтобы определить число неизвестных линейных перемещений узлов, расчетную схему заданной статически неопределимой системы превращают в геометрически изменяемую, устанавливая полные шарниры во все жесткие промежуточные и опорные узлы, а затем находят минимальное число связей (стержней), которое нужно добавить в полученную шарнирную систему для превращения ее в геометрически неизменяемую. Число дополнительных связей (стержней) $\Delta_{\text{л}}$ равняется числу независимых линейных перемещений узлов системы, т.е. степени геометрической изменчивости шарнирной схемы заданной системы, и определяется выражением

$$n_{\text{л}} = 2Y - C, \quad (15.22)$$

где Y - общее количество узлов в шарнирной схеме заданной системы, включая опорные; C - число стержней, включая опорные, в шарнирной схеме.

Если левая часть в формуле (15.22) равняется нулю, следует проверить, не является ли заданная система после замены всех жестких узлов шарнирами мгновенно изменяемой. В этом случае нужно добавить одну дополнительную связь для устранения в системе одного возможного линейного перемещения. Отсюда общее число неизвестных по методу перемещений, или степень статической неопределимости системы

$$n = n_{\text{y}} + n_{\text{л}}. \quad (15.23)$$

Для рамы (см. рис. 15.42) $n_y = 3$; $n_d = 1$; $n = 4$. Схемы решения задач по методу перемещений и методу сил аналогичны.

В качестве основной системы при расчете методом перемещений принимается заданная система, в которой исключаются угловые перемещения узлов введением дополнительных защемлений (заделок) и линейные перемещения узлов – введением дополнительных опорных стержней (опорных связей). Считается, что защемление препятствует только повороту узла, но разрешает ему линейные перемещения (часто эти связи называют *скользящими* или *плавающими*). В таких защемлениях возможны только реактивные моменты. Таким образом, *основная система отличается от заданной наличием дополнительных связей, в которых при действии внешних нагрузок будут возникать реактивные моменты и реактивные усилия, отсутствующие в заданной системе.* Чтобы основная система была эквивалентна заданной, ее узлам сообщают линейные и угловые перемещения Z_i по направлению дополнительных связей и прикладывают заданную нагрузку. Полученная система называется *эквивалентной*. Угловые и линейные перемещения узлов в эквивалентной системе принимаются за неизвестные, и их значения подбираются так, чтобы реактивные усилия во введенных дополнительных связях равнялись нулю. Физически это означает требование поворота защемлений на углы, равные действительным углам поворота узлов заданной системы, а линейных перемещений опорных стержней – на величины, равные действительным перемещениям заданной системы. Условия идентичности заданной и эквивалентной систем имеют следующий вид:

$$R_n = 0, \quad (15.24)$$

где R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – величины реактивных моментов и величины реактивных усилий во введенных дополнительных связях.

Введем следующие обозначения: r_{ii} – реактивный момент в защемлении i -го узла от поворота защемления этого же узла на единичный угол, а также реактивное усилие в дополнительном i -м опорном стержне от линейного перемещения этого же стержня на единицу; r_{ij} – реактивный момент в защемлении i -го узла от единичного поворота защемления j -го узла, а также реактивное усилие в дополнительном i -м опорном стержне от единичного поворота защемления j -го узла; R_{iF} – реактивный момент в защемлении i -го узла от внешней нагрузки, а также реак-

тивное усилие в i -м опорном стержне от внешней нагрузки; Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – действительный угол поворота i -го узла, а также действительное линейное перемещение i -го узла заданной системы.

Второй индекс у обозначений реакций указывает на причину, вызвавшую их. Используя принцип независимости действия сил и принятые обозначения, полную реакцию в i -й дополнительно введенной связи в эквивалентной системе запишем в виде

$$R_i = r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{in}Z_n + R_{iF} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (15.25)$$

где $r_{in}Z_n$ – реактивное усилие в i -й связи от соответствующих перемещений узлов заданной системы; R_{iF} – реакция в i -й связи от внешних сил.

Так как согласно (15.24) усилия во всех n дополнительных связях в эквивалентной системе должны равняться нулю, получим:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1F} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2F} &= 0; \\ \dots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nF} &= 0; \end{aligned} \quad (15.26)$$

Уравнения (15.26) называются **каноническими уравнениями метода перемещений**.

Отрицание реактивных моментов во введенных защемлениях и усилий в дополнительных опорных стержнях составляет суть канонических уравнений метода перемещений. Поэтому число уравнений равно числу возможных перемещений Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) узлов заданной системы по направлению дополнительных связей в эквивалентной системе.

Коэффициенты при неизвестных членах являются единичными реакциями и обладают свойством взаимности: $r_{ij} = r_{ji}$.

Свободные члены канонических уравнений называются **грузовыми реакциями**.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений считаются положительными, если направление действия реактивных усилий и моментов совпадают с направлениями угловых и линейных перемещений, принятых за неизвестные.

Необходимо отметить, что введение дополнительных связей расчленяет статически неопределимую систему на однопролетные статически неопределимые балки с одним или двумя защем-

ленными концами. Решения для таких балок получены заранее и используются в решениях различных задач (табл. П.30).

Все коэффициенты и свободные члены уравнений (15.26) разделяются на две группы: коэффициенты и свободные члены, представляющие собой реактивные моменты во введенных защемлениях и реактивные усилия в опорных связях.

Имеется два способа определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений: *статический*, основанный на использовании уравнений статики, и *общий*, основанный на теореме о взаимности работ.

Будем использовать первый (статический) способ как наиболее простой и доступный, позволяющий легко контролировать получаемые результаты. Для определения коэффициентов и свободных членов статическим способом необходимо в основной системе построить эпюры изгибающих моментов от действия внешней нагрузки (эпюра M_F) и от единичных перемещений узлов $Z_i = 1$.

Коэффициенты первой группы определяются вырезанием узлов и составлением уравнений равновесия моментов $\Sigma M = 0$. Коэффициенты второй группы определяются из уравнения равновесия сил, составленных для отсеченной части основной системы, при этом направление оси выбирается так, чтобы уравнение было наиболее простым.

Суммарная эпюра изгибающих моментов находится суммированием ординат эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки с ординатами единичных эпюр, умноженных на значения найденных неизвестных перемещений Z_i :

$$M_{\Sigma F} = M_F + M_{i1} Z_i \quad (i=1, 2 \dots n). \quad (15.27)$$

Значения поперечных сил равны опорным реакциям соответствующих стержней и находятся с помощью табл. П.30.

Проверка правильности построения суммарной эпюры изгибающих моментов проводится путем определения реактивных моментов во введенных защемлениях при использовании эпюры $M_{\Sigma F}$ или путем перемножения суммарной эпюры $M_{\Sigma F}$ на единичную эпюру, построенную для любой основной системы метода сил, т.е. определения перемещения в заданной системе, заведомо равного нулю. Результат должен равняться нулю.

При действии на *симметричную статически неопределимую систему симметричной нагрузки* деформации системы будут симметричными: углы поворота симметрично расположенных

узлов будут равными по величине и обратными по направлению, а линейные перемещения будут равны нулю.

При *кососимметричной нагрузке* угловые перемещения будут равны по величине и одинаковы по направлению, а линейные перемещения не будут равны нулю. Поэтому при симметричной нагрузке все кососимметричные перемещения будут равны нулю, а при кососимметричной нагрузке все симметричные перемещения будут равны нулю. *Использование симметрии системы в связи с обращением ряда коэффициентов в нуль позволяет значительно упростить решение задачи, особенно при расчете многопролетных систем.*

Пример 15.12. Для статически неопределимой рамы, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $p = 10 \text{ кН/м}$ и сосредоточенной силой $F = 20 \text{ кН}$, построить эпюры M , N , Q и подобрать сечение в виде квадрата. Жесткость всех стержней одинакова, $[\sigma] = 16000 \text{ Н/см}^2$ (рис. 15.44, а).

Решение.

1. Вычисляем степень статической неопределимости по формулам (15.22) и (15.23):

$$n_y = 1 \text{ (рис. 15.44, а);}$$
$$n_{\text{л}} = 2 \cdot 6 - 11 = 1 \text{ (рис. 15.44, б); } n = 1 + 1 = 2.$$

Таким образом, заданная рама имеет одно угловое и одно линейное неизвестное перемещение, т.е. она является дважды статически неопределимой.

2. Принимаем основную и эквивалентную системы. Основную систему выбираем путем постановки защемления в узле B , препятствующего неизвестному угловому перемещению, и постановки дополнительного опорного стержня в узле C , препятствующего неизвестному линейному перемещению (рис. 15.44, в). Приложив к основной системе внешнюю нагрузку и неизвестные перемещения Z_1 и Z_2 , получим эквивалентную систему, деформирующуюся одинаково с заданной (рис. 15.44, г).

3. Записываем систему канонических уравнений:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0;$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0.$$

Уравнения показывают, что суммарная реакция в каждой дополнительной связи от всех перемещений, действующих в эквивалентной системе, равна нулю.

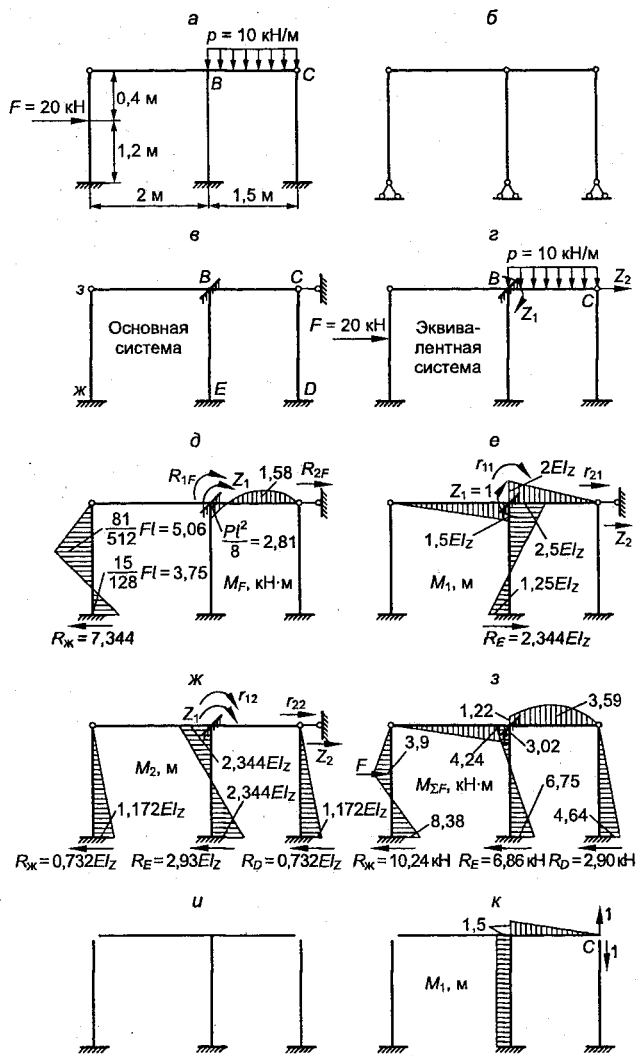
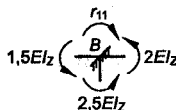


Рис. 15.44

4. Определяем коэффициенты канонических уравнений, для чего строим в основной системе эпюры изгибающих моментов от единичных перемещений и внешних нагрузок, используя табл. П.30.

Эпюры от единичных перемещений $Z_1 = 1$; $Z_2 = 1$ и от внешних нагрузок, построенные в основной системе, представлены на рис.15.44, *д, е, ж*.


Из уравнения равновесия узла *B* (эпюра M_1) определяем r_{11} :



$$r_{11} - 2EI_Z - 2,5EI_Z - 1,5EI_Z = 0,$$

откуда $r_{11} = 6EI_Z$.

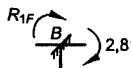
Из равновесия узла *B* (эпюра M_2) находим r_{12} :



$$r_{12} + 2,344EI_Z = 0,$$

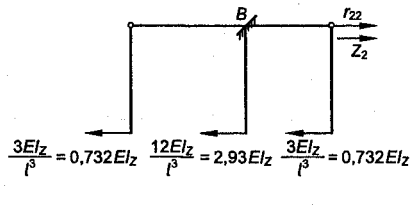
откуда $r_{12} = -2,344EI_Z = r_{21}$.

Реактивный момент R_{1F} определяем из условия равновесия узла *B* (эпюра M_F).



$$R_{1F} = -2,81 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Реактивное усилие r_{22} во введенном стержне находим из уравнения равновесия, составленного для отсеченной части рамы:

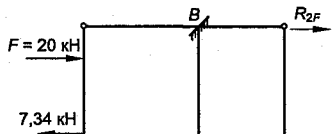


$$r_{22} - \frac{3EI_Z}{l^3} \cdot 2 - \frac{12EI_Z}{l^3} = 0,$$

откуда

$$r_{22} = \frac{18EI_Z}{l^3} = 4,394EI_Z.$$

Реактивное усилие R_{2F} во введенном стержне находим из условия равновесия отсеченной части рамы:



$$R_{2F} + 20 - 7,34 = 0,$$

$$R_{2F} = -12,66 \text{ кН}.$$

5. Подставляем значения коэффициентов и свободных членов в систему канонических уравнений. В результате решения находим значения перемещений:

$$6EI_Z Z_1 - 2,344EI_Z Z_2 - 2,81 = 0;$$

$$-2,344EI_Z Z_1 + 4,394EI_Z Z_2 - 12,66 = 0;$$

$$Z_1 = \frac{2,013}{EI_Z}; \quad Z_2 = \frac{3,955}{EI_Z}.$$

6. Строим суммарную эпюру изгибающих моментов, используя формулу (15.27).

$$M_{\text{ж}} = -3,75 - 1,172EI_Z \cdot \frac{3,955}{EI_Z} = -8,38 \text{ кНм};$$

$$M_E = 1,25EI_Z \cdot \frac{2,013}{EI_Z} - 2,344EI_Z \cdot \frac{3,955}{EI_Z} = -6,75 \text{ кНм};$$

$$M_D = 0,732EI_Z \cdot \frac{3,955}{EI_Z} = 2,90 \text{ кНм};$$

$$M_3 = 0; \quad M_B^{\text{гоп}} = 2,344EI_Z \cdot \frac{3,955}{EI_Z} - 2,5EI_Z \cdot \frac{2,013}{EI_Z} = 4,24 \text{ кНм};$$

$$M_F = 5,06 - 1,159 = 3,9 \text{ кНм};$$

$$M_B^{\text{верт}} = -2,81 + 2EI_Z \cdot \frac{2,013}{EI_Z} = 1,22 \text{ кНм};$$

$$M_C = 0;$$

$$M_D = 1,172EI_Z \cdot \frac{3,955}{EI_Z} = 4,64 \text{ кНм}.$$

Суммарная эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 15.44, з.

7. Проверяем правильность построения эпюры по условию равновесия узла *B* и внешних сил:

$$\sum M_B = 4,24 - 3,02 - 1,22 = 0;$$

$$\sum F_i = 20 - 10,24 - 6,86 - 2,90 = 0.$$

В качестве примера выполним деформационную проверку *метода сил*. Заданная система является 4 раза статически неопре-

делимой. Так как вертикальное перемещение в точке C равно нулю, то примем основную систему в виде (рис. 15.44, u). Эпюра от единичной силы построена на рис. 15.44, $к$. Результат умножения суммарной эпюры $M_{\Sigma F}$ на единичную равен нулю:

$$\Delta_c = \frac{1}{EI_Z} \left[\frac{10 \cdot 1,5^3}{12} - 0,75 + \frac{1}{2} \cdot 1,22 \cdot 1,5 - \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 4,24 \cdot 1,6 \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 6,75 \cdot 1,6 \cdot 1,5 \right] = 0.$$

8. Определяем размеры поперечного сечения. Опасным сечением является сечение $ж$, где $M_{\max} = 8,38$ кНм.

$$a = \sqrt[3]{\frac{8,38 \cdot 10^5 \cdot 6}{16000}} = 6,8 \text{ см.}$$

Глава 16

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

16.1. Понятие об усталостном разрушении

Многие детали машин при работе испытывают напряжения, циклически изменяющиеся во времени. Например, валы редукторов, шестерни, оси вагонов при вращении подвергаются действию периодически меняющихся сил. Действию переменных сил инерции подвергаются рамы приводов при работе двигателей с несбалансированным ротором. Детали ходовых систем автомобилей и тракторов подвергаются переменным воздействиям от неровностей дорог, изменения свойств почвы.

Рассмотрим поперечное сечение $I - I$ оси вагона (рис. 16.1). При неподвижном вагоне в верхней части сечения от веса вагона будут действовать растягивающие нормальные напряжения, а в нижней части - снимающие напряжения. При движении вагона ось вращается и каждая точка сечения оказывается то в растянутой, то в сжатой половине сечения. Нормальные напряжения в точке B на контуре сечения будут равны

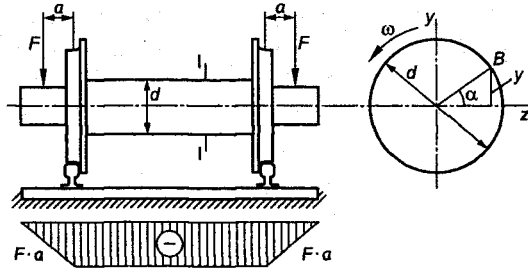


Рис. 16.1

$$\sigma^B = \frac{My}{I_z} = \frac{Fay}{I_z} \quad (16.1)$$

Расстояние y от точки B до оси z (нейтральной оси) изменяется во времени:

$$y = \frac{d}{2} \sin \alpha = \frac{d}{2} \sin(\omega t), \quad (16.2)$$

где ω - угловая скорость вращения оси.

Подставляя (16.2) в (16.1)*, получаем

$$\sigma^B = \frac{Fad}{2I_z} \sin(\omega t) = \sigma_a \sin(\omega t). \quad (16.3)$$

где $\sigma_a = \frac{Fad}{2I_z}$ - амплитуда напряжения.

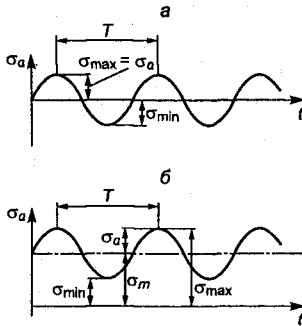


Рис. 16.2

Таким образом, нормальное напряжение в точке B изменяется по синусоиде с амплитудой σ_a . Изменение напряжений во времени удобно представлять графически, откладывая по оси абсцисс время t , а по оси ординат - напряжения σ . В нашем примере график представляет собой синусоидальную кривую (рис. 16.2, а).

На практике отдельные детали при работе испытывают кроме переменных напряжений еще и постоянные растягивающие или сжи-

мающие нормальные напряжения. В этом случае график изменения напряжений во времени имеет вид, представленный на рис.16.2, б.

Совокупность всех значений, принимаемых переменными напряжениями за один период T их изменения, называется **циклом напряжений**, а напряжения – **циклическими**.

Цикл напряжений в общем виде характеризуется следующими параметрами; максимальным и минимальным напряжениями, за которые принимаются наибольшее и наименьшее по алгебраической величине напряжения цикла; средним напряжением цикла

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad (16.4)$$

амплитудой

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (16.5)$$

Среднее напряжение σ_m может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Так как сложение и вычитание напряжений выполняется с учетом их знака, то амплитуда всегда будет положительна.

Из рис.16.2 следуют очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_m + \sigma_a; \\ \sigma_{\min} &= \sigma_m - \sigma_a. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Отношение минимального напряжения σ_{\min} к максимальному σ_{\max} , взятое с учетом знаков напряжений, обозначается буквой r и называется **коэффициентом асимметрии цикла**:

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (16.7)$$

Коэффициент асимметрии r изменяется от $-\infty < r < +\infty$. Для постоянного напряжения $r = 1$.

Циклы с одинаковыми коэффициентами асимметрии называются **подобными**. Все рассмотренные параметры и формулы справедливы и для циклов изменения касательных напряжений, если в них σ заменить на τ . Практика показывает, что при превышении циклическими напряжениями определенного предела в материале деталей через некоторое время работы

(числа циклов нагружений) начинают зарождаться и развиваться трещины, вызывающие в конечном итоге разрушение детали.

Процесс постепенного накопления повреждений в материале при действии переменных напряжений, приводящий к образованию трещин, их развитию и разрушению детали, называется **усталостью**, а соответствующее разрушение – **усталостным разрушением**. Свойство материала воспринимать многократное действие переменных напряжений, т.е. способность материала противостоять усталостному разрушению, называется **выносливостью**. Установлено, что в настоящее время свыше 80 % эксплуатационных поломок деталей машин в различных отраслях машиностроения связано с усталостным разрушением. Как показывает опыт, при действии переменных напряжений разрушение наступает при напряжениях, значительно меньших пределов прочности и текучести. Механизм усталостного разрушения металлов объясняется их структурной неоднородностью, выражающейся в произвольном расположении, случайных размерах и анизотропии механических свойств составляющих кристаллитов (зерен), в наличии неметаллических включений, пористости, дефектов кристаллической решетки и т.д. При действии переменных напряжений в наиболее слабых и неблагоприятно расположенных зернах на некоторой стадии деформирования возникают линии скольжения, имеющие определенную кристаллографическую ориентацию (рис. 16,3, а). Постепенно число линий скольжения увеличивается, они переходят на другие зерна, образуя микроскопические трещины по плоскостям скольжения. В дальнейшем, по мере увеличения числа циклов напряжений, длина этих трещин растет, происходит их объединение в **макроскопическую** видимую трещину, под которой понимается **трещина протяженностью 0,1 – 0,5 мм**. У основания этой трещины возникает объемное напряженное состояние, ускоряющее ее развитие и придающее разрушению хрупкий характер.

Процесс образования и развития микроскопической трещины охватывает примерно 70 – 90 % от разрушающего числа циклов N_p , в течение остальных циклов происходит развитие макроскопической (видимой) трещины (рис. 16.3, б).

Макроскопическая трещина, развиваясь, достигает размеров, соизмеримых с размерами детали или образца, при этом образовавшаяся часть поверхности будущего излома в результате обжатия и сглаживания микронеровностей при периоди-

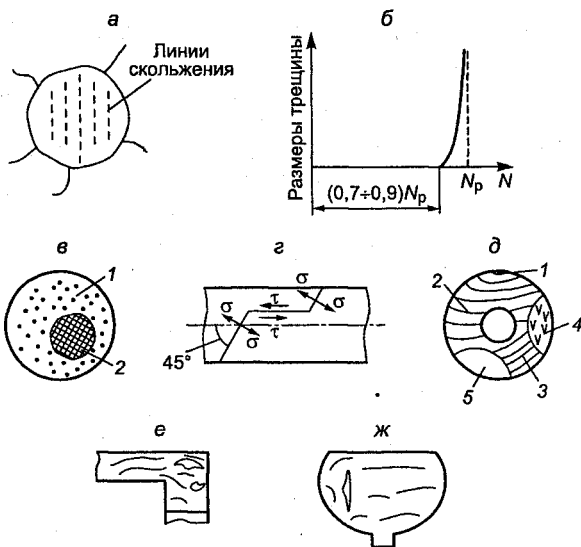


Рис. 16.3

ческом сближении ее краев принимает вид мелкозернистой, как бы притертой структуры. Когда сечение ослабляется настолько, что действующие в нем напряжения превышают разрушающие, тогда происходит внезапное разрушение детали, как правило, хрупкое даже у очень пластичных материалов. Излом имеет характерную поверхность с чистыми, целыми, неповрежденными зернами, что создает вид крупнозернистой структуры. Таким образом, поверхность излома разрушенной детали всегда имеет две характерные зоны (рис. 16.3, в) – зону развития усталостной трещины 1 с гладкой, притертой поверхностью мелкозернистой структуры, и зону статического разрушения (долома) 2, обнаруживающую признаки свежего хрупкого разрушения крупнозернистой структуры. Существование различных зон способствовало распространению среди первых исследователей ошибочных взглядов на природу усталостного разрушения. Они считали, что при переменных напряжениях металл постепенно изменяет свою кристаллическую структуру, как бы «перерождается», «устает» и в результате этого разрушается.

В настоящее время установлено, что структура металла не меняется, что вначале разрушение носит местный, локальный

характер. Однако прежний термин «усталость» остался в технической литературе.

Образование первоначальной трещины связано с действием касательных напряжений, а ее дальнейшее развитие определяется нормальными растягивающими напряжениями, при этом начальное направление развития трещины в большинстве случаев меняется. На рис. 16.3, *а* представлена схема развития трещины при действии на вал переменного крутящего момента. Усталостная трещина вначале совпадает с образующей цилиндра, т.е. располагается в плоскости действия касательных напряжений, а затем отклоняется под углом 45° к образующей, т.е. перпендикулярно направлению максимальных растягивающих напряжений. Малая локальная зона, где образуется и откуда начинается свое развитие начальная трещина, называется **фокусом излома**.

На рис. 16.3, *б* приведена схема усталостного излома шейки коленчатого вала, имеющего кольцевое сечение, с обозначением образующихся на поверхности излома характерных зон. Фокус излома 1 обычно располагается на поверхности, в местах очагов концентрации напряжений или пороков в виде царапин, раковин, неметаллических включений и т.п., иногда при наличии местных внутренних дефектов – внутри детали или образца на некоторой глубине от поверхности. Макроскопическая зона 2, прилегающая к фокусу излома, связанная с образованием первой видимой макроскопической трещины, называется **очагом разрушения**. Участок избирательного развития 3 определяет собственно **зону распространения, развития усталостной трещины**. В этой зоне обычно видны характерные усталостные линии, имеющие волнообразный характер. **Участок ускоренного развития** 4 образуется в течение нескольких циклов, предшествующих разрушению, и является переходной зоной между участком 3 и зоной излома 5. Зона излома 5 образуется в течение одного-двух циклов на последней стадии излома. На рис. 16.3, *в*, *ж* показаны усталостные разрушения коленчатого вала и рельса, произошедшие в результате развития трещин, образовавшихся от местных дефектов, расположенных у коленчатого вала на поверхности щеки вблизи галтели, у рельса – внутри сечения. Изучение свойств поверхности усталостных изломов позволяет определить причину, вызвавшую разрушение, и указать пути предотвращения повторных разрушений. Период работы конструкции (в километрах пробега, часах или годах работы, в тоннах, условных эталонных гектарах и т.д.) от момента возникновения первой макроскопической трещины усталости (протяженность которой принимается равной 0,1–0,5 мм) до

окончательного разрушения детали называется **живучестью элемента инженерной конструкции** или детали машины. Знание живучести позволяет обосновать сроки профилактических осмотров конструкций и машин. Задачи определения живучести элементов конструкций и деталей машин рассматриваются в механике разрушений.

16.2. Типы циклов напряжений и их параметры

Действующие на элементы конструкций внешние нагрузки не всегда являются строго периодическими, а значит, и характер изменения напряжений в течение цикла может быть самым разнообразным (рис. 16.4).

Согласно исследованиям решающая роль в усталостном разрушении принадлежит максимальному и минимальному значениям напряжений цикла и общему количеству циклов; влияние же продолжительности цикла и характера изменения напряжений в течение цикла незначительно. Поэтому все циклы, представленные на рис. 16.4, считаются равноопасными, а при расчетах на сопротивление усталости деталей конструкций действительный характер изменения напряжений заменяется гармонической кривой.

Циклы напряжений бывают симметричные и асимметричные. Если максимальное и минимальное напряжения цикла равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку: $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, цикл называется *симметричным*. Если максимальное и минимальное напряжения по абсолютной величине различны, циклы называются *асимметричными*. Асимметричные циклы бывают *знакопеременными* и *знакопостоянными*. Они имеют различные названия. Типичные разновидности циклов напряжений и соответствующие их параметры представлены в табл. 16.1.

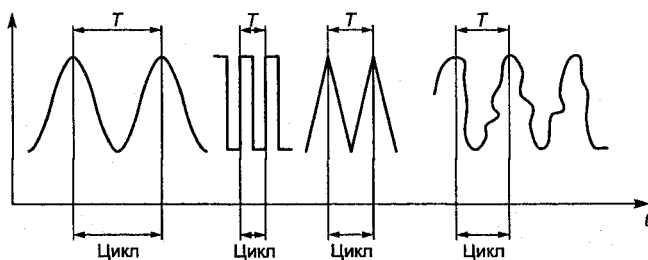


Рис. 16.4

Из табл. 16.1 следует, что любой асимметричный цикл может быть представлен как результат наложения на постоянное напряжение σ_m переменного напряжения, изменяющегося по симметричному циклу с амплитудой σ_a .

16.3. Кривая усталости.

Предел выносливости при симметричном цикле

Для оценки усталостной прочности необходимо располагать характеристиками сопротивления усталости материала. Под сопротивлением усталости элементов конструкций понимается их способность не разрушаться под действием переменных напряжений в течение заданного числа циклов. Характеристики сопротивления усталости материала определяются путем испытания гладких (без концентрации напряжений) полированных образцов на специальных машинах. Основным видом являются усталостные испытания при симметричном цикле, в условиях чистого изгиба вращающегося образца (рис. 16.5).

Образец 1 закрепляется во вращающихся цангах 2 и вращается вместе с ними. Нагрузка F создает чистый изгиб в пределах всей длины образца. Счетчик 3 фиксирует число оборотов образца. Для испытаний используются образцы диаметром от 6 до 10 мм.

При испытаниях (обычно испытывают 10 образцов) создаются симметричные циклы напряжений, характеризуемые различными значениями $\sigma_{\max} = \sigma_a$, и определяется число оборотов N до разрушения. При больших напряжениях (кривая 1) образец разрушается после небольшого числа циклов N_1 , с уменьшением напряжения (кривая 2) число циклов N_2 до разрушения увеличивается (рис. 16.6).

По результатам испытаний на усталость строят кривую усталости, или кривую Вёлера²⁶, по имени немецкого инженера, впервые исследовавшего в 1858 г. явление усталости.

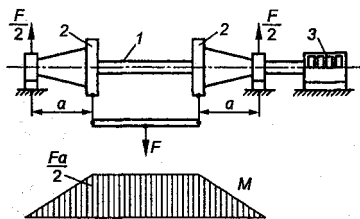


Рис. 16.5

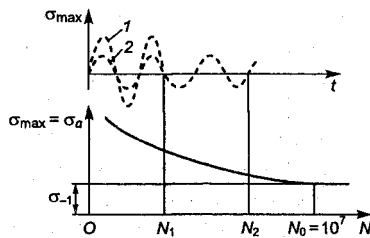
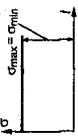
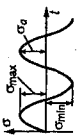
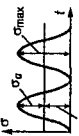

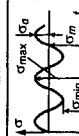
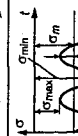
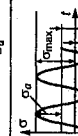


Рис. 16.6

Таблица 16.1

Типы циклов напряжений

Название цикла	Схема цикла	$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$	σ_m	σ_a	r
Постоянный		$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} > 0$	$\sigma_m = \sigma_{\max}$	0	1
Симметричный		$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$	0	σ_{\max}	-1
Пульсационный положительный		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} = 0$	$\sigma_{\max} / 2$	$\sigma_{\max} / 2$	0
Пульсационный отрицательный		$\sigma_{\max} = 0$ $\sigma_{\min} < 0$	$-\sigma_{\min} / 2$	$\sigma_{\min} / 2$	$-\infty$
Знакопостоянный положительный		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} > 0$	$\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$	$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$	$0 < r < 1$
Знакопостоянный отрицательный		$\sigma_{\max} < 0$ $\sigma_{\min} < 0$	$\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$	$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$	$0 < r < \infty$
Знакопеременный		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} < 0$	$\sigma_m > 0$	$\sigma_a > 0$	$-1 < r < 0$

Кривая усталости устанавливает зависимость максимального напряжения цикла от числа циклов до разрушения $\sigma_{\max} = f(N)$.

Испытания на усталость показывают, что для каждого материала существует такое максимальное напряжение, при котором он выдерживает, не разрушаясь, заданное число циклов. Число циклов, до которого ведется испытание на усталость, называется **базой испытания** и обозначается N_0 .

Наибольшая величина максимального напряжения цикла, при котором еще не происходит усталостного разрушения до базы испытания N_0 , называется **пределом выносливости**. Предел выносливости обозначается через σ_r , где r - коэффициент асимметрии цикла. Так, σ_{-1} - предел выносливости при симметричном цикле, σ_0 - предел выносливости при пульсационном цикле и т.д. Кривые усталости обычно строят в двойных логарифмических координатах $\lg \sigma_a - \lg N$.

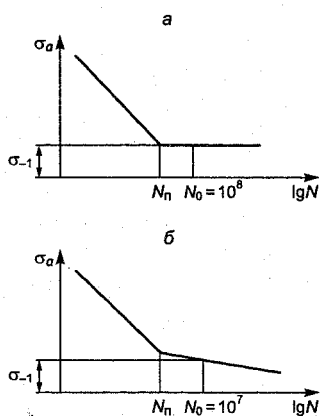


Рис. 16.7

В двойных логарифмических координатах кривая усталости у черных металлов, например незакаленных сталей или закаленных при высоком отпуске, титановых сплавов при нормальной температуре, имеет вид ломаной линии с наклонным и горизонтальным участками (рис. 16.7, а), у цветных металлов и их сплавов, высокопрочных легированных сталей, работающих в агрессивных средах, вместо горизонтального участка наблюдается пологий, слабонаклонный участок (рис. 16.7, б). Точка пересечения участков примерно соответствует числу $N_{\Pi} = (1 - 3) \cdot 10^6$ циклов.

Для черных металлов, имеющих горизонтальный участок на кривой усталости, база испытаний принимается $N_0 = 10^7$ циклов. Считается, что если образец не разрушился до базового числа циклов, то он не разрушится и при действии неограниченного числа циклов на том же уровне напряжений. Для цветных металлов и их сплавов, а также материалов, не имеющих горизонтального участка на кривой усталости, база испытаний увеличивается до 10^8 циклов.

Ординаты наклонного участка кривой усталости определяют пределы ограниченной выносливости σ_{-1N} , где N - заданное число циклов. Каждому заданному числу циклов, меньшему базового числа, соответствует определенное значение предела ограниченной выносливости. Предел ограниченной выносливости определяется или непосредственно по кривой усталости, или по уравнению наклонного участка кривой усталости, предложенному Вёлером:

$$\sigma_{-1N}^m N = \sigma_{-1}^m N_{\Pi}, \quad (16.8)$$

где σ_{-1N} - предел ограниченной выносливости при симметричном цикле, соответствующий числу циклов N ; σ_{-1} , N_{Π} - координаты точки перелома кривой усталости (для черных металлов обычно $N_{\Pi} = 2 \cdot 10^6$ циклов); m - параметр кривой усталости, зависящий от свойств материала.

Величина m находится из выражения, получаемого после логарифмирования уравнения (16.8):

$$m = \frac{\lg N_{\Pi} - \lg N}{\lg \sigma_{-1N} - \lg \sigma_{-1}}. \quad (16.9)$$

Значение m изменяется в пределах 3–25.

Для *быстроходных механизмов*, срок службы которых ограничивается десятками или сотнями часов, а также *тихоходных механизмов*, которые в течение срока службы подвергаются сравнительно небольшому количеству перемен напряжений, предел ограниченной выносливости определяют при базе испытаний 10^6 или даже 10^5 циклов.

Предел выносливости существенно зависит не только от свойств материала, но также от размеров поперечного сечения образца, обработки поверхности и характера нагружения (изгиб, кручение, растяжение-сжатие, сложное напряженное состояние).

Так как определение предела выносливости представляет собой длительный и сложный процесс, то на основе многочисленных экспериментов были предложены *эмпирические формулы*, связывающие предел выносливости с другими известными механическими характеристиками материала:

$$\sigma_{-1} = 0,4 \sigma_{\text{в}} - \text{для стального литья и чугуна};$$

$$\sigma_{-1} = 0,5 \sigma_{\text{в}} - \text{для стали } (\sigma_{\text{в}} = 30\,000 - 120\,000 \text{ Н/см}^2);$$

$\sigma_{-1} = 40\,000 + \frac{1}{6} \sigma_B$ - для высокопрочных сталей ($\sigma_B = 130\,000 - 180\,000 \text{ Н/см}^2$);

$\sigma_{-1} = (0,25 - 0,50) \sigma_B$ - для цветных металлов;

$\sigma_{-1p} = (0,7 - 0,9) \sigma_{-1}$ - предел выносливости при растяжении-сжатии;

$\tau_{-1} = 0,56 \sigma_{-1}$ - для стали при кручении;

$\tau_{-1} = (0,2 - 0,3) \sigma_B$ - для стали при кручении;

$\tau_{-1} = 0,8 \sigma_{-1}$ - для чугуна и высоколегированных сталей.

Указанными соотношениями следует пользоваться лишь для ориентировочной оценки величины предела выносливости материала.

Необходимо отметить, что предел выносливости не является, подобно модулю упругости, коэффициенту Пуассона, механической характеристикой материала. Он представляет собой характеристику сопротивления усталости образца специальной формы и качества обработки, изготовленного из данного материала. Поэтому при расчете на сопротивление усталости деталей машин необходимо дополнительно учитывать влияние на предел выносливости детали ряда факторов:

1) концентрации напряжений, возникающей при изменении формы детали;

2) масштабного коэффициента, связанного с размерами поперечного сечения;

3) коэффициента качества поверхности, характеризующего обработку поверхности;

4) эксплуатационных факторов (коррозии, повышения или понижения температуры, агрессивности среды и т.д.);

5) технологических методов поверхностного упрочнения деталей (обработка поверхности роликами, дробью, азотирование, цементация, поверхностная закалка и т.д.).

Влияние указанных факторов может быть настолько значительным, что пределы выносливости деталей, изготовленных из одного материала, могут отличаться в несколько раз.

16.4. Факторы, влияющие на сопротивление усталости деталей

Влияние концентрации напряжений

В расчетах на выносливость используют номинальные нормальные и касательные напряжения $\sigma_{\text{ном}}$ и $\tau_{\text{ном}}$, которые определяются без учета концентрации.

Появление местных напряжений увеличивает вероятность образования усталостных трещин, понижает предел выносливости материала, что должно учитываться при конструировании деталей. В расчетах на сопротивление усталости влияние концентрации напряжений учитывается эффективным коэффициентом концентрации K_σ (K_τ), который определяется экспериментально при симметричном цикле как отношение предела выносливости образца без концентрации σ_{-1} (τ_{-1}) напряжений к пределу выносливости образца того же размера, но имеющего заданный концентратор напряжений:

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}} \geq 1; \quad K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}} \geq 1, \quad (16.10)$$

где σ_{-1} и τ_{-1} - пределы выносливости образцов, имеющих гладкую полированную поверхность; σ_{-1k} и τ_{-1k} - пределы выносливости образцов, имеющих концентрацию напряжений.

Величина эффективного коэффициента концентрации зависит не только от величины местных напряжений, но и от свойств материала. В результате обобщения многочисленных экспериментальных данных предложена зависимость, связывающая эффективный и теоретический коэффициенты концентрации:

$$K_{\sigma(\tau)} = 1 + q(\alpha_{\sigma(\tau)} - 1), \quad (16.11)$$

где $K_{\sigma(\tau)}$ - эффективный коэффициент концентрации для нормальных (индекс σ) или касательных (индекс τ) напряжений; q - коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений; $\alpha_{\sigma(\tau)}$ - теоретический коэффициент концентрации для нормальных (индекс σ) или касательных (индекс τ) напряжений.

Теоретический коэффициент концентрации α_σ (или α_τ) характеризует влияние концентрации напряжений при статическом нагружении и определяется отношением наибольшего местного нормального или касательного напряжения к соответствующему номинальному напряжению, вычисленному без учета концентрации:

для нормальных напряжений:

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}}; \quad (16.12)$$

для касательных напряжений:

$$\alpha_{\tau} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{НОМ}}} \quad (16.13)$$

Величина коэффициента чувствительности лежит в пределах $0 \leq q \leq 1$. Ориентировочно для углеродистых сталей можно принимать $q = 0,4 - 0,8$, для высокопрочных легированных сталей $q \approx 1$; для чугуна $q = 0$, что объясняется наличием в структуре чугуна крупных зерен графита, являющихся очагами концентрации. В связи с этим эффект внешних очагов концентрации теряет свое значение.

Необходимо отметить, что в расчетах прибегать к определению K_{σ} или K_{τ} по формуле (16.11) следует только в крайних случаях, так как возможность получения ошибок в их оценке 20 % и более является значительной. Когда в сечении одновременно действуют несколько концентраторов, то в расчетах следует принимать только одно большее значение эффективного коэффициента концентрации.

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений зависят также от абсолютных размеров сечения детали, что должно учитываться в расчетах. Для уменьшения величины эффективного коэффициента концентрации делают более плавным переход от одного диаметра вала к другому (рис. 16.8, а); применяют конструкции с «поднутрением», позволяющим увеличивать радиус округления (рис. 16.8, б); применяют разгрузочные канавки при горячей посадке дисков на вал (рис. 16.9).

Влияние размеров детали

Экспериментально установлено, что существенное влияние на сопротивление усталости оказывают размеры поперечного сечения детали (диаметры валов, высота пластин и т.д.). С увеличением поперечных размеров образцов, при всех прочих равных условиях, пределы выносливости уменьшаются. Напри-

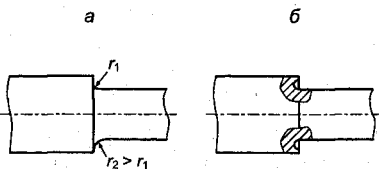


Рис. 16.8

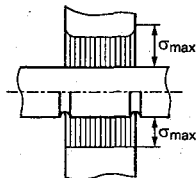


Рис. 16.9

мер, при увеличении диаметра образца с $d = 7,5$ мм до $d = 20$ мм предел выносливости при симметричном цикле снижается на 30–45 %. В расчетах на выносливость влияние размеров оценивается введением масштабного коэффициента $\epsilon_{\text{мг}}$ (или $\epsilon_{\text{мт}}$):

$$\epsilon_{\text{мг}} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}; \quad \epsilon_{\text{мт}} = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}}, \quad (16.14)$$

где σ_{-1d} и τ_{-1d} – пределы выносливости гладкого образца заданного диаметра; σ_{-1} и τ_{-1} – пределы выносливости стандартного образца.

Масштабный коэффициент зависит также и от материала детали.

Основными причинами снижения масштабного коэффициента с ростом размеров поперечного сечения деталей является ухудшение механических свойств металла с увеличением размеров отливки или поковки, так как возрастает вероятность наличия раковин, посторонних включений, трещин и других факторов, способствующих возникновению усталостных трещин при более низких напряжениях. Кроме того, с увеличением размеров уменьшается роль наклепа, затрудняется качественное проведение термической обработки по всему объему металла. В силу малочисленности экспериментальных данных для случаев, когда действуют касательные напряжения, ориентировочно считают $\epsilon_{\text{мг}} = \epsilon_{\text{мт}}$.

Влияние качества обработки поверхности

Качество обработки поверхности детали в результате наличия микронеровностей, рисок, царапин, а также остаточных напряжений и наклепа поверхностного слоя существенно влияет на ее предел выносливости. Снижение предела выносливости у легированных сталей может достигать 50 % и более.

Влияние качества обработки поверхности в расчетах на выносливость учитывают коэффициентом качества поверхности:

$$\epsilon_{\text{п}} = \frac{\sigma_{-1\text{п}}}{\sigma_{-1}}, \quad (16.15)$$

где $\sigma_{-1\text{п}}$ – предел выносливости образца с заданным качеством обработки поверхности; σ_{-1} – предел выносливости стандартного, полированного образца.

Коэффициент $\epsilon_n < 1$ характеризует снижение предела выносливости образцов с ухудшением качества обработки поверхности по сравнению с полированной, при этом снижение будет тем больше, чем выше предел прочности стали. Так, при пределе прочности $\sigma_B = 125\ 000\ \text{Н/см}^2$ предел выносливости снижается до 40 %. Поэтому при использовании высокопрочных легированных сталей детали должны тщательно обрабатываться, так как в противном случае теряется смысл применения дорогих легированных сталей.

Влияние эксплуатационных факторов

Многие детали машин в условиях эксплуатации подвергаются атмосферной коррозии, изменению температуры, действию агрессивных сред. Под воздействием коррозионной среды возникает явление, называемое **коррозионной усталостью**, заключающееся в резком накоплении усталостных повреждений. В расчетах влияние коррозии учитывается коэффициентом

$$\beta_{\text{кор}} = \frac{\sigma_{-1\text{кор}}}{\sigma_{-1}}, \quad (16.16)$$

где $\sigma_{-1\text{кор}}$ и σ_{-1} – соответственно пределы выносливости гладких образцов в условиях коррозии и на воздухе.

Коэффициент $\beta_{\text{кор}}$ зависит от времени выдержки образцов в условиях коррозии до испытания на усталость. Экспериментальные данные показывают, что предел выносливости в условиях коррозии не зависит от предела прочности стали. Поэтому нельзя считать обоснованным предложение о замене углеродистой стали на легированные в сельскохозяйственных, строительно-дорожных, подъемно-транспортных и других машинах, работающих в условиях атмосферной коррозии.

Повышение температуры уменьшает предел выносливости. Так, при нагревании стали до 150 °С предел выносливости уменьшается на 10 %; при нагревании до 260 °С – на 70 %.

Для защиты деталей от коррозии используют как технологические методы, так и различные покрытия поверхностей.

Влияние технологических методов поверхностного упрочнения деталей

Мощным средством повышения сопротивления усталости деталей являются технологические методы поверхностного

упрочнения. Это наклеп поверхности путем обкатки роликами, обдувка дробью, чеканка, поверхностная закалка токами высокой частоты, цементация, азотирование, цианирование и т.д.

Эффект упрочнения оценивается коэффициентом

$$\beta_{\text{упр}} = \frac{\sigma_{-1\text{дупр}}}{\sigma_{-1\text{д}}}, \quad (16.17)$$

где $\sigma_{-1\text{д}}$ и $\sigma_{-1\text{дупр}}$ - пределы выносливости детали соответственно до и после поверхностного упрочнения.

При правильной технологии поверхностного упрочнения коэффициенты $\beta_{\text{упр}}$ могут принимать значение, равное 2 - 3 и более, что соответствует 2-3-кратному увеличению пределов выносливости. Особенно эффективны эти методы для деталей с концентрацией напряжений, а также деталей, работающих в коррозионных средах.

16.5. Диаграмма усталостной прочности, или диаграмма Хейга

При проведении расчетов на сопротивление усталости требуется знание пределов выносливости для любых типов циклов. В зависимости от типа цикла меняется кривая усталости и значение предела выносливости. На рис. 16.10 представлены три кривые усталости, соответствующие различным коэффициентам асимметрии цикла r . Из приведенных кривых следует, что наименьшим значением предела выносливости характеризуется симметричный цикл.

Пусть имеется машина, позволяющая проводить усталостные испытания в условиях любого асимметричного цикла. Задавая постоянное значение σ_m путем испыта-

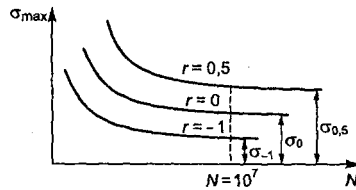


Рис. 6.10

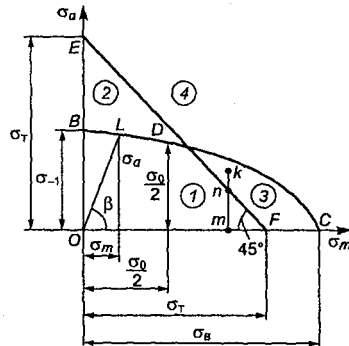


Рис. 6.11

ния серии образцов и построения кривой Вёлера получим предельное значение амплитуды σ_a , при котором не происходит усталостного разрушения материала до базы испытания N_0 , для цикла с заданным коэффициентом асимметрии. Полученный результат изобразим в координатах σ_a, σ_m точкой L (рис. 16.11).

Нетрудно видеть, что сумма координат точки L дает предел выносливости для асимметричного цикла с коэффициентом асимметрии r . Если отложить по осям абсцисс и ординат значе-

ния $\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_0}{2}$ (где σ_0 - предел выносливости для пульсационного цикла), то получим точку D , сумма координат которой равняется пределу выносливости для пульсационного цикла. Продолжая подобные испытания для циклов с различными коэффициентами асимметрии r , получим множество точек, через которые можно провести предельную кривую, характеризующую сопротивление усталости материала для всех типов циклов.

Полученная диаграмма называется **диаграммой усталостной прочности**, или **диаграммой предельных амплитуд**, или **диаграммой Хейга**, по имени ученого США, занимавшегося исследованиями усталости.

Рассматривая диаграмму видим, что точка B соответствует пределу выносливости при симметричном цикле ($\sigma_m = 0, \sigma_a = \sigma_{-1}$), а точка C - пределу прочности при растяжении ($\sigma_a = 0, \sigma_m = \sigma_B$). Для произвольного асимметричного цикла величины σ_a и σ_m могут рассматриваться как координаты рабочей точки в плоскости σ_a, σ_m . Если рабочая точка располагается внутри диаграммы, то усталостного разрушения детали до базы испытания N_0 наблюдаться не будет. Согласно диаграмме предел выносливости любого асимметричного цикла принимает значение в интервале

$$\sigma_{-1} < \sigma_r < \sigma_B.$$

Следовательно, если предел выносливости имеет величину, близкую к пределу прочности (точка C), то он может превышать предел текучести материала. В данном случае уже при первом цикле изменения напряжения деталь получит пластические деформации, что недопустимо. Поэтому из диаграммы усталостной прочности необходимо исключить область, в которой предел выносливости больше предела текучести, для чего на диаграмме проводится прямая, отсекающая на обеих осях отрезки, равные пределу текучести (рис. 16.11).

Так как $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$, то все точки, лежащие в треугольнике OEF , удовлетворяют условию $\sigma_{\max} < \sigma_T$, а точки, лежащие на прямой EF , – условию $\sigma_{\max} = \sigma_T$. Для любой точки, расположенной вне треугольника, имеет место $\sigma_{\max} > \sigma_T$. Действительно, для точки k сумма координат, равная σ_{\max} , будет больше σ_T :

$$\sigma_{\max} = Om + mk > Om + mn,$$

где $Om + mn = Om + mF = \sigma_T$ по построению.

В общем случае на диаграмме можно выделить четыре характерные зоны: в первой зоне не происходят пластические деформации и усталостное разрушение; во второй – происходит усталостное разрушение в пределах упругих деформаций; в третьей – уже при первом цикле напряжений появляются пластические деформации, но усталостного разрушения не происходит; в четвертой зоне происходит усталостное разрушение при наличии пластических деформаций.

Таким образом, рабочей зоной является только первая зона. Так как любая деталь при эксплуатации должна иметь коэффициент безопасности по усталостному разрушению больше единицы, то фактически для работы может использоваться только часть первой зоны.

Проведем из начала координат луч. Тангенс угла наклона луча к оси абсцисс равен

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}}{\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}} = \frac{1-r}{1+r}. \quad (16.18)$$

Таким образом, любой луч, проведенный из начала координат, является геометрическим местом точек, соответствующих подобным циклам.

16.6. Схематизация диаграммы усталостной прочности

Построение диаграммы усталостной прочности представляет собой сложный процесс, связанный с длительными и трудоемкими испытаниями. Поэтому были высказаны предложения схематизировать диаграмму Хейга таким образом, чтобы для ее построения требовалось знание всего нескольких значений механических характеристик материала. Первая попытка принад-

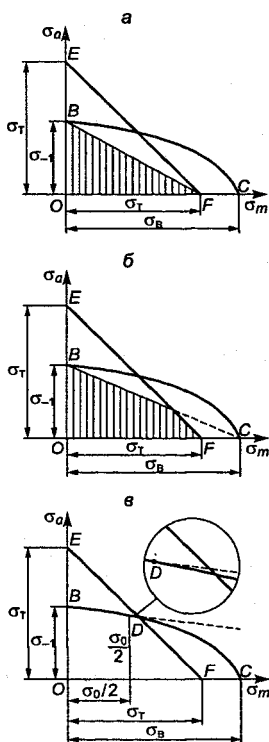


Рис. 16.12

σ_0 и пределу текучести σ_T . Предложенная схематизация уменьшает рабочую зону несущественно.

лежит Ц. Зодербергу (США), который предложил соединить прямой точки B и F (рис. 16.12, a). В этом случае для построения диаграммы достаточно знать предел текучести σ_T и предел выносливости при симметричном цикле. Однако такая схематизация значительно уменьшает рабочую зону на диаграмме Хейга.

Г.В. Ужик предложил соединить точку B с точкой C (рис. 16.12, b). В этом случае для построения диаграммы нужно знать пределы прочности и текучести материала и предел выносливости при симметричном цикле.

Рабочая зона несколько увеличивается, но зато требуется вести параллельно два расчета: по усталостному разрушению и по текучести. Наиболее удачным является предложение ученых С.В. Серенсена²⁷ и Р.С. Кинашвили (рис. 16.12, v). По этому предложению диаграмма строится по трем параметрам: пределу выносливости при симметричном цикле σ_{-1} , пределу выносливости при пульсационном цикле

16.7. Расчет на выносливость при линейном напряженном состоянии

Построим схематизированную диаграмму усталостной прочности (рис. 16.13) и изобразим на ней рабочий цикл точкой N .

Проведем из начала координат через точку N луч, который, пересекая прямую BK в точке M , определяет предельный цикл, подобный рабочему. Обозначим через σ_m и σ_a среднее напряжение и амплитуду рабочего цикла (точка N), а через $\bar{\sigma}_m$ и $\bar{\sigma}_a$ среднее напряжение и амплитуду предельного цикла (точка M).

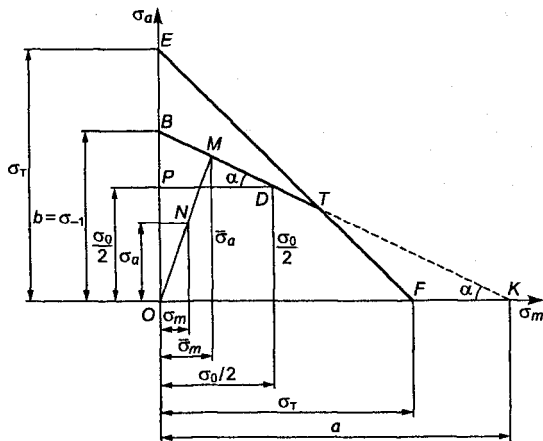


Рис. 16.13

Коэффициент безопасности по усталостному разрушению будет определяться отношением отрезка OM к отрезку ON :

$$n_r = \frac{OM}{ON}. \quad (16.19)$$

Отношение (16.19) может быть представлено через составляющие рабочего и предельного циклов:

$$n_r = \frac{\bar{\sigma}_m}{\sigma_m} = \frac{\bar{\sigma}_a}{\sigma_a}. \quad (16.20)$$

Откуда составляющие рабочего цикла равны

$$\sigma_m = \frac{\bar{\sigma}_m}{n_r}; \quad \sigma_a = \frac{\bar{\sigma}_a}{n_r}. \quad (16.21)$$

Для простоты выводов вначале не будем учитывать факторы, влияющие на предел выносливости.

Запишем уравнения прямой BK в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (16.22)$$

Согласно рис. 16.13 имеем:

$$x = \bar{\sigma}_m = n_r \sigma_m; \quad y = \bar{\sigma}_a n_r; \quad b = \sigma_{-1}; \quad a = \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sigma_{-1}}{\psi}.$$

Из треугольника BDP находим

$$BP = \sigma_{-1} \frac{\sigma_0}{2} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{2}; \quad PD = \frac{\sigma_0}{2}.$$

Тогда

$$\psi = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BP}{PD} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{2}. \quad (16.23)$$

Подставляя найденные величины в формулу (16.22), получим выражение для коэффициента безопасности по усталостному разрушению:

$$\frac{\sigma_m n_r \psi}{\sigma_{-1}} = \frac{\sigma_a n_r}{\sigma_{-1}} = 1,$$

или

$$n_r = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi \sigma_m}. \quad (16.24)$$

Полученная формула справедлива тогда, когда опасным состоянием является усталостное разрушение. Если опасное состояние связано с появлением текучести (линия TF), то коэффициент безопасности находится по пределу текучести:

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m}. \quad (16.25)$$

На практике определяют оба коэффициента n_r и n_T , при этом наименьшее их значение принимается за фактический коэффициент безопасности. Учет влияющих факторов производится изменением числовых значений координат рабочей точки на диаграмме усталостной прочности.

Так как влияние всех факторов определяется при симметричном цикле, то принято их относить к переменной составляющей цикла σ_a . Влияние концентрации напряжений K_σ , размеров детали ϵ_m , качества обработки поверхности ϵ_Π и упрочнения ее поверхности $\beta_{\text{упр}}$ можно оценить одним общим коэффициентом снижения предела выносливости при симметричном цикле:

$$K_{\sigma_d} = \frac{K_\sigma}{\epsilon_m \epsilon_\Pi} \cdot \frac{1}{\beta_{\text{упр}}}. \quad (16.26)$$

При наличии коррозии вместо коэффициента ε_n в формулу (16.26) необходимо подставлять коэффициент $\beta_{\text{кор}}$.

В последнее время в результате обобщения экспериментальных работ рекомендуется коэффициент K_{σ_d} определять из формулы

$$K_{\sigma_d} = \left(\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_M} + \frac{1}{\varepsilon_n} - 1 \right) \frac{1}{\beta_{\text{упр}}}. \quad (16.27)$$

Подставляя (16.27) в (16.24), получаем общее выражение для коэффициента безопасности по усталостному разрушению:

$$n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma_d} \cdot \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}, \quad (16.28)$$

где K_{σ_d} - общий коэффициент снижения предела выносливости при симметричном цикле; ψ_{σ} - коэффициент влияния асимметрии цикла, равный тангенсу угла наклона предельной прямой схематизированной диаграммы усталостной прочности к оси абсцисс.

16.8. Расчет на выносливость при чистом сдвиге

Пользуясь схематизированной диаграммой, аналогично изложенному можно получить выражения для коэффициента безопасности по усталостному разрушению при чистом сдвиге (кручении):

$$n_{r\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau_d} \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}, \quad (16.28a)$$

а также по текучести:

$$n_{r\tau} = \frac{\tau_{\tau}}{\tau_a + \tau_m}, \quad (16.29)$$

где τ_{-1} - предел выносливости материала на сдвиг при симметричном цикле; $\psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}$ - коэффициент влияния асимметрии цикла; τ_0 - предел выносливости на сдвиг при пульсационном цикле; τ_a и τ_m - амплитуда и среднее значение касательных

напряжений для рабочего цикла; τ_T - предел текучести материала при сдвиге (кручении); $K_{\tau_d} = \frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{мт} \varepsilon_{пт}} \cdot \frac{1}{\beta_{упр}}$, или

$K_{\tau_d} = \left(\frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{мт}} + \frac{1}{\varepsilon_{пт}} - 1 \right) \frac{1}{\beta_{упр}}$ - общий коэффициент снижения предела выносливости на сдвиг при симметричном цикле.

Таблица 16.2

Значения коэффициентов Ψ_{σ} и Ψ_{τ} , используемых при расчетах на выносливость

Материал	Ψ_{σ}	Ψ_{τ}
Углеродистая сталь, $\sigma_B = 320-350 \text{ Н/мм}^2$	0,05	0
Углеродистая сталь, $\sigma_B = 500-750 \text{ Н/мм}^2$	0,1-0,15	0,05
Углеродистая и легированная сталь, $\sigma_B = 700-1050 \text{ Н/мм}^2$	0,15-0,20	0,05-0,10
Легированная сталь, $\sigma_B = 1050-1450 \text{ Н/мм}^2$	0,25-0,30	0,10-0,15

Значения Ψ_{σ} и Ψ_{τ} (для различных сталей в зависимости от предела прочности) приведены в табл. 16.2.

16.9. Расчет на выносливость при плоском напряженном состоянии

Создание гипотез сопротивления усталости при плоском напряженном состоянии пока не дали положительных результатов: все они сводятся к распространению известных гипотез предельных состояний на действие циклических напряжений.

В настоящее время в расчетах на выносливость при плоском напряженном состоянии общепринятой является эмпирическая формула Гафа и Полларда:

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_{r\sigma}^2} + \frac{1}{n_{r\tau}^2}, \quad (16.30)$$

где $n_{r\sigma}$ и $n_{r\tau}$ - коэффициенты безопасности, вычисляемые в предположении независимого действия нормальных и касательных напряжений.

Согласно (16.30) общий коэффициент безопасности при совместном действии переменных нормальных и касательных напряжений определяется выражением

$$n_r = \frac{n_{r_\sigma} n_{r_\tau}}{\sqrt{n_{r_\sigma}^2 + n_{r_\tau}^2}}. \quad (16.31)$$

Расчетные значения коэффициентов безопасности n_r и n_T необходимо сравнивать с соответствующим нормативным значением $[n]$.

В машиностроении нормативный коэффициент безопасности $[n]$ принимается равным 1,4–1,7. В случае особых требований к прочности детали коэффициент безопасности повышает до 3, а в отдельных случаях и до более высоких значений.

Необходимо отметить, что при отрицательных циклах ($\sigma_m < 0$ и $\tau_m < 0$) как хрупкие, так и пластичные материалы имеют характеристики сопротивления усталости выше, чем при действии положительных циклов. Однако в расчетах это свойство не учитывают и при вычислении коэффициента безопасности под σ_m и τ_m понимают модуль среднего напряжения цикла.

Расчет деталей конструкций на выносливость, как правило, носит проверочный характер, так как коэффициенты K_{σ_d} и K_{τ_d} зависят от размеров и формы детали и заранее не известны.

Но для валов можно рекомендовать следующую последовательность проведения конструкторского расчета на выносливость.

1. Определить ориентировочно диаметр вала в предположении, что напряжения не изменяются во времени. При этом коэффициент безопасности по текучести $[n_T]$ принимается равным 4 – 5 или на 30 – 40 % снижается допускаемое напряжение $[\sigma]$, а коэффициенты концентрации напряжений, качества поверхности, упрочнения, масштабный коэффициент не учитываются.

2. Провести после предварительного расчета проверочный расчет на выносливость с учетом всех влияющих факторов. Если фактический коэффициент безопасности окажется меньше требуемого, то диаметр вала увеличивается и снова проводится проверочный расчет.

16.10. Пути повышения сопротивления усталости конструкций

Повышение надежности и долговечности деталей, а также элементов конструкций должно обеспечиваться уже на стадии проектирования, так как использованные при этом принципы

конструирования существенно будут влиять на сопротивление усталости как определенных деталей, так и всей конструкции в целом. В связи с этим можно указать следующие общие положения повышения сопротивления усталости деталей и элементов конструкций.

1. Детали из качественных, высокопрочных материалов должны тщательно обрабатываться, на поверхности не должно быть царапин, рисок, вмятин и т.д.

2. Геометрическая форма деталей должна выбираться такой, чтобы концентрация напряжений отсутствовала или была минимальной.

3. Детали и конструкции в целом должны предохраняться от коррозии путем покраски, смазывания и т.д.

4. Должны использоваться технологические приемы, повышающие сопротивление усталости.

5. При конструировании узлов отрицательное влияние концентраторов напряжений необходимо уменьшать путем перемещения их в менее нагруженные зоны. Так, на рис. 16.14, *а* сварной шов расположен на нейтральной линии, где напряжения от изгиба отсутствуют, на рис. 16.14, *б* заклепки также расположены ближе к нейтральной линии.

6. При конструировании сварных соединений концентрацию напряжений нужно уменьшать путем исключения резких перепадов жесткостей. На рис. 16.14, *в* замена треугольных козырьков трапециевидальными уменьшает концентрацию напряже-

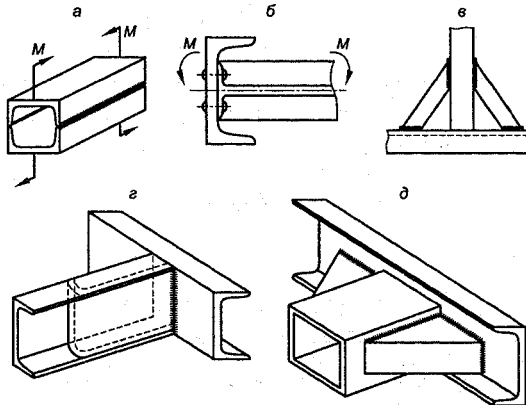


Рис. 16.14

ний в зоне стыка за счет устранения пересечения сварных швов.

7. Уменьшать нормальные напряжения стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля заменой в зоне крепления тонкостенными стержнями закрытого профиля (рис. 16.14, з).

8. Повышать жесткость стыков путем перехода к закрытым профилям и использования вставок (рис. 16.14, д).

Пример 16.1. Круглый шлифованный стержень диаметром $d = 8$ мм подвергается циклическим напряжениям, имеющим $\sigma_{\max} = 100$ МПа; $\sigma_{\min} = -140$ МПа. Механические характеристики материала: $\sigma_{-1} = 180$ МПа; $\sigma_T = 240$ МПа; $\sigma_B = 400$ МПа. Требуется определить фактический коэффициент безопасности и указать, какое состояние материала является предельным.

Решение. Изобразим графически заданный цикл (рис. 16.15). Вычислим параметры цикла:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{100 - 140}{2} = -20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{100 + 140}{2} = 120 \text{ МПа};$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{-140}{100} = -1,4.$$

Из табл. 16.2 принимаем значение $\psi_\sigma = 0,05$.

Так как среднее значение для отрицательных циклов принимается по модулю, то коэффициент безопасности по усталостному разрушению будет

$$n_r = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{180}{120 + 0,05 \cdot 20} = 1,49.$$

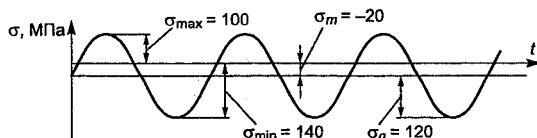


Рис. 16.15

Коэффициент безопасности по текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{240}{140} = 1,7.$$

Фактический коэффициент безопасности $n_r = n_{r\sigma} = 1,49$, а опасным состоянием является усталостное разрушение.

Пример 16.2. Проверить прочность двутавровой балки № 27, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $p = 5$ кН/м и переменной нагрузкой F , величина которой изменяется от 20 кН до -30 кН (рис. 16.16). Допускаемый коэффициент безопасности $[n_r] = 1,4$. Материал — сталь, $\sigma_T = 250$ МПа; $\sigma_B = 450$ МПа; $\sigma_{-1} = 200$ МПа; эффективный коэффициент концентрации в сечении, где приложена нагрузка, K_σ принять равным 1,2.

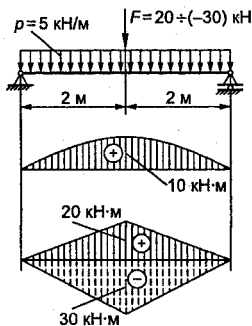


Рис. 16.16

Решение. Строим отдельно эпюры изгибающих моментов от распределенной нагрузки и переменной нагрузки F и находим опасное сечение. Пунктиром показана эпюра для $F = -30$ кН («—» указывает направление силы). Из анализа эпюр следует, что опасным является сечение по середине балки. Построим график изменения нормального напряжения σ в функции времени t для опасной точки в опасном сечении (рис. 16.17), для чего вычислим наибольшее и наименьшее значения напряжений. Из таблицы сортамента прокатной стали для двутавровой балки № 27 $W_z = 371$ см³.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{(10+20)10^5}{371} = 8086 \text{ Н/см}^2 = 80,86 \text{ МПа};$$

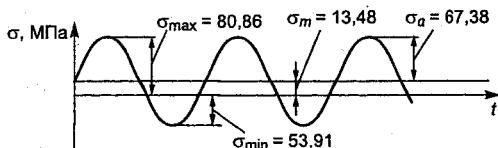


Рис. 16.17

$$\sigma_{\min} = \frac{(10-30)10^5}{371} = -5391 \text{ Н/см}^2 = -53,91 \text{ МПа};$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{80,86 - 53,91}{2} = 13,48 \text{ МПа};$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{80,86 + 53,91}{2} = 67,38 \text{ МПа};$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{53,91}{80,86} = -0,67.$$

Из табл. П.15 принимаем $\epsilon_M = 0,63$; из табл. П.17 $\epsilon_{II} = 0,75$; из табл. П.16 берем $\beta_{\text{упр}} = 1,1$. Коэффициент безопасности по усталостному разрушению

$$K_{\sigma_d} = \left(\frac{K_{\sigma}}{\epsilon_M} + \frac{1}{\epsilon_{II}} - 1 \right) \frac{1}{\beta_{\text{упр}}} = \left(\frac{1,2}{0,63} + \frac{1}{0,75} - 1 \right) \frac{1}{1,1} = 2,03.$$

Коэффициент ψ_{σ} , как и в предыдущем примере, принимаем равным 0,05.

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma_d} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{200}{2,03 \cdot 67,38 + 0,05 \cdot 13,48} = 1,45.$$

Коэффициент безопасности по текучести

$$n_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\max}} = \frac{250}{80,86} = 3,09.$$

Фактический коэффициент безопасности будет $n_r = n_{\sigma} = 1,45$, что больше $[n_r] = 1,4$. Следовательно прочность балки обеспечена.

Пример 16.3. Проверить прочность пружины (рис. 16.18, а), если средний диаметр витка $D = 20$ см, диаметр проволоки $d = 2$ см. Материал - легированная сталь, $\tau_{\tau} = 800$ МПа; $\tau_{-1} = 260$ МПа; $\sigma_b = 1000$ МПа. Сила F меняется от 3 кН до нуля (рис. 16.18, б). Проволока подвергалась поверхностной закалке токами высокой частоты.

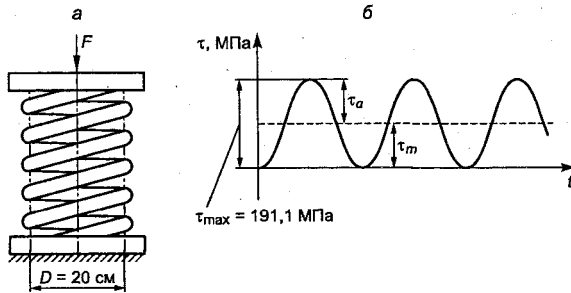


Рис. 16.18

Решение. Вычисляем параметры цикла:

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 3000 \cdot 20}{3,14 \cdot 2^3} = 19\,108 \text{ Н/см}^2 = 191,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_m = \tau_a = \frac{\tau_{\max}}{2} = \frac{19\,108}{2} = 9554 \text{ Н/см}^2 = 95,5 \text{ МПа};$$

Из табл. 16.2 принимаем $\psi_\phi = 0,10$. Из табл. П.15–П.17 принимаем $K_\tau = 1,0$, $\varepsilon_M = 0,86$, $\varepsilon_\Pi = 0,52$, $\beta_{\text{упр}} = 1,2$. Тогда

$$K_{\tau_d} = \left(\frac{K_\tau + 1}{\varepsilon_M \varepsilon_\Pi} - 1 \right) \frac{1}{\beta_{\text{упр}}} = \left(\frac{1}{0,86} + \frac{1}{0,52} - 1 \right) \frac{1}{1,2} = 1,73;$$

$$n_{r_\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau_d} \tau_a + \psi_\tau \tau_m} = \frac{260}{1,73 \cdot 95,5 + 0,1 \cdot 95,5} = 1,49.$$

Коэффициент безопасности по текучести

$$n_{r_\tau} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{800}{191,1} = 4,18.$$

Таким образом, фактический коэффициент безопасности по усталостному разрушению равен $n_r = n_\tau = 1,49$.

Пример 16.4. В опасном сечении стального вала $d = 50$ мм действует крутящий момент $T = 90\,000$ Н·см и изгибающий момент $M = 150\,000$ Н·см. Материал – сталь, $\sigma_B = 1000$ МПа; $\sigma_{-1} = 320$ МПа; $\tau_{-1} = 210$ МПа; $\sigma_T = 800$ МПа. Вал не имеет резких переходов, поверхность обработана на токарном станке и под-

верглась закалке токами высокой частоты. Определить коэффициент безопасности вала в опасном сечении, если нормальные напряжения от изгиба меняются по симметричному циклу, а касательные напряжения при кручении – по пульсационному. Требуемый коэффициент безопасности $[n_r] = 1,8$.

Решение. Так как крутящий и изгибающий моменты действуют одновременно, то материал в опасном сечении находится в двухосном напряженном состоянии.

Вычислим максимальное нормальное и касательное напряжения в опасном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{150\,000}{0,15^3} = 12\,000 \text{ Н/см}^2 = 120 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{90\,000}{0,25^3} = 3\,600 \text{ Н/см}^2 = 36 \text{ МПа}.$$

Изобразим графически циклы напряжений (рис. 16.19).

$$\sigma_a = 120 \text{ МПа}; \quad \tau_a = \frac{\tau_{\max}}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ МПа}.$$

Из табл. П.15 – П.17 принимаем $K_\sigma = K_\tau = 1$, $\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{m\sigma} = 0,74$, $\varepsilon_{\tau} = \varepsilon_{m\tau} = 0,82$, $\beta_{\text{упр}} = 1,2$. Из табл. 16.2 принимаем $\psi_\tau = 0,1$. Коэффициент безопасности по нормальным напряжениям

$$K_{\sigma_d} = K_{\tau_d} = \left(\frac{1}{0,74} + \frac{1}{0,82} - 1 \right) \frac{1}{1,2} = 1,31;$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma_d} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{320}{1,31 \cdot 120} = 2,04.$$

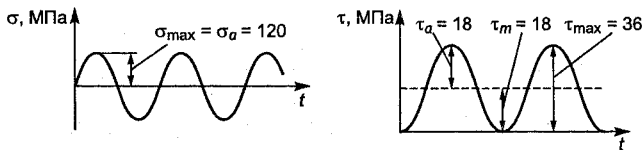


Рис. 16.19

Предел выносливости при сдвиге принимаем по эмпирической формуле

$$\tau_{-1} = (0,55 - 0,60) \sigma_{-1} = 0,55 \cdot 320 = 176 \text{ МПа.}$$

Коэффициент безопасности по касательным напряжениям

$$n_{\tau} = \frac{176}{1,31 \cdot 18 + 0,1187} = 6,93.$$

Общий коэффициент безопасности

$$n_r = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2,04 \cdot 6,93}{\sqrt{2,04^2 + 6,93^2}} = 1,96.$$

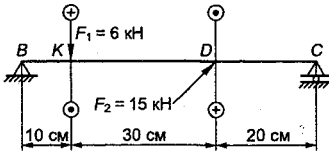


Рис. 16.20

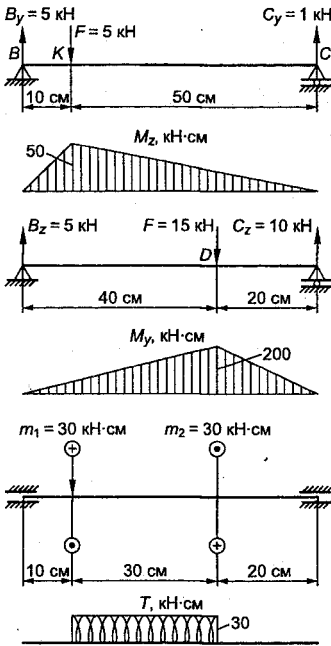


Рис. 16.21

Таким образом, прочность вала обеспечена.

Пример 16.5. Определить диаметр вала (рис.16.20), если $\sigma_B = 500 \text{ МПа}$; $\sigma_{-1} = 220 \text{ МПа}$; $\sigma_T = 300 \text{ МПа}$. Вал вращается равномерно. Требуемый коэффициент безопасности $[n_r] = 1,5$. Поверхность обработана токами высокой частоты.

Решение. Строим эпюры изгибающих моментов отдельно в вертикальной и горизонтальной плоскостях и эпюру крутящего момента (рис. 16.21).

Задаемся коэффициентом безопасности $n = 4$ и определяем диаметр вала по третьей теории прочности. Из эпюр следует, что опасное сечение вала будет в точке D , где действуют изгибающие моменты $M_y = 200 \text{ кН}\cdot\text{см}$, $M_z = 20 \text{ кН}\cdot\text{см}$, $T = 30 \text{ кН}\cdot\text{см}$. Приведенный изгибающий момент

$$M_{\text{прив}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T^2} = \sqrt{20^2 + 200^2 + 30^2} = 203,2 \text{ кН}\cdot\text{см.}$$

$$\text{Допускаемое напряжение } [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{300}{4} = 75 \text{ МПа.}$$

$$\text{Диаметр вала } d = \sqrt[3]{\frac{203,2 \cdot 10^3 \cdot 32}{3,14 \cdot 7500}} = 6,5 \text{ см.}$$

Проводим проверочный расчет вала. В сечении D находится шпоночная канавка, вал имеет шлифованную поверхность с закалкой токами высокой частоты.

По таблицам принимаем $K_\sigma = 1,5$, $K_\tau = 1,4$, $\varepsilon_{m\sigma} = \varepsilon_{m\tau} = 0,73$, $\varepsilon_{п\sigma} = \varepsilon_{п\tau} = 1,0$, $\beta_{\text{упр}} = 1,2$.

Для вычисления нормальных и касательных напряжений, определяем осевой и полярный моменты сопротивления по нетто-сечению вала при наличии одной шпоночной канавки по формулам

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d} \quad \text{и} \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d},$$

где d - диаметр вала; b - ширина шпонки; $t = h/2$, h - толщина шпонки.

Для вала $d = 65$ мм принимаем стандартную шпонку $b \times h = 18 \times 11$ мм.

Тогда

$$W_z = \frac{3,14 \cdot 6,5^3}{32} - \frac{1,8 \cdot 1,1 \cdot 0,5 \cdot (6,5 - 1,1 \cdot 0,5)^2}{2 \cdot 6,5} = 24,25 \text{ см}^3;$$

$$W_p = \frac{3,14 \cdot 6,5^3}{16} - \frac{1,8 \cdot 1,1 \cdot 0,5 \cdot (6,5 - 1,1 \cdot 0,5)^2}{2 \cdot 6,5} = 51,2 \text{ см}^3.$$

Нормальные напряжения изменяются по симметричному циклу с параметрами

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_a = \frac{M_{\text{max}}}{W_z} = \frac{\sqrt{20^2 + 200^2} \cdot 10^3}{24,25} = 8289 \text{ Н/см}^2 = 82,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_m = 0.$$

Коэффициент безопасности по нормальным напряжениям

$$K_{\sigma_d} = \left(\frac{1}{0,73} + \frac{1}{1,0} - 1 \right) \frac{1}{1,2} = 1,71;$$

$$n_{\sigma} = \frac{220}{1,71 \cdot 82,9} = 1,55.$$

Касательные напряжения при равномерном вращении вала будут постоянными:

$$\tau_{\max} = \tau_m = \frac{30000}{51,2} = 586 \text{ Н/см}^2 = 5,86 \text{ МПа};$$

$$\tau_a = 0.$$

Коэффициент безопасности по текучести

$$n_{\tau} = n_{\tau_t} = \frac{0,5 \cdot 300}{5,86} = 25,6.$$

Общий коэффициент безопасности для вала

$$n_r = \frac{1,55 \cdot 25,6}{\sqrt{1,55^2 + 25,6^2}} = 1,54.$$

Фактический коэффициент безопасности находится в требуемых пределах, поэтому пересчет диаметра вала не требуется. Как и следовало ожидать, опасным является усталостное разрушение от изгиба.

16.11. Понятие о малоцикловой усталости

Разрушение материалов до $5 \cdot 10^4 - 10^5$ циклов при номинальных напряжениях, равных и превышающих предел текучести, называется **малоцикловой усталостью**. Механизм малоцикловой усталости определяется циклическим упруго-пластическим деформированием материала, различным его сопротивлением упругим и пластическим деформациям, способностью к накоплению пластических деформаций. В результате наличия пластических деформаций сопротивление материала действию переменных напряжений отличается от сопротивления действию переменных деформаций. В связи с этим существуют две методики испытаний: при постоянной амплитуде напряжений и при постоянной амплитуде деформаций.

В первой методике при испытании постоянной величиной является размах напряжений, нагружение называется **мягким**; во второй - размах деформаций, нагружение называется **жестким**. При малоцикловом разрушении, в отличие от многоциклового усталостного разрушения, в зоне излома наблюдается значительная, до 1 %, пластическая деформация.

Характеристики сопротивления материалов циклическим упруго-пластическим деформациям получают в результате испытания на малоцикловую усталость специальных образцов в условиях однородного напряженного состояния, используя метод мягкого или жесткого нагружения. Форма и размеры образцов для испытаний показаны на рис. 16.22.

Основным типом образцов для малоцикловых испытаний на растяжение-сжатие являются образцы (рис. 16.22, а, б) диаметром 5; 7,5; 10; 12 мм. Длина рабочей части $l = (2 - 5,65) \sqrt{A_0}$, где A_0 - площадь поперечного сечения. Иногда используются трубчатые образцы (рис. 16.22, в) с толщиной стенки 0,8 - 1,00 мм. Поверхность образцов шлифованная. Испытания на малоцикловую усталость проводят при малых частотах 1 - 10 цикл/мин при базе испытаний $10^3 - 10^5$ циклов.

Кривые малоциклового усталости строятся по результатам испытаний серии образцов в координатах $\lg \sigma - \lg N$ и $\lg \varepsilon - \lg N$ в диапазоне $10 - 10^5$ циклов и представляют зависимость долговечности от циклической упруго-пластической деформации (рис. 16.23).

На участке *AB*, достигающем $10^3 - 10^5$ циклов, разрушение носит статический характер, одинаковый с однократным разрушением, происходит с образованием шейки и исчерпанием всей пластичности материала. На участке *BC* с ростом

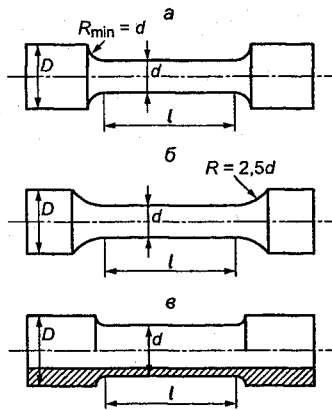


Рис. 16.22

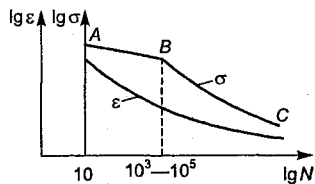


Рис. 16.23

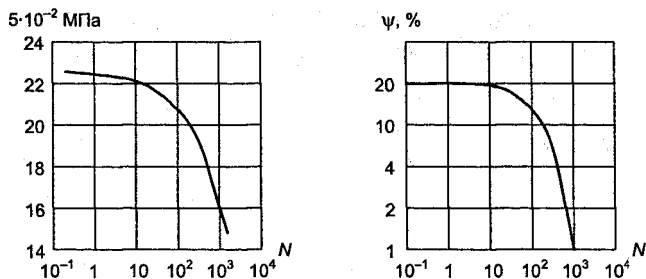


Рис. 16.24

числа циклов и уменьшением амплитуды напряжения макропластическая деформация уменьшается и с приближением к точке C совсем исчезает, т.е. разрушение становится многоцикловым, происходящим в результате образования и распространения усталостной трещины. На рис. 16.24 представлены действительные кривые малоциклового усталости и изменения пластичности в образцах из стали ЭИ-96-1.

Согласно графикам при малоциклового усталости процессы накопления усталостных повреждений и накопления макропластических деформаций совпадают.

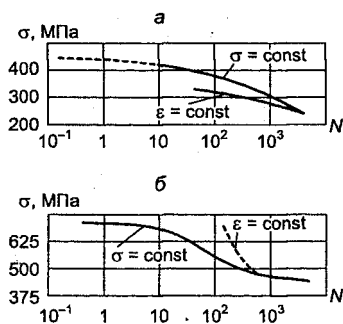


Рис. 16.25

На рис. 16.25 показаны кривые усталости при мягком и жестком режимах нагружения для алюминиевого сплава В-96 (а) и теплоустойчивой стали (б).

Приведенные графики показывают, что долговечность при мягком и жестком режимах нагружения в области больших деформаций ($N < 10^3$) различаются значительно; в области малых упруго-пластических деформаций ($N > 10^3$) разница долговеч-

ностей незначительна. При обоих видах нагружения циклическое деформирование в упруго-пластической области сопровождается образованием петли гистериса, представляющей работу деформации за полный цикл. Зависимость между напряжениями и деформациями при малоциклового испытаний выражается диаграммами циклического упруго-пластического деформирования.

Рассмотрим диаграмму циклического упруго-пластического деформирования при мягком нагружении, построенную в относительных координатах

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_T} \quad \text{и} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_T},$$

где σ_T - предел текучести, за который принимается предел пропорциональности; ε_T - соответствующая σ_T деформация (рис. 16.26, а).

При первом нагружении состояние материала описывается кривой OAB , соответствующей диаграмме статического деформирования в координатах $\sigma - \varepsilon$ и характеризуется напряжением $\bar{\sigma}_0$ и деформацией $\bar{\varepsilon}_0$. После точки B происходит разгрузка по линии, близкой к прямой. В разгруженном образце возникает пластическая деформация $\bar{\varepsilon}_p^0$. Дальнейшее нагружение сжимающими напряжениями по линии CD и разгрузка по линии DM приводит к образованию незамкнутой петли упруго-пластического деформирования шириной $\bar{\delta}^{(1)}$. Считается, что исходное нагружение и разгрузка образуют нулевой ($K = 0$) полуцикл нагружения; реверсивное нагружение и разгрузка составляют первый ($K = 1$) полуцикл нагружения. Совокупность нулевого и первого полуциклов образуют первый ($N = 1$) цикл нагружения. Повторные нагружения и разгрузки образуют кри-

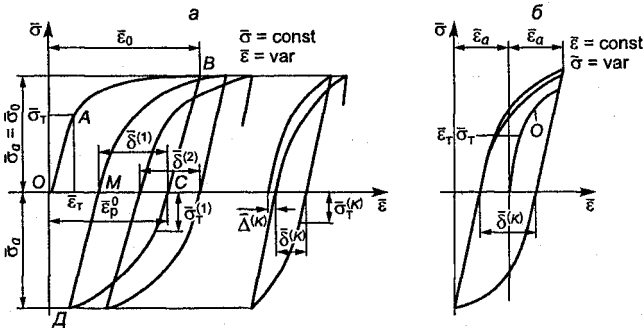


Рис. 16.26

вые циклического деформирования в общем случае с изменяющейся шириной петли $\bar{\delta}^{(K)}$.

Основными параметрами упруго-пластического деформирования в полувцикле (K) при мягком нагружении являются размах напряжений $2\bar{\sigma}_a$, ширина петли гистерезиса $\bar{\delta}^{(K)}$, односторонне накопленная суммарная пластическая деформация $\bar{\Delta}^{(K)}$, равная разности между шириной петли в полувцикле (K) и в полувцикле ($K+1$). Так как ширина петли гистерезиса представляет собой пластическую деформацию за полувцикл, то $\bar{\Delta}^K$ будет определять накопленную за цикл одностороннюю пластическую деформацию. Переход к нелинейному участку диаграммы происходит при напряжениях и деформациях, равных пределу текучести в данном полувцикле.

Форма кривых деформирования и величина предела текучести в процессе циклического деформирования изменяются в зависимости от свойств материала. У многих материалов и сплавов при циклическом упруго-пластическом деформировании пластическая деформация, полученная при сжатии, уменьшает предел текучести при последующем растяжении, и наоборот. Это явление называется **эффектом Баушингера**. Таким образом, согласно эффекту Баушингера, с увеличением числа циклов будет изменяться сопротивление упруго-пластическому деформированию и происходить уменьшение предела текучести. Согласно экспериментальным данным нагружение образца в обратном направлении относительно исходного уменьшает модуль разгрузки на 3 - 9 %, а предел пропорциональности - на 5 - 10 %. С целью упрощения в практических расчетах часто предел текучести принимают не зависящим от числа циклов. Для разных материалов характер изменения ширины петли с числом циклов различен. Следовательно, различной будет односторонне накопленная пластическая деформация.

Диаграмма циклического деформирования при малоцикловом жестком нагружении, когда в процессе испытаний постоянной сохраняется амплитуда деформации $\bar{\epsilon}_a$, показана на рис. 16.26, б. При жестком нагружении амплитуда и размах напряжений цикла изменяются. Изменения напряжений зависят от свойств материала.

При малоцикловом нагружении материалы делятся на **циклически анизотропные** и **изотропные**. К циклически анизотропным относят материалы, которые оказывают различное сопротивление циклическому деформированию во время четных и нечетных полуциклов нагружения. В зависимости от циклической изотропности или анизотропности материала, режима нагружения при испытании односторонние пластические деформации могут накапливаться или отсутствовать,

Следует отметить, что в элементах конструкций материал пластически деформируется, как правило, лишь в зонах повышенной концентрации, а его основная масса находится в упругом состоянии, из-за чего накопление односторонних деформаций затруднительно. Поэтому эффект циклической анизотропности свойств будет незначительным и в расчетах им обычно пренебрегают. Материалы, у которых ширина петли гистерезиса при мягком и жестком нагружении практически не зависит от числа циклов, называются **циклически стабилизирующимися**.

Для циклически стабилизирующихся материалов $\bar{\delta}^{(k)} = \bar{\delta}^{(1)}$. Материалы, у которых ширина петли гистерезиса при мягком нагружении с ростом числа циклов уменьшается, при этом суммарная пластическая деформация стремится к некоторой постоянной величине, а при жестком нагружении амплитуды напряжений цикла увеличиваются, называются **циклически упрочняющимися**.

Для циклически упрочняющихся материалов изменение ширины петли гистерезиса от числа полуциклов описывается уравнением

$$\bar{\delta}^{(k)} = \frac{\bar{\delta}^{(1)}}{k^\alpha}, \quad (16.32)$$

где α - эмпирический коэффициент, изменяющийся в пределах 0 - 0,3.

Материалы, у которых ширина петли гистерезиса и суммарная пластическая деформация при мягком нагружении с ростом числа циклов увеличиваются, а при жестком нагружении амплитуды напряжений цикла уменьшаются, называются **циклически разупрочняющимися**. Для циклически разупрочняющихся материалов изменение ширины петли гистерезиса от числа полуциклов описывается уравнением

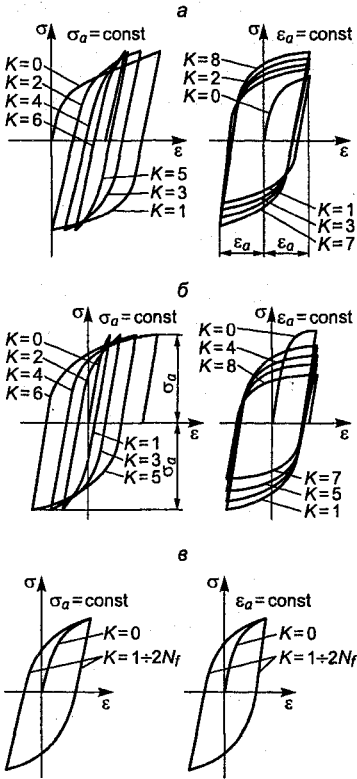


Рис. 16.27

$$\bar{\delta}^{(K)} = \bar{\delta}^{(1)} e^{\beta(K-1)}, \quad (16.33)$$

где $\bar{\delta}^{(1)}$ - ширина петли в первом полуцикле; β - эмпирический коэффициент изменяется в пределах 0,01 - 0,1.

На рисунке 16.27 представлены диаграммы деформирования циклически упрочняющегося (а), циклически разупрочняющегося (б) и циклически стабилизирующегося (в) материалов.

На рис. 16.28 показан характер изменения при мягком нагружении односторонних деформаций для циклически упрочняющихся, разупрочняющихся и стабилизирующихся материалов от числа циклов K .

Из рисунка следует, что для циклически упрочняющихся материалов накопление односторонних пластических деформаций с ростом числа циклов носит затухающий характер; для циклически разупроч-

няющихся - накопление односторонних пластических деформаций является прогрессирующим и для стабилизирующихся - накопление пластических деформаций имеет стабильный характер. Циклический предел текучести обычно у циклически упрочняющихся материалов растет; у циклически разупроч-

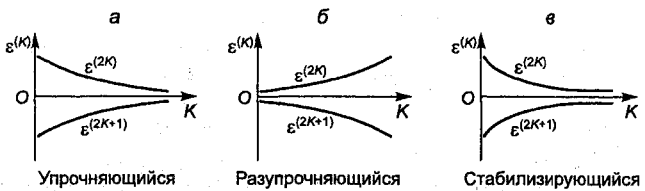


Рис. 16.28

прочняющихся - уменьшается; у циклически стабилизирующихся материалов остается постоянным.

Суммарная односторонне накопленная пластическая деформация за (K) полуциклов удовлетворительно описывается уравнением

$$\bar{\varepsilon}_p^{(K)} = \bar{\varepsilon}_0 - \bar{\tau}_0 + \sum_1^K (-1)^K \bar{\delta}^{(K)} + \dots \quad (16.34)$$

где $\bar{\delta}^{(K)}$ - величина упруго-пластической деформации, достигнутой после K -го полуцикла.

Ширина петли первого полуцикла $\bar{\delta}^{(1)}$ связана с пластической деформацией нулевого полуцикла выражением

$$\bar{\delta}^{(1)} = A(\bar{\varepsilon}_0 - 1), \quad (16.35)$$

где A - постоянная материала, равная $A = K_A \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_s}} \right)$; K_A -

постоянная, равная 0,16; $\sigma_{0,2}$ и σ_s - условные предел текучести и предел прочности материала.

Следует отметить, что материалы с отношением $\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_s} > 0,5$

склонны к циклическому разупрочнению, а при $\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_s} < 0,5$ - к

циклическому упрочнению.

Один и тот же материал в зависимости от температуры, технологических методов (термообработка, отжиг и др.) может проявлять свойства циклически упрочняющегося или циклически разупрочняющегося материала. При больших нагрузках, сокращающих долговечность до 10^3 циклов, все материалы проявляют свойства разупрочняющихся.

Односторонние пластические деформации, накопленные при мягком нагружении, приводят циклически стабилизирую-

щиеся и разупрочняющиеся материалы к квазистатическому или усталостному малоцикловому разрушению.

Квазистатическое малоцикловое разрушение наступает, когда односторонние пластические деформации достигают уровня, соответствующего разрушению материала при однократном статическом разрыве: $\epsilon_p^{(K)} \approx (0,9-1)\epsilon_u$ (где ϵ_u — деформация при статическом разрыве).

Усталостное малоцикловое разрушение связано с образованием при малых пластических деформациях: $\epsilon_p^{(K)} < 0,1\epsilon_u$, усталостных трещин. Разрушение циклически упрочняющихся материалов происходит только от усталости. Кривая усталости для этих материалов в диапазоне 10^2-10^4 циклов описывается эмпирическим уравнением

$$\sigma_a N_p^\mu = C,$$

где σ_a — амплитуда напряжения; μ — показатель степени; N — число циклов до разрушения.

При жестком нагружении *упрочняющихся материалов* амплитуда напряжений (размах) вначале увеличивается, затем с ростом числа циклов уменьшается и, наконец, принимает до разрушения постоянное значение. Постоянное значение размаха напряжений называют **размахом «насыщения»**.

При испытании *разупрочняющихся материалов* амплитуда напряжений с числом циклов уменьшается, но размах напряжений быстро принимает постоянное значение, зависящее от амплитуды циклической деформации. Согласно экспериментам при жестком нагружении уменьшение модуля разгрузки по сравнению с модулем упругости составляет 10–15 %, уменьшение предела текучести составляет 5–8 %.

Так как при жестком нагружении накопления пластических деформаций не происходит, то *малоцикловое разрушение всех материалов* при испытании носит усталостный характер.

Исследования при постоянной амплитуде деформаций показали, что число циклов деформации до появления трещины $N_{тр}$ однозначно зависит от амплитуды пластической деформации. Это объясняется тем, что усталостная трещина представляет собой результат циклически повторяемых пластических сдвигов.

Для описания малоциклового усталости при жестком нагружении Коффин в 1954 г. предложил деформационный критерий в виде

$$N_{\text{тр}}^K \Delta \varepsilon_p = C_I, \quad (16.37)$$

где $N_{\text{тр}}$ - число циклов до образования трещины; $\Delta \varepsilon_p$ - размах пластической деформации цикла; K и C_I - эмпирические постоянные. Значения K и C_I для некоторых материалов приведены в табл. 16.3.

Таблица 16.3

Материал	K	C_I
Сталь 40X	0,50	0,077
Сталь 20X	0,63	0,390
Сталь 25	0,71	1,380
Сталь 45	1,00	5,490
Сплав ЭИ437Б	1,27	16,980
Сплав ЭИ827F	1,50	25,120

Постоянную C_I можно определить через деформацию ε_u

при статическом разрыве: $C_I = \frac{\varepsilon_u}{2}$.

Уравнение (16.37) является основным критерием оценки долговечности при небольшом числе циклов нагружения, когда сопротивление создается пластическими деформациями, а упругая деформация незначительна. С увеличением числа циклов до разрушения упругая деформация увеличивается, а пластическая, наоборот, становится незначительной. В этом случае для описания в рамках одной модели, как малоциклового, так и многоциклового усталости, Мэнсон в 1965 г. предложил объединенный деформационный критерий:

$$\Delta \varepsilon = C_I N_{\text{тр}}^{-\mu} + 3,5 N_{\text{тр}}^{-V} \frac{\sigma_b}{E}, \quad (16.38)$$

где $\Delta \varepsilon$ - размах полной деформации цикла; σ_b - предел прочности при растяжении; E - модуль упругости; показатели V и μ принимают равным 0,12; показатель $\mu = 0,6$.

Уравнение (16.38) справедливо и при повышенных температурах. Оно позволяет оценить с достаточной точностью долговечность материалов в широком диапазоне перемен пластических деформаций.

При уменьшении размаха циклических нагрузок и увеличении вследствие этого числа циклов $N_{\text{тр}}$ амплитуды упругих и пластических деформаций становятся соизмеримыми. В данном случае для симметричного знакопеременного цикла Мэнсон предложил следующую зависимость:

$$2\varepsilon_a = 1,75 \left(\frac{\sigma_u}{E} \right) N_{\text{тр}}^{-0,12} + 0,5 (\varepsilon_u / N_{\text{тр}})^{0,6}, \quad (16.39)$$

где σ_u - напряжение в шейке образца при статическом разрушении; ε_u - располагаемая пластичность (деформационная способность) материала, определяемая пластичностью образца при статическом разрушении:

$$\varepsilon_u = l n \frac{1}{1-\psi},$$

где ψ - относительное сужение поперечного сечения образца при разрыве.

Уравнение (16.39) было преобразовано Б. Ленжером к виду

$$\bar{\varepsilon}_a = \left[\frac{1}{4\varepsilon_T} \right] N_{\text{тр}}^\mu \ln \left(\frac{1}{1-\psi} \right) + \frac{\sigma_{-1}}{E\varepsilon_T}, \quad (16.40)$$

где $\bar{\varepsilon}_a = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_T}$; $\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}$; σ_{-1} - предел выносливости при $2 \cdot 10^6$ циклов.

Введя в уравнение (16.40) коэффициент безопасности по долговечности n_N или по амплитуде деформации n_ε , получим выражение для допускаемых амплитуд деформации

$$[\varepsilon_a] = \frac{1}{4\varepsilon_T} (n_N \cdot N_{\text{тр}})^{-\mu} \ln \frac{1}{1-\psi} + \frac{\sigma_{-1}}{E\varepsilon_T}, \quad (16.41)$$

или

$$[\varepsilon_a] = \frac{1}{n_\varepsilon 4\varepsilon_T} N_{\text{тр}}^{-\mu} \ln \frac{1}{1-\psi} + \frac{\sigma_{-1}}{n_\varepsilon E\varepsilon_T}. \quad (16.42)$$

Формулы (16.41) и (16.42) широко используются при расчете элементов конструкций на долговечность.

Необходимо отметить, что в зонах концентрации напряжений условия жесткого нагружения существуют, даже если напряжения вне зоны концентрации создают мягкий цикл.

Таким образом, в зависимости от накопления односторонних пластических деформаций или их отсутствия будет происходить квазистатическое малоцикловое разрушение с характеристиками пластичности, соответствующими условиям однократного нагружения до разрыва, или малоцикловое усталостное разрушение с образованием макротрещины усталостного типа. Для расчета на малоцикловую усталость элементов конструкций в настоящее время используют деформационно-кинетические критерии, основанные на линейном суммировании усталостных и квазистатических повреждений. При этом усталостные повреждения связываются с циклическими упругими деформациями, а квазистатические – с односторонне накопленными пластическими деформациями. Линейное правило суммирования было впервые предложено Пальмгреном в 1924 г. при расчете подшипников на долговечность. Затем Решетовым и Майнером оно было применено в расчетах на усталость и длительную прочность.

Предельное состояние по моменту образования трещины малоцикловой усталости имеет следующий вид:

$$\int_1^{N_{тр}} \frac{dN}{N_{\epsilon_i}} + \int_0^{\epsilon_p} \frac{d\epsilon}{\epsilon_{тр}} = 1, \quad (16.43)$$

где $N_{тр}$ – число циклов до образования трещины; N – число циклов нагружения; N_{ϵ_i} – число циклов при заданной в цикле нагружения деформации; ϵ – односторонне накопленная в процессе циклического нагружения деформация; $\epsilon_{тр}$ – односторонне накопленная к образованию трещины деформация; ϵ_p – пластическая деформация материала в момент разрушения.

Первый член в (16.43) учитывает повреждения от многоциклового усталости, второй – повреждения от малоциклового усталости. Отсюда условия прочности по критериям усталостного и квазистатического разрушения будут такими:

$$\int_1^{N_{тр}} \frac{dN}{N_{\epsilon_i}} \leq 1; \quad \int_0^{\epsilon_p} \frac{d\epsilon}{\epsilon_{тр}} \leq 1, \quad (16.44)$$

В формуле (16.43) квазистатические и усталостные повреждения суммируются независимо, без разделения эффектов, вызываемых упругими и пластическими деформациями. Формула

(16.44) определяет условие достижения предельного состояния по моменту образования трещины малоциклового усталости.

Исследования малоциклового прочностии при двухосном напряженном состоянии показывают, что малоциклового долговечность существенно зависит от вида напряженного состояния. Результаты могут отличаться на порядок.

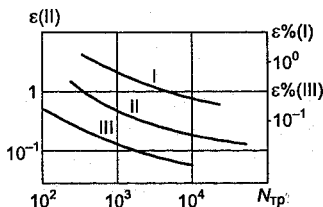


Рис. 16.29

На рис. 16.29 представлены кривые малоциклового усталости, полученные при испытании образцов на изгиб (I), кручение (II) и растяжение - сжатие (III).

Сравнение кривых усталости показывает, что наименьшую циклическую долговечность имеют образцы при испытании на растяжение - сжатие. Поэтому основным видом нагружения при испытании

на малоциклового прочностии является растяжение - сжатие.

Увеличение мощности машин и несущей способности конструкций при одновременном снижении их металлоемкости требует проведения поверочных расчетов высоконагруженных элементов на сопротивление малоциклового разрушению, так как в условиях эксплуатации при циклическом нагружении в нагруженных зонах (зоны концентрации, действия температурных нагрузок) возникают знакопеременные местные упруго-пластические деформации, вызывающие трещины малоциклового усталости.

Повышение прочностии и долговечности конструкции предусматривает проведение ряда конструктивных, технологических и эксплуатационных мероприятий, таких как выбор материала, параметров сечения, уменьшение в опасных зонах концентрации напряжений, постановка тепловых экранов, выбор режимов и т.д. Кроме того, требуется организация соответствующего контроля за образованием и развитием трещин малоциклового усталости, проведение анализа накопленных повреждений и расчет остаточного ресурса. В связи со сложностью методов расчета на прочностии и долговечность при малоциклового нагружении, а также необходимые нормативные материалы в настоящее время разработаны и используются пока для ответственных конструкций, таких как атомные реакторы, реактивные двигатели, паровые турбины, летательные аппараты, сосуды давления и т.д.

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЖЕНИЯ

17.1. Динамические нагрузки, вызывающие движение тела с ускорением

Динамическим называется такой вид нагружения, при котором приложенные к элементу конструкции внешние нагрузки значительно изменяются за малые промежутки времени. Такие нагрузки, а также вызываемые ими в теле напряжения и деформации называются динамическими. При действии динамической нагрузки движение тела совершается с ускорением или происходит резкое изменение скоростей соприкоснувшихся тел. Так, первый случай имеет место при подъеме грузов с ускорением, второй – при забивании свай в грунт с помощью копра, при ударе бойка кузнечного молота о наковальню и т.д. При ускоренном движении тела на него будут действовать силы инерции, которые должны учитываться в расчете. Динамический расчет имеет целью обеспечить необходимую прочность и не допустить нежелательных деформаций конструкции. Расчеты при динамической нагрузке, вызывающей движение тела с ускорением, ведутся на основе принципа Д’Аламбера²⁸. Согласно этому принципу всякое движущееся тело в любой момент времени можно рассматривать как находящееся в состоянии равновесия под действием внешних сил (включая опорные реакции) и сил инерции. Сила инерции равна произведению массы тела на ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению.

Рассмотрим подъем груза весом F , движущегося с постоянным ускорением (рис. 17.1, а), и определим напряжение в тросе. Мысленно проведем сечение через трос, введем динамическое усилие N_d и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 17.1, б). Приложив, согласно принципу Д’Аламбера, силу инерции $F_{и}$, напишем уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

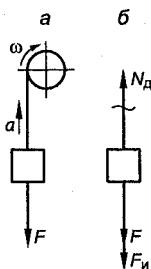


Рис. 17.1

$$N_d - F - F_{и} = 0. \quad (17.1)$$

Откуда динамическое усилие в тросе будет равно

$$N_d = F + F_{\text{и}} = F + \frac{F}{g} a = F \left(1 + \frac{a}{g} \right). \quad (17.2)$$

Величина $1 + \frac{a}{g}$ обозначается буквой K_d и называется **динамическим коэффициентом**. Подставляя в (17.2) динамический коэффициент, получим

$$N_d = K_d F. \quad (17.3)$$

Динамическое напряжение найдем, разделив N_d на площадь поперечного сечения каната:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{F}{A} K_d = \sigma_c K_d, \quad (17.4)$$

где σ_c – статическое напряжение в проведенном сечении от веса груза.

Таким образом, как динамическое усилие, так и динамическое напряжение равно статическому, умноженному на динамический коэффициент.

Рассмотрим подъем балки постоянного сечения. Силы инерции, подобно силам веса, являются объемными силами, так как они приложены к каждой частице тела. При расчете балок и стержневых систем объемные силы инерции заменяют распределенной инерционной нагрузкой, интенсивностью $p_{\text{и}}$, определяемой следующим образом.

Выделим из балки, перемещающейся с ускорением a , элемент длиной dx . Элементарная сила инерции $dF_{\text{и}}$, действующая на выделенный элемент, равна

$$dF_{\text{и}} = a \cdot dm, \quad (17.5)$$

где dm – масса элемента. Но

$$dm = \frac{dG}{g} = \frac{\gamma \cdot dV}{g} = \frac{\gamma A \cdot dx}{g}, \quad (17.6)$$

где dG – вес выделенного элемента; γ – удельный вес материала; dV – объем выделенного элемента, равный $A \cdot dx$; A – площадь поперечного сечения; g – ускорение силы тяжести ($g = 9,81 \text{ м/с}^2$).

Тогда

$$dF_{и} = \frac{\gamma A \cdot dx}{g} a. \quad (17.7)$$

Интенсивность распределенной инерционной нагрузки

$$p_{и} = \frac{dF_{и}}{dx} = \frac{\gamma A \cdot dx}{g \cdot dx} a = \frac{\gamma A}{g} a. \quad (17.8)$$

При подъеме балки на нее будут действовать равномерно распределенная нагрузка от собственного веса интенсивностью

$$p = \frac{G}{l} = \frac{\gamma A l}{l} = \gamma A, \quad (17.9)$$

(где l - длина балки) и распределенная инерционная нагрузка интенсивностью $p_{и}$.

Пусть балка постоянного поперечного сечения подвешена на тросе крана, закрепленном в среднем сечении B (рис.17.2, а). Под действием силы тяжести балка изогнется. Теперь представим, что произведено включение двигателя и трос начал поднимать сечение B балки с некоторым ускорением a . При этом возникнут силы инерции, распределенные по длине балки.

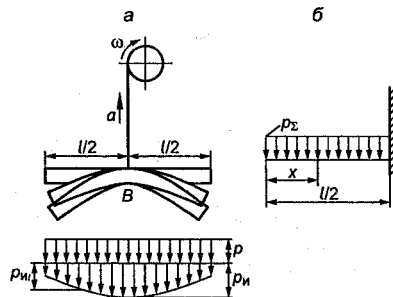


Рис. 17.2

Они вызовут дополнительный изгиб балки. В результате изгиба различные сечения будут перемещаться при подъеме с различным ускорением a_i . Поэтому в общем случае интенсивность распределенной инерционной нагрузки $p_{и_i}$ будет переменной по длине балки. В расчетах принимают жесткость балки при изгибе значительной, влиянием деформаций на ускорение пренебрегают и считают, что ускорение всех сечений одинаково и равно ускорению сечения B , а распределенная инерционная нагрузка имеет постоянную интенсивность $p_{и}$. Интенсивность суммарной равномерно распределенной нагрузки p_{Σ} , действующей на балку, равна сумме интенсивностей равномерно распределенной нагрузки от соб-

ственного веса и равномерно распределенной инерционной нагрузки:

$$p_{\Sigma} = p + p_{и} = \gamma A + \frac{\gamma A}{g} a = \gamma A \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \gamma A K_{д}, \quad (17.10)$$

где $K_{д}$ - динамический коэффициент.

Найдем динамическое напряжение в поперечном сечении балки, расположенном на расстоянии x от свободного конца. Расчетная схема балки представлена на рис.17.2, б.

$$\sigma_{дx} = \frac{M_x}{W_z} = \frac{p_{\Sigma} x^2}{2W_z} = \frac{\gamma A x^2}{2W_z} K_{д}. \quad (17.11)$$

Максимальное динамическое напряжение возникает в сечении при $x = l/2$:

$$\sigma_{дmax} = \frac{\gamma A l^2}{8W_z} K_{д} = \sigma_{стmax} K_{д}. \quad (17.12)$$

Из формулы (17.12) следует, что динамическое напряжение пропорционально квадрату длины балки и ускорению подъема. Условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{дmax} = \sigma_{стmax} K_{д} \leq [\sigma], \quad (17.13)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

Полученные выражения (17.3), (17.4), (17.10), (17.11), (17.12), (17.13) показывают, что динамические задачи можно решать как статические, умножая конечный результат на динамический коэффициент.

17.2. Ударная нагрузка

При ударной нагрузке происходит резкое изменение скоростей соприкоснувшихся тел за очень малый промежуток времени. Задача расчета конструкций на ударную нагрузку содержит большие теоретические и экспериментальные трудности. Поэтому в практических расчетах пользуются приближенными методами, основанными на ряде упрощающих явлений гипотез. Приближенные методы расчета, не обеспечивая высокой точности, в то же время позволяют правильно оценить порядок перемещений, ударных нагрузок и напряжений. При ударе возникают большие ударные нагрузки, во много раз превосходящие

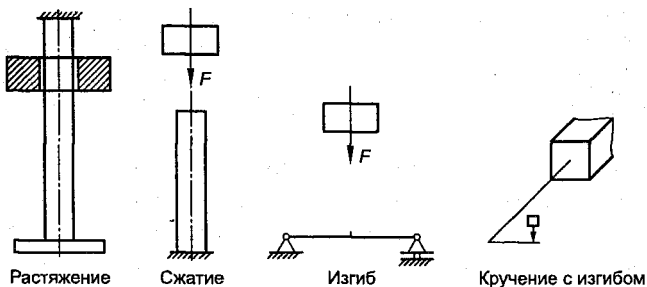


Рис. 17.3

внешние силы, большие динамические деформации тела. Ударная нагрузка в общем случае может вызывать растяжение, сжатие, изгиб, кручение, а также их комбинации (рис.17.3).

При расчете на ударную нагрузку принимаются следующие гипотезы.

1. При ударе в теле возникают только упругие деформации, а материал в процессе удара подчиняется закону Гука.
2. Удар считается совершенно неупругим, т.е. после удара скорости соприкоснувшихся тел остаются постоянными.

Пусть тело весом F с высоты h движется по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, и ударяется о наклонно расположенный упругий стержень (рис. 17.4). Груз F , опустившись по наклонной плоскости с высоты h ,

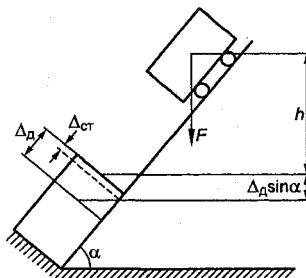


Рис. 17.4

со скоростью $v = \sqrt{2gh}$, придет в соприкосновение со стержнем и начнет его деформировать. Стержень будет оказывать упругое сопротивление движению груза, возрастающее по мере деформации. Вследствие сопротивления скорость движущегося груза уменьшается и в некоторый момент времени после удара станет равной нулю. В этот момент динамическая нагрузка F_d , динамическая деформация Δ_d и напряжение σ_d в теле достигнут наибольших величин. Дальше под действием упругих сил в системе стержень - груз будут происходить затухающие колебания, и система придет в состояние статического равновесия, при котором напряжения и деформации в стержне будут равны их значе-

ниям от статического действия силы F . При ударе происходит быстрое превращение одного вида энергии в другой: кинетическая энергия ударяющего груза превращается в потенциальную энергию деформации стержня. В процессе удара, согласно принятым гипотезам, можно четко выделить два этапа.

Первый этап начинается с момента соприкосновения падающего груза, имеющего максимальную скорость v , со стержнем и заканчивается, когда груз и верхнее сечение стержня приобретают одинаковую скорость v_1 , а перемещение системы остается еще равным нулю.

Второй этап начинается с момента совместного движения системы со скоростью v_1 и заканчивается, когда скорость упругой системы станет равной нулю, а перемещение системы достигнет максимального значения Δ_d . За время удара деформация не успевает распространиться на весь объем ударяемого стержня, поэтому в момент начала второго этапа удара только верхний конец стержня и прилегающая к нему часть массы стержня будут иметь скорость v_1 , а остальная масса стержня будет иметь скорость значительно меньшую, причем нижнее сечение остается в покое.

Скорость в конце первого этапа определим из условия, что при неупругом ударе количество движения до удара равно количеству движения после удара. Так как в результате соударения не вся масса стержня движется с одинаковой скоростью, то чтобы вычислить скорость v_1 , необходимо воспользоваться

приведенной массой $\eta \frac{Q}{g}$ (где Q - вес стержня) вместо действительной массы стержня. Коэффициент приведения массы показывает, какую часть массы стержня необходимо поместить в место удара, чтобы эта часть массы, двигаясь со скоростью v_1 , обладала кинетической энергией всего стержня. Закон сохранения количества движения запишется в виде

$$\frac{Fv}{g} = \frac{F + \eta Q}{g} v_1, \quad (17.14)$$

откуда

$$v_1 = \frac{F}{F + \eta Q} v. \quad (17.15)$$

Из формулы (17.15) следует, что чем больше масса стержня, тем меньше v_1 по сравнению с $v = \sqrt{2gh}$. Таким образом, когда ударяемый стержень имеет значительную массу, то часть энергии падающего тела теряется при ударе. Если Δ_d - наибольшая продольная деформация стержня, то полная величина потенциальной энергии системы будет равна

$$U = \frac{F + \eta Q}{2g} v_1^2 + F \Delta_d \sin \alpha, \quad (17.16)$$

где $\frac{F + \eta Q}{2g} v_1^2$ - кинетическая энергия системы груз - стержень в момент соприкосновения; $F \Delta_d \sin \alpha$ - работа груза на перемещении Δ_d .

Потенциальная энергия деформации стержня

$$U_d = \frac{1}{2} F_d \Delta_d, \quad (17.17)$$

где F_d - наибольшее значение динамической нагрузки.

Пренебрегая потерями на продольные колебания стержня при ударе, местными пластическими деформациями соударяющихся тел и другими причинами рассеяния энергии, согласно закону сохранения энергии выражения (17.16) и (17.17) можно приравнять

$$\frac{F + \eta Q}{2g} v_1^2 + F \Delta_d \sin \alpha = \frac{1}{2} F_d \Delta_d. \quad (17.18)$$

Подставляя вместо скорости v_1 значение из (17.15), после несложных преобразований получим

$$\frac{F v^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \eta \frac{Q}{F}} + F \Delta_d \sin \alpha = \frac{1}{2} F_d \Delta_d. \quad (17.19)$$

Обозначим через δ_{11} перемещение от единичной силы, приложенной в точке удара, а через $\Delta_{ст}$ - перемещение стержня при статическом приложении груза F . Так как перемещения пропорциональны соответствующим силам, то величины $\Delta_{ст}$ и Δ_d можно записать в виде

$$\Delta_{\text{ст}} = \delta_{11} F; \Delta_{\text{д}} = \delta_{11} F_{\text{д}}$$

Откуда получим

$$F = \frac{\Delta_{\text{ст}}}{\delta_{11}}; F_{\text{д}} = \frac{\Delta_{\text{д}}}{\delta_{11}}. \quad (17.20)$$

Подставляя (17.20) в (17.19), после преобразований получим квадратное уравнение для определения $\Delta_{\text{д}}$:

$$\Delta_{\text{д}}^2 - 2\Delta_{\text{ст}}\Delta_{\text{д}}\sin\alpha - \frac{\Delta_{\text{ст}}v^2}{g} \cdot \frac{1}{1+\eta\frac{Q}{F}} = 0. \quad (17.21)$$

Решая квадратное уравнение, найдем динамическое перемещение стержня при ударе:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{д}} &= \Delta_{\text{ст}}\sin\alpha + \sqrt{\Delta_{\text{ст}}^2\sin^2\alpha + \frac{\Delta_{\text{ст}}v^2}{g} \cdot \frac{1}{1+\eta\frac{Q}{F}}} = \\ &= \Delta_{\text{ст}} \left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{v^2}{\Delta_{\text{ст}}g\left(1+\eta\frac{Q}{F}\right)}} \right). \end{aligned} \quad (17.22)$$

Величина в скобках называется **динамическим коэффициентом** $K_{\text{д}}$. В формуле (17.22) перед корнем берется знак «+», так как перемещение не может быть отрицательным.

$$K_{\text{д}} = \sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{v^2}{\Delta_{\text{ст}}g\left(1+\eta\frac{Q}{F}\right)}}. \quad (17.23)$$

Тогда $\Delta_{\text{д}} = \Delta_{\text{ст}}K_{\text{д}}$ и

$$K_{\text{д}} = \frac{\Delta_{\text{д}}}{\Delta_{\text{ст}}}. \quad (17.24)$$

Таким образом, динамический коэффициент показывает, во сколько раз перемещение при ударе больше перемещения, возникающего при статическом приложении нагрузки.

Согласно принятым допущениям отношения действующих в системе сил и напряжений также будут равны динамическому коэффициенту:

$$\frac{F_d}{F_{ст}} = \frac{\sigma_d}{\sigma_{ст}} = K_d.$$

Откуда

$$F_d = F_{ст} K_d \text{ и } \sigma_d = \sigma_{ст} K_d. \quad (17.25)$$

Положив в формуле $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 0$, получим выражения для динамического коэффициента при вертикальном и горизонтальном ударе. При $\alpha = \pi/2$

$$K_d = 1 + \frac{v^2}{\Delta_{ст} g \left(1 + \eta \frac{Q}{F}\right)}. \quad (17.26)$$

Скорость v груза в момент, непосредственно предшествующий соприкосновению со стержнем, связана с высотой h зависимостью

$$v = \sqrt{2gh} \text{ или } v^2 = 2gh.$$

Откуда формулу (17.25) можно представить в виде

$$K_d = 1 + \frac{2h}{\Delta_{ст} \left(1 + \eta \frac{Q}{F}\right)}. \quad (17.27)$$

При $\alpha = 0$

$$K_d = \frac{v^2}{\Delta_{ст} g \left(1 + \eta \frac{Q}{F}\right)}. \quad (17.28)$$

Согласно выражению (17.25) динамические задачи при ударе можно решать как статические, умножая конечный результат на динамический коэффициент K_d .

17.3. Вычисление коэффициента η приведения массы

Для учета массы системы, подверженной действию ударных нагрузок, воспользуемся приближенным методом, предложен-

ным Рэлеем²⁹. Приближенность метода заключается в том, что при его применении принимается допущение относительно эпюры перемещений системы при ударе. Выбор эпюры перемещений фактически означает введение добавочного ограничения, приводящего ударяемую систему к системе с одной степенью свободы. Коэффициент приведения η по способу Рэля определяется из рассмотрения баланса энергии системы. С достаточной для практических расчетов точностью можно принять, что эпюра перемещений от груза при ударе с учетом и без учета массы упругой системы в любой момент времени подобна эпюре перемещений от того же груза, приложенного статически. Согласно этому допущению для любой ударяемой системы будет справедливо отношение (рис.17.5):

$$\frac{\Delta_{xд}}{\Delta_d} = \frac{\Delta_{xст}}{\Delta_{ст}} = \text{const}, \quad (17.29)$$

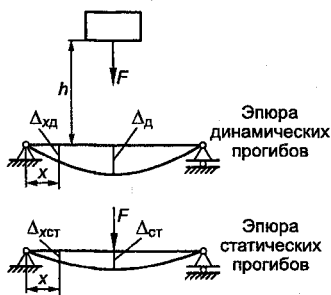


Рис. 17.5

где $\Delta_{xд}$ и Δ_d - соответственно динамические перемещения при ударе в сечении x и под грузом F ; $\Delta_{xст}$ и $\Delta_{ст}$ - соответственно статические перемещения в тех же сечениях при статическом приложении груза F .

Из выражения (17.29) можно заключить, что скорости движения сечений упругой системы, воспринимающей удар, относятся друг к другу так же, как и перемещения этих сечений от статически

действующего груза. Действительно, разделив числитель и знаменатель левой части уравнения (17.30) на время Δt , получим

$$\frac{v_{xд}}{v_d} = \frac{\Delta_{xст}}{\Delta_{ст}}, \quad (17.30)$$

где v_d - скорость системы в месте удара.

Кинетическая энергия элементарного объема системы весом dQ , движущегося со скоростью $V_{xд}$, равна

$$dT = \frac{v_{xд}^2}{2g} dQ. \quad (17.31)$$

Кинетическая энергия всей системы определится выражением

$$T = \int_Q \frac{v_{xд}^2}{2g} dQ. \quad (17.32)$$

Упругую систему с распределенной массой, равной Q/g , заменим системой, обладающей той же кинетической энергией, но нагруженной приведенной массой $\eta Q/g$, сосредоточенной в месте удара. Величину приведенной массы можно найти, приравняв кинетическую энергию системы и кинетическую энергию сосредоточенной массы:

$$\int_Q \frac{v_{xд}^2}{2g} dQ = \eta \frac{Qv_{д}^2}{2g}. \quad (17.33)$$

Откуда коэффициент приведения массы

$$\eta = \frac{\int_Q v_{xд}^2 dQ}{Qv_{д}^2}. \quad (17.34)$$

Или, заменяя отношение скоростей по формуле (17.29), получим

$$\eta = \frac{\int_Q \frac{v_{xд}^2}{v_{д}^2} dQ}{Q} = \frac{\int_Q \left(\frac{\Delta_{хст}}{\Delta_{ст}} \right)^2 dQ}{Q}. \quad (17.35)$$

Вычислим коэффициент приведения массы (η) для стержня, испытывающего продольный удар, вызывающий сжатие (рис. 17.6, а). Будем считать, что перемещения сечений стержня изменяются по линейному закону, принимая в нижнем сечении нулевое значение. Найдем перемещение $\Delta_{ст}$ и $\Delta_{хст}$ сечений, расположенных на расстоянии l и x от опоры, при статическом действии силы F :

$$\Delta_{ст} = \frac{Fl}{EA}; \quad \Delta_{хст} = \frac{Fl}{EA} \frac{x}{l}, \quad (17.36)$$

где E - модуль упругости материала; A - площадь поперечного сечения стержня.

Подставляя полученные значения $\Delta_{ст}$ и $\Delta_{хст}$ в формулу (17.35) и выражая вес стержня через геометрические размеры, получим

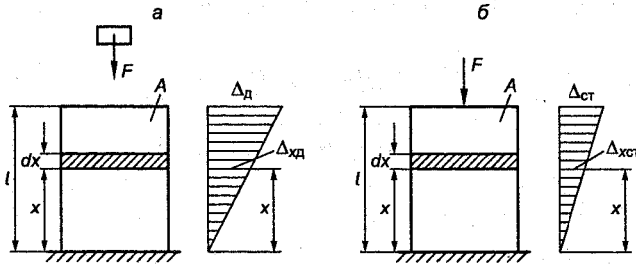


Рис. 17.6

$$\eta = \frac{\int_0^l (x/l)^2 \gamma A dx}{\gamma Al} = \frac{1}{3},$$

где $dQ = \gamma A dx$ - вес элементарного участка стержня длиной dx ; γ - удельный вес.

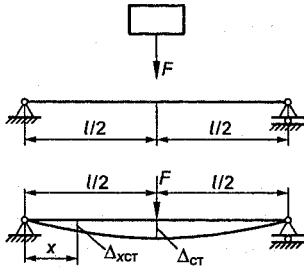


Рис. 17.7

Вычислим коэффициент приведения массы η для балки, свободно опертой по концам и испытывающей по середине пролета удар груза F (рис. 17.7). Используя метод начальных параметров, найдем перемещения $\Delta_{ст}$ и $\Delta_{хст}$ сечений балки, расположенных на расстоянии x от опоры и под грузом:

$$\Delta_{хст} = -\frac{F(3xl^2 - 4x^3)}{48EI_z};$$

$$\Delta_{ст} = \frac{Fl^3}{48EI_z};$$

отношение $\frac{\Delta_{хст}}{\Delta_{ст}} = \frac{3xl^2 - 4x^3}{l^3} = \frac{x}{l^3}(3l^2 - 4x^2).$

Вес элемента балки длиной dx и собственный вес балки равны

$$dQ = q \cdot dx \text{ и } Q = ql,$$

где q - вес единицы длины балки.

Подставим найденные значения в формулу (17.35):

$$\eta = \frac{2 \int_0^{l/2} q \left(\frac{x}{l^3} (3l^2 - 4x^2) \right)^2 \cdot dx}{ql} = \frac{17}{35}.$$

17.4. Анализ формулы динамического коэффициента

Выражения (17.26), (17.27), (17.28) показывают, что учет массы ударяемого тела уменьшает величину динамического коэффициента, а значит, и величину динамического напряжения в теле, так как энергия удара груза становится меньше величины

ны $\frac{Fv^2}{2g} = Fh$ (где h - высота падения груза). Фактически одинаковая начальная энергия груза, равная $F \cdot h$, будет вызывать различные динамические напряжения в зависимости от массы ударяемого тела, при этом чем больше масса ударяемого тела, тем меньше будут напряжения. При решении инженерных задач с целью упрощения, а также учитывая, что неучет массы ударяемого тела идет в запас прочности, массой тела пренебрегают и считают, что вся кинетическая энергия падающего груза, равная

$$T = W = F(h + \Delta_d),$$

где $h + \Delta_d$ - путь, проходимый грузом к моменту завершения деформации ударяемого тела, полностью переходит в потенциальную энергию деформации ударяемого тела.

Таким образом, расчетные формулы приобретают следующий вид для вертикального удара:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{\Delta_{ст} g}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}, \quad (17.37)$$

а для горизонтального удара

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{\Delta_{ст} g}}. \quad (17.38)$$

Из формулы (17.37) следует, что динамический коэффициент определяется величиной статического перемещения $\Delta_{ст}$

Следовательно, для снижения динамических напряжений во всех случаях при ударе, а также возникающих при наезде колес транспортных машин на препятствие необходимо уменьшать жесткость подвесных систем. Если в формуле (17.37) положить $h = 0$, т.е. просто приложить груз F , то $K_d = 2$. Такой вид нагружения носит название **мгновенного** (внезапного) **приложения нагрузки**. Следовательно, при мгновенном приложении нагрузки деформации и напряжения будут в 2 раза больше, чем при статическом приложении той же нагрузки.

При очень большой величине отношений $\frac{2h}{\Delta_{ст}} > 100$ или

$\frac{v^2}{\Delta_{ст}g} > 100$ можно пренебречь единицами в формуле (17.37).

Ошибка определения динамического коэффициента в этом случае не будет превышать 10 %. Тогда для данного коэффициента получим выражение

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{\Delta_{ст}g}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}} \quad (17.39)$$

Умножим числитель и знаменатель подкоренного выражения в формуле (17.39) на $2m$ (где m - масса падающего груза). Тогда выражение для динамического коэффициента примет вид

$$K_d = \sqrt{\frac{T_0}{U_0}}, \quad (17.40)$$

где $T_0 = \frac{mv^2}{2}$ - кинетическая энергия падающего груза к моменту начала удара;

$U_0 = \frac{mg\Delta_{ст}}{2} = \frac{F\Delta_{ст}}{2}$ - потенциальная энергия деформации тела при статическом действии силы F .

Формула (17.40) удобна при решении задач о встречном ударе тел, при определении в цилиндре напряжений, действующих в момент воспламенения горючей смеси, и т.д.

Рассмотрим *продольный удар стержня постоянного поперечного сечения* (рис. 17.8), принимая $\frac{2h}{\Delta_{ст}} \gg 100$.

Для вычисления динамического коэффициента определим $\Delta_{ст}$ - перемещение от статически действующей силы F :

$$\Delta_{ст} = \frac{Fl}{EA}, \quad (17.41)$$

где EA - жесткость поперечного сечения стержня при сжатии.

Подставляя (17.41) в (17.39), найдем динамический коэффициент

$$K_d = \sqrt{\frac{2hEA}{Fl}}. \quad (17.42)$$

Наибольшее напряжение при ударе

$$\tau_d = -\sigma_{ст} K_d = -\frac{E}{A} \sqrt{\frac{2hEA}{Fl}} = -\sqrt{\frac{2hEF}{Al}}. \quad (17.43)$$

Из формулы следует, что динамические напряжения от удара обратно пропорциональны корню квадратному из объема стержня. Отсюда понятно, почему наковальни стремятся делать массивным.

Рассмотрим удар, вызывающий изгиб балки. Величины динамического коэффициента и динамического напряжения при изгибающем ударе зависят от схемы нагружения и условий закрепления балки. Пусть груз F падает с высоты h на середину балки, шарнирно-закрепленной по концам (рис. 17.9). Статический прогиб балки в месте удара равен

$$\Delta_{ст} = \frac{Fl^3}{48EI_z}, \quad (17.44)$$

где EI_z - жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

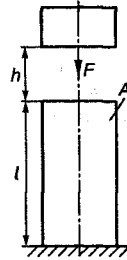


Рис. 17.8

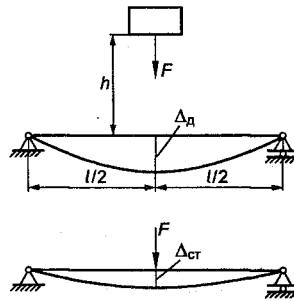


Рис. 17.9

Динамический коэффициент согласно (17.37)

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{96hEI_z}{Fl^3}}. \quad (17.45)$$

Динамическое напряжение при изгибающем ударе будет

$$\sigma_d = \sigma_{ст} K_d = \frac{Fl}{4W_z} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96hEI_z}{Fl^3}} \right). \quad (17.46)$$

Из формулы (17.46) видно, что динамические напряжения при *изгибе* зависят от модуля упругости материала, формы ее поперечного сечения, условий закрепления. Чем меньше жесткость балки, тем большую кинетическую энергию удара она может поглотить при одинаковом напряжении. Балки равного сопротивления при ударных нагрузках и одинаковом напряжении имеют большие прогибы, чем балки постоянного сечения, а значит, способны поглощать большую энергию удара. Поэтому рессоры целесообразно изготавливать в форме балок равного сопротивления.

Теперь рассмотрим определение динамического коэффициента при *скручивающем ударе* (рис. 17.10).

Принимая кривошип достаточно жестким и пренебрегая его деформацией, перемещение $\Delta_{ст}$ точки соударения в направлении удара под действием статически приложенной силы F можно вычислить через угол закручивания по формуле

$$\Delta_{ст} = \varphi R = \frac{FRl}{GI_p} R = \frac{FR^2 l}{GI_p}, \quad (17.47)$$

где $\Delta_{ст}$ - перемещение точки соударения в направлении удара под действием статически приложенной силы F ; GI_p - жесткость поперечного сечения стержня при кручении.

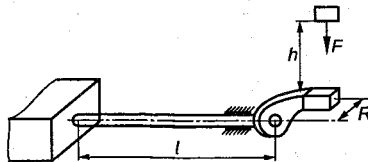


Рис. 17.10

Динамический коэффициент будет определяться выражением

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hGI_p}{FR^2l}}. \quad (17.48)$$

Динамическое напряжение при скручивающем ударе равно

$$\tau_d = \tau_{ст} K_d = \frac{FR}{W_p} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hGI_p}{FR^2l}} \right). \quad (17.49)$$

На практике скручивающий удар обычно имеет место при торможении быстровращающихся валов, несущих маховики. В этом случае вал скручивается двумя парами сил, создаваемых силой инерции маховика и силой торможения.

Потенциальная энергия деформации стержня при статическом приложении пары сил с моментом M_k будет

$$U_0 = \frac{M_k^2 l}{2GI_p}.$$

Кинетическая энергия маховика в момент торможения

$$T_0 = \frac{I_0 \omega^2}{2},$$

где I_0 - момент инерции массы маховика; ω - угловая скорость.

Подставляя значения U_0 и T_0 в формулу (17.40), получим

$$K_d = \sqrt{\frac{T_0}{U_0}} = \omega \sqrt{\frac{I_0 GI_p}{M_k^2 l}}. \quad (17.50)$$

Динамическое напряжение при скручивающем ударе будет

$$\tau_d = \tau_{ст} K_d = \frac{M_k}{W_p} \omega \sqrt{\frac{I_0 GI_p}{M_k^2 l}} = \omega \sqrt{\frac{2GI_p}{Al}}. \quad (17.51)$$

Таким образом, динамические напряжения при скручивающем ударе зависят от угловой скорости вращения вала к началу удара, модуля сдвига материала и объема вала, с увеличением которого динамические напряжения уменьшаются.

17.5. Условие прочности при ударе и некоторые рекомендации к проектированию элементов конструкций

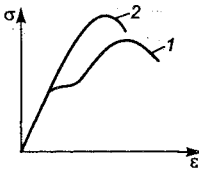


Рис. 17.11

При ударном нагружении развитие и распространение пластических деформаций и напряжений в образце затруднено. Поэтому происходит повышение пределов текучести и прочности материала при резком уменьшении относительного удлинения. На рис. 17.11 представлены диаграммы растяжения при статическом (кривая 1) и динамическом (кривая 2) нагружении.

Поскольку вывод всех формул для расчета на удар построен на основе приближенной теории упругого удара, то расчет на прочность при ударе принято проводить не по динамическим, а по статическим предельным характеристикам материала. Определив по соответствующим формулам величину динамического напряжения, условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_d \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (17.52)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение при статическом растяжении (сжатии); σ_T - предел текучести материала.

Величина коэффициента безопасности n_T принимается несколько большей ($n_T = 2$) по сравнению с нормативным значением ($n_T = 1,4 - 1,6$), выбираемым при статическом действии нагрузок. Кроме того, для деталей, работающих на ударную нагрузку, необходимо применять материал более высокого качества по однородности и пластическим свойствам.

При проектировании элементов конструкций, испытывающих удар, следует отчетливо представлять, что сопротивление их ударной нагрузке качественно отличается от сопротивления статической нагрузке. С целью уменьшения динамических напряжений необходимо стремиться увеличивать статические деформации. Так, детали, испытывающие продольный и скручивающий удары, должны иметь по возможности большую длину и одинаковое поперечное сечение. Местные, на небольшой длине стержня, уменьшения площади поперечного сечения вызывают резкое повышение динамических напряжений. Уменьшить жесткость систем можно постановкой пружин, путем использования материала с меньшим модулем упругости. Весьма

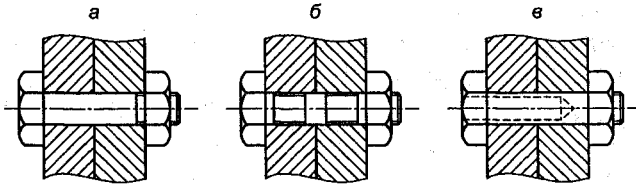


Рис. 17.12

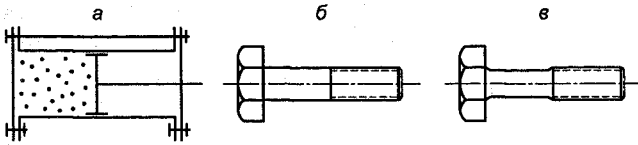


Рис. 17.13

эффективным является выравнивание площадей поперечных сечений элементов; местные выточки крайне нежелательны.

Например, конструкция, показанная на рис. 17.12, а, будет плохо сопротивляться ударной нагрузке, так как участок болта, имеющий меньший диаметр, будет работать как выточка. Значительная энергия удара будет поглощаться именно частью болта, имеющей нарезку, поэтому обрыв болта на этом участке очень вероятен. Улучшить конструкцию можно, заставив болт более или менее равномерно поглощать энергию удара по всей длине; для этого нужно сделать его площадь поперечного сечения равной площади по внутреннему диаметру нарезки путем обтачивания тела болта снаружи (рис. 17.12, б) или высверливанием в нем отверстия (рис. 17.12, в).

На рис. 17.13, а показаны рациональное сверху и нерациональное внизу крепление крышек цилиндра бурового, клепального инструмента болтами. Крепление крышек длинными болтами исключает обрыв болтов при ударной нагрузке.

На рис. 17.13, б представлена нерациональная, а на рис. 17.13, в рациональная форма болта, воспринимающего ударную нагрузку. Уменьшение площади его ненарезной части не увеличивает статического напряжения, но увеличивает абсолютное статическое удлинение, а значит, уменьшает динамический коэффициент.

Пример 17.1. Подъемная машина поднимает равноускоренно с помощью стального троса груз $F = 40$ кН. За первые три секунды груз поднимается на высоту $h = 20$ м. Диаметр троса

$d = 2,5$ см, длина $l = 150$ м, объемный вес материала троса $\gamma = 0,078$ Н/см³. Определить нормальное напряжение в тросе с учетом собственного веса (рис.17.14).

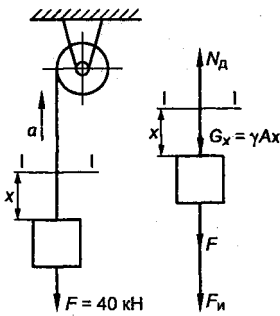


Рис. 17.14

Решение. Определяем ускорение подъема груза:

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 20}{3^2} = 4,4 \text{ м/с}^2.$$

Проводим сечение I - I и вводим в рассмотрение нормальную силу N_d , действующую в канате при подъеме груза. Сила инерции направлена вниз и равна

$$F_{и} = \frac{F + G_x}{g} a = \frac{F + \gamma Ax}{g} a,$$

где G_x - вес троса, расположенного ниже сечения I - I.

Проектируя силы на ось x , определим нормальную силу N_d :

$$\begin{aligned} N_d &= F + G_x + \frac{F + \gamma Ax}{g} a = F + \gamma Ax + \frac{F + \gamma Ax}{g} a = \\ &= (F + \gamma Ax) \left(1 + \frac{a}{g} \right) = (F + \gamma Ax) K_d. \end{aligned}$$

Напряжение в сечении I - I троса

$$\sigma = \frac{F + \gamma Ax}{A} K_d.$$

Максимальное напряжение в сечении троса при $x = l$ будет

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F + \gamma Al}{A} K_d = \frac{(40 \cdot 10^3 + 0,078 \cdot 3,14 \cdot 2,5^2 / 4 \cdot 150 \cdot 10^2) \cdot 4}{3,14 \cdot 2,5^2} \cdot 1,45 = \\ &= 13\,518,2 \text{ Н/см}^2 = 135,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

$$K_d = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{4,4}{9,81} = 1,45.$$

Напряжения без учета собственного веса каната

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} K_d = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 2,5^2} 1,45 = 11\,882 \text{ Н/см}^2 = 118 \text{ МПа.}$$

Таким образом, когда длина троса значительная, необходимо в расчетах учитывать его собственный вес.

Пример 17.2. Чугунный стержень длиной $l = 80$ см, диаметром $d = 12$ мм, несет на конце груз весом $F = 40$ Н, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Объемный вес чугуна $\gamma = 0,072$ Н/см³, допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 4200$ Н/см², модуль упругости чугуна $E = 1,2 \cdot 10^7$ Н/см². Найти предельную частоту вращения стержня в оборотах в минуту (рис. 17.15).

Решение. Центробежная сила инерции от вращения груза

$$F_{\text{гр}}^{\text{ин}} = \frac{F}{g} \omega^2 l,$$

где ω – угловая скорость вращения груза, рад/с.

Определим центробежную силу, возникающую при вращении стержня, для чего выделим на расстоянии x от оси вращения элемент длиной dx . При определении центробежной силы инерции элемент стержня рассматривается как точечная масса, сосредоточенная в центре тяжести сечения. Центробежная сила, действующая на элемент стержня, равна $dF_{\text{ст}}^{\text{ин}} = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 x dx$.

Величина центробежной силы, действующей в сечении x , определится выражением

$$F_{\text{ст}}^{\text{ин}} = \int_x^l \frac{\gamma A}{g} \omega^2 x dx = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 \frac{x^2}{2} \Big|_x^l = \frac{\gamma A}{2g} \omega^2 (l^2 - x^2).$$

Нормальная растягивающая сила в сечении x будет равна сумме сил $F_{\text{гр}}^{\text{ин}}$ и $F_{\text{ст}}^{\text{ин}}$:

$$N_x = \frac{F}{g} \omega^2 l + \frac{\gamma A}{2g} \omega^2 (l^2 - x^2).$$

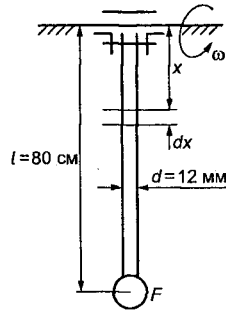


Рис. 17.15

Нормальное напряжение растяжения в сечении x будет

$$\sigma_x = \frac{F}{Ag} \omega^2 l + \frac{\gamma}{2g} \omega^2 (l^2 - x^2).$$

Наибольшее напряжение будет при $x = 0$. Условие прочно запишется в виде

$$\frac{F}{Ag} \omega^2 l + \frac{\gamma}{2g} \omega^2 l^2 \leq [\sigma].$$

Откуда угловая скорость будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2[\sigma]gA}{2F + \gamma Al}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4200 \cdot 981 \cdot 1,13}{2 \cdot 40 + 0,072 \cdot 1,13 \cdot 80}} = 32,8 \text{ рад/с.}$$

Предельная частота вращения стержня в оборотах в минуту

$$n_{\text{пред}} = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 32,8}{3,14} = 313 \text{ об/мин.}$$

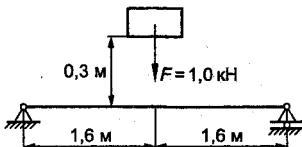


Рис. 17.16

Пример 17.3. На двутавровую балку №18 длиной $l = 3,2$ м, лежащую свободно на двух опорах, с высоты $h = 0,3$ м падает груз $F = 1,0$ кН (рис. 17.16). Определить наибольшее нормальное напряжение и наибольший прогиб балки.

Решение. Определяем наибольшее нормальное напряжение при статическом приложении силы $F = 1,0$ кН:

$$M_{\text{max}} = \frac{Fl}{4} = \frac{1000 \cdot 320}{4} = 80\,000 \text{ Н·см.}$$

Для балки №18 из таблицы сортамента прокатной стали $I_z = 1290 \text{ см}^4$; $W_z = 143 \text{ см}^2$.

$$\sigma_{\text{ст}}^{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_z} = \frac{80\,000}{143} = 559,4 \text{ Н/см}^2 = 5,6 \text{ МПа.}$$

Вычисляем динамический коэффициент по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30}{0,026}} = 49;$$

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Fl^3}{48EI_z} = \frac{1000 \cdot 320^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 1290} = 0,026 \text{ см};$$

$$\sigma_{\text{д}}^{\text{max}} = \sigma_{\text{ст}}^{\text{max}} K_{\text{д}} = 5,6 \cdot 49 = 274 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{\text{д}}^{\text{max}} = \Delta_{\text{ст}}^{\text{max}} K_{\text{д}} = 0,026 \cdot 49 = 1,27 \text{ см}.$$

Пример 17.4. Вычислить напряжения для условий предыдущей задачи, если под один конец балки положить резиновый кубик размером $10 \times 10 \times 10$ см. $E_p = 800 \text{ Н/см}^2$ (рис. 17.17).

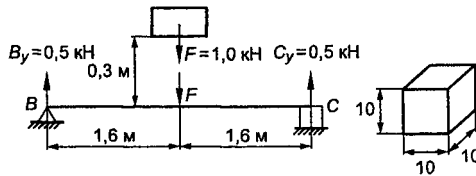


Рис. 17.17

Решение. Вычисляем динамический коэффициент. Прогиб под грузом $\Delta_{\text{ст}}$ будет складываться из прогиба балки под грузом $\Delta_{\text{ст.б}}$ и перемещения груза за счет деформации кубика $\Delta_{\text{ст.р}}$

$$\Delta_{\text{ст}} = \Delta_{\text{ст.б}} + \Delta_{\text{ст.р}}.$$

Прогиб балки под грузом $\Delta_{\text{ст.б}} = 0,026$ см (см. пример 17.2). Резиновый кубик деформируется силой, равной реакции опоры $C_y = 0,5$ кН:

$$\Delta_{\text{ст. опоры}} = \frac{C_y l}{E_p A} = \frac{500 \cdot 10}{800 \cdot 100} = 0,063 \text{ см}.$$

Прогиб балки под грузом за счет деформации кубика:

$$\Delta_{\text{ст. р}} = \frac{\Delta_{\text{ст. опоры}}}{2} = \frac{0,063}{2} = 0,032 \text{ см};$$

$$\Delta_{\text{ст}} = 0,026 + 0,032 = 0,058 \text{ см};$$

$$K_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30}{0,058}} = 33.$$

Максимальное напряжение при ударе

$$\sigma_d^{\max} = \sigma_{\text{ст}}^{\max} K_d = 5,6 \cdot 33 = 185 \text{ МПа.}$$

Таким образом, уменьшение жесткости системы резко снижает динамические напряжения.

Глава 18

ПРОДОЛЬНЫЙ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

18.1. Понятие об устойчивости равновесия упругих тел

Под устойчивостью понимается способность упругих систем сохранять под нагрузкой свою первоначальную форму равновесия. Представим себе некоторую упругую систему, нагруженную внешними силами, которой сообщено малое отклонение от положения равновесия. Если после удаления воздействия система возвращается в исходное состояние, то такая форма равновесия называется **устойчивой**, если система к первоначальному состоянию не возвращается, то форма равновесия называется **неустойчивой**.

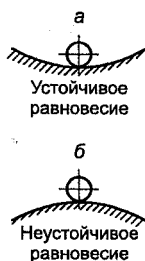


Рис. 18.1

Наиболее наглядно устойчивое и неустойчивое равновесие можно наблюдать на примере шарика, расположенного на вогнутой и выпуклой поверхности. Равновесие шарика, расположенного на вогнутой поверхности (рис. 18.1, а), является устойчивым, так как шарик, будучи выведенным из состояния равновесия, возвращается в исходное состояние. Равновесие шарика, расположенного на выпуклой поверхности (рис. 18.1, б), является неустойчивым, так как шарик, будучи выведенным из состояния равновесия, в исходное состояние не возвращается.

Система, потерявшая устойчивость, обычно переходит в новое устойчивое состояние. В реальных условиях этот переход может сопровождаться большими перемещениями с возникновением пластических деформаций или полным разрушением

конструкции. Явление потери устойчивости для упругих тел можно наблюдать при центральной сжатии длинных тонких стержней, тонкостенных цилиндрических оболочек, прокатных профилей и т.д.

При сжатии длинного стержня, пока нагрузка не превзойдет определенного значения, прямолинейная форма равновесия является устойчивой и стержень претерпевает только сжатие (рис. 18.2, а). В этом случае, если к стержню приложить поперечную силу и создать небольшой прогиб, то после устранения поперечной силы прогиб исчезнет и стержень снова примет прямолинейную форму равновесия. Когда сжимающая нагрузка достигнет значительной величины, прямолинейная форма равновесия станет неустойчивой, стержень изогнется (рис. 18.2, б), в поперечных сечениях наряду с нормальной силой будет действовать изгибающий момент. В этом случае приложение поперечной силы вызывает увеличение прогиба, который не исчезает при устранении поперечной силы. Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня при действии осевой сжимающей силы называется **продольным изгибом**.



Рис. 18.2

Потеря устойчивости проявляется также при изгибе балок, имеющих вид тонкой пластины (рис. 18.3). При малых силах F плоская форма равновесия пластины является единственно устойчивой формой и изгиб пластины происходит в вертикальной плоскости (рис. 18.3, а). При больших силах плоская форма равновесия становится неустойчивой. Пластина переходит в новую форму устойчивого равновесия, при которой она будет работать на изгиб и кручение (рис. 18.3, б).

Максимальная сила, при которой стержень сохраняет прямолинейную форму равновесия, называется **критической силой** $F_{кр}$.

При расчете на устойчивость действующая нагрузка F должна составлять n_y -ю долю критической.

Величина n_y , равная отношению критической силы к действующей нагрузке, называется **коэффициентом безопасности по устойчивости**:

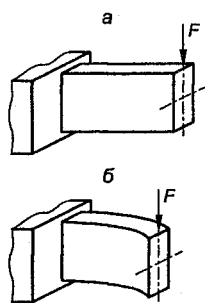


Рис. 18.3

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F}. \quad (18.1)$$

Следует отметить, что потеря устойчивости не означает потери прочности. Так, стержень, потерявший устойчивость, изгибается, но его деформация может оставаться упругой, и после снятия нагрузки стержень возвратится в первоначальное положение.

Значение критической силы вычисляется теоретически для идеальной системы. Например, для сжатого стержня ось принимается строго прямолинейной, материал однородным и линейно упругим, нагрузка прикладывается точно в центре сечения.

18.2. Определение критической силы. Формула Эйлера

Рассмотрим прямой стержень, сжимаемый силами F (рис. 18.4).

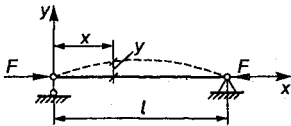


Рис. 18.4

Пусть под действием сил стержень несколько отклонился от первоначального положения. Отклонение не только считается малым, но может быть сделано меньше любой наперед заданной величины. Установим, при каком значении силы F возможно равновесие стержня с изогнутой осью. Обозначим координатные оси x , y . Ось y направим вверх, ось x - вправо. Так как рассматриваются только малые отклонения от прямолинейной формы, то для решения задачи можно воспользоваться приближенным уравнением упругой линии:

$$EI_{\min} y'' = M, \quad (18.2)$$

где I_{\min} - минимальный момент инерции сечения, так как изгиб стержня будет всегда происходить в плоскости минимальной жесткости.

Изгибающий момент в сечении с координатой x

$$M = -Fy. \quad (18.3)$$

Согласно уравнению (18.2) знак изгибающего момента определяется знаком создаваемой моментом кривизны упругой линии стержня.

При принятом направлении оси y кривизна, создаваемая моментом M , отрицательна, а прогиб y в сечении положителен.

Поэтому, чтобы при положительном прогибе получить отрицательное значение кривизны, выражение для M следует брать со знаком «-». Тот же результат получим, если ось y направить вниз. В данном случае кривизна будет положительной, а прогиб отрицательным, и снова, чтобы при отрицательном прогибе получить положительную кривизну, выражение для момента нужно брать со знаком «-». Таким образом, изгибающий момент при продольном изгибе, так как знаки y и y'' противоположны, будет всегда иметь знак «-».

Подставляя (18.3) в (18.2), получим

$$EI_{\min}y'' + Fy = 0. \quad (18.4)$$

Обозначим

$$\frac{F}{EI_{\min}} = \alpha^2. \quad (18.5)$$

Тогда уравнение (18.4) примет вид

$$y'' + \alpha^2 y = 0. \quad (18.6)$$

Интеграл линейного дифференциального уравнения (18.6) определяется выражением

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x. \quad (18.7)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

при $x = 0, y = 0$ из уравнения (18.7) получим $C_2 = 0$;

при $x = l, y = 0$ из уравнения (18.7) следует

$$C_1 \sin \alpha l = 0. \quad (18.8)$$

Случай $C_1 = 0$ нас не интересует, так как соответствует случаю, когда стержень имеет прямолинейную форму, поэтому

$$\sin \alpha l = 0. \quad (18.9)$$

Уравнение (18.9) выполняется тогда, когда

$$\alpha l = \pi n, \quad (18.10)$$

где n - произвольное целое число ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Отсюда

$$\alpha = \frac{\pi n}{l} \quad \text{и} \quad \alpha^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}. \quad (18.11)$$

Учитывая выражение (18.5), получим

$$\frac{F}{EI_{\min}} = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

Откуда

$$F = \frac{\pi^2 n^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (18.12)$$

Наименьшее значение, отличное от нуля, сила F будет иметь при $n = 1$. Обозначая ее через $F_{\text{кр}}$, получим

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (18.13)$$

Формула (18.13) называется **формулой Эйлера**³⁰ для **определения критической силы**.

Пока сжимающая стержень сила меньше критической, прямолинейная форма будет являться устойчивой формой равновесия, т.е. если приложить поперечную силу и создать небольшой прогиб, то после снятия поперечной силы стержень снова вернется в первоначальное положение. Когда сжимающая сила превысит критическую, прямолинейная форма станет неустойчивой и приложение малой поперечной силы вызовет прогиб, который не исчезнет после удаления поперечной силы. Подставляя в (18.7) значение α при $n = 1$, получим уравнение упругой линии стержня в виде

$$y = C_1 \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (18.14)$$

При $x = l/2$

$$y_{x=l/2} = C_1 = f.$$

Таким образом, стержень с шарнирно закрепленными концами изгибается по полуволне синусоиды с максимальным прогибом, в середине равным f .

Выведенные формулы справедливы, если напряжения в стержне не превышают предела пропорциональности, так как дифференциальное уравнение (18.2) применимо только для

малых прогибов. Из уравнения (18.14), видим, что величина наибольшего прогиба $f = C_1$ нам неизвестна, а также не ясна зависимость прогиба от силы F . Получается, что при критической нагрузке стержень может иметь любой малый прогиб и находиться в состоянии безразличного равновесия. В действительности решение точного дифференциального уравнения для изогнутой оси стержня

$$\frac{EI_{\min} y''}{[1+y'^2]^{3/2}} + Fy = 0 \quad (18.15)$$

показывает, что в закритической области существует строгая функциональная зависимость между прогибом и сжимающей силой. Так, для стержня с шарнирно закрепленными концами для наибольшего прогиба получено выражение

$$y_{\max} = \frac{l\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{F}{F_{\text{кр}}} - 1} \cdot \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{F}{F_{\text{кр}}} - 1 \right) \right], \quad (18.16)$$

показывающее, что прогиб возрастает очень интенсивно, когда нагрузка становится выше критического значения. Например, если нагрузка будет на 1 % выше $F_{\text{кр}}$, то прогиб, согласно (18.16), составит 9 % от длины стержня.

На основании уравнения (18.16) на рис. 18.5 показана

зависимость $\frac{F}{F_{\text{кр}}} = f\left(\frac{y_{\max}}{l}\right)$

для идеального упругого стержня в виде кривой *OBD*:

$$\frac{y_{\max}}{l} = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{F}{F_{\text{кр}}} - 1} \cdot \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{F}{F_{\text{кр}}} - 1 \right) \right]. \quad (18.17)$$

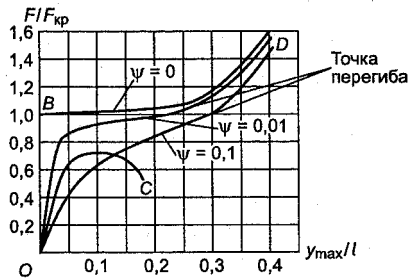


Рис. 18.5

Из рис.18.5 следует, что пока нагрузка меньше $F_{кр}$, прогиб равен нулю. Когда нагрузка становится выше $F_{кр}$, прогиб быстро увеличивается. Идеальный стержень при $F = F_{кр}$ может иметь две формы упругого равновесия - прямолинейную и криволинейную с малым наибольшим прогибом; при $F > F_{кр}$ малым увеличениям нагрузки F соответствуют большие увеличения прогибов y_{max} . Например, для $F = 1,001F_{кр}$ $y_{max} = 0,057l$; для $F = 1,01F_{кр}$ $y_{max} = 0,18l$, т.е. увеличивается в 3,16 раза.

Опыты со сжатием прямых стержней показывают, что зависимость между прогибом и нагрузкой в значительной степени определяется точностью приложения нагрузки, однородностью материала, прямолинейностью оси стержня. Даже в тех случаях, когда принимаются все меры, чтобы нагрузка была приложена центрально, всегда имеются некоторые несовершенства, выражающиеся в наличии начальной кривизны и малого эксцентриситета приложения силы. Следовательно, в опытах нагрузка F будет вызывать не только сжатие, но и изгиб. Опытные кривые, представляющие собой зависимость между нагрузкой и прогибом, показывают, что вследствие неточностей искривление начинается при малых нагрузках, однако прогибы возрастают медленно, пока нагрузка значительно меньше критического значения. Когда нагрузка приближается к критическому значению, прогибы резко увеличиваются. Чем точнее выполнен и нагружен стержень, тем кривые все больше приближаются к вертикальной оси (к теоретической кривой OBD , (рис.18.5).

Чтобы яснее понять физическую картину поведения сжатого стержня, на рис.18.5 приведены кривые, представляющие собой зависимость между нагрузкой и прогибом для различных значений отношения

$$\psi = \frac{y_0 + e}{l},$$

где y_0 - наибольший начальный прогиб стержня; e - эксцентриситет приложения силы; l - длина стержня.

Из приведенных графиков следует, что при $\psi < 0,01$ и $F < 0,8 F_{кр}$ зависимость между силой и прогибом можно считать прямо пропорциональной; точка перегиба на графике соответствует критическому значению силы $F_{кр}$.

При нагрузке F значительно большей критического значения $F_{кр}$ прогибы могут достигать величины, при которой напряжение становится выше предела текучести, и стержень теряет свою практическую пригодность. Если при нагрузке F меньшей $F_{кр}$ возникают прогибы, при которых напряжения в стержне превышают предел пропорциональности, то зависимость нагрузки от прогиба будет иметь вид кривой C (рис. 18.5). В этом случае изгиб стержня называется неупругим и уравнение (18.14) неприменимо.

Таким образом, можно заключить, что поведение системы в закритической области должно описываться уравнениями для больших прогибов, а определять критическую силу можно, используя приближенное линейное уравнение для малых прогибов, не прибегая к сложному аппарату нелинейных уравнений.

18.3. Влияние закрепления концов стержня на величину критической силы

На величину $F_{кр}$ оказывают влияние не только параметры, входящие в формулу Эйлера, но и условия закрепления концов стержня. Используя положения, что при малых перемещениях изгиб стержня, шарнирно закрепленного по концам, происходит по полуволне синусоиды, полученное решение можно довольно просто распространить и на другие способы закрепления стержня.

Например, пусть стержень жестко зашцеилен на одном конце, а на другом свободен (рис. 18.6, *a*). В этом случае упругую линию зашцеиленного одним концом стержня длиной l можно привести к упругой линии шарнирно закрепленного стержня, имеющего длину $2l$.

Совершенно очевидно, что критическая сила стержня, зашцеиленного одним концом, длиной l , будет равна критической силе шарнирно закрепленного стержня длиной $2l$.

Таким образом, в данном случае получим

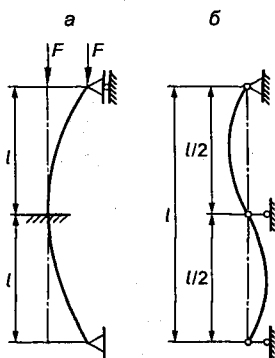


Рис. 18.6

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}. \quad (18.18)$$

Шарнирно закрепленный стержень, имеющий по середине опоры (рис. 18.6, б), при потере устойчивости изогнется по двум полуволнам синусоиды. Следовательно, каждая его половина теряет устойчивость как шарнирно закрепленный по концам стержень, имеющий длину $l/2$. Поэтому можно записать:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(l/2)^2}. \quad (18.19)$$

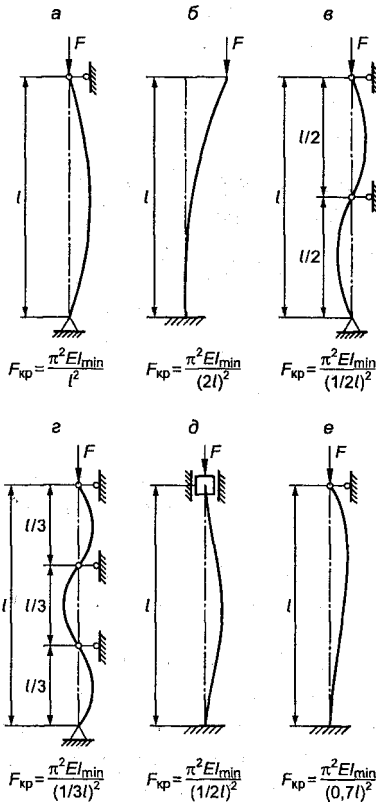


Рис. 18.7

Можно сделать следующий вывод: для определения критической силы стержня постоянной жесткости, нагруженного сжимающими силами в концевых сечениях при заданном закреплении концов, необходимо в формулу Эйлера подставить вместо действительной его длины длину, равную одной полуволне синусоиды устойчивой формы равновесия. Действительно, каждая полуволна устойчивой формы равновесия имеет граничные условия, одинаковые со стержнем, шарнирно закрепленным по концам, так как в сечениях, соответствующих точкам перегиба, моменты равны нулю и, следовательно, они эквивалентны шарнирам. На рис. 18.7 представлены наиболее типичные случаи закрепления концов стержня и приведены значения критической силы.

Объединяя приведенные формулы, можно дать обобщенную формулу Эйлера для критической силы сжатого стержня:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (18.20)$$

где μ - коэффициент приведения длины, показывающий, во сколько раз нужно изменить длину l шарнирно закрепленного по концам стержня, чтобы его критическая сила была равна критической силе стержня с заданными условиями закрепления; μl - приведенная длина стержня.

Коэффициент приведения длины μ зависит также от характера нагрузки и способа нагружения стержня (сосредоточенная сила или распределенная нагрузка, сосредоточенная сила приложена в концевом или промежуточном сечении, одна или несколько и т.д.). В этих случаях μ для стержня определяется методом Эйлера из решения соответствующих дифференциальных уравнений.

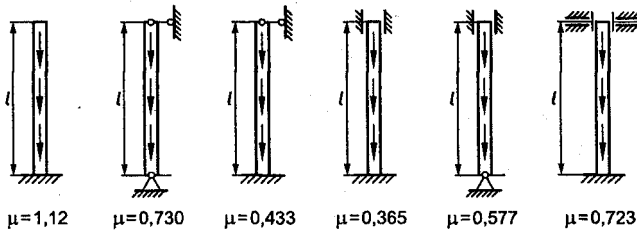


Рис. 18.8

На рис. 18.8 приведены значения μ для стержней постоянно поперечного сечения, нагруженных равномерно распределенной сжимающей нагрузкой $F_{кр} = (ql)_{кр}$.

Из формулы (18.20) следует: чем меньше μ , тем больше $F_{кр}$ и, значит, стержень будет более устойчивым.

18.4. Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского

Обозначим напряжение при критической силе $F_{кр}$ через $\sigma_{кр}$. В соответствии с (18.20) получим

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\text{мин}}}{A(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i_{\text{мин}}}\right)^2}, \quad (18.21)$$

где $i_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{I_{\text{мин}}}{A}}$ - минимальный радиус инерции сечения.

Обозначим знаменатель в выражении (18.21) через

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{мин}}}. \quad (18.22)$$

Безразмерная величина λ называется **гибкостью стержня**.

Подставляя λ в (18.21), получим

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (18.23)$$

Из (18.23) следует: чем гибкость стержня больше, тем меньше критическое напряжение. Так как формула Эйлера справедлива, пока критическое напряжение не превышает предела пропорциональности, то, приняв $\sigma_{\text{кр}} \leq \sigma_{\text{п}}$, можно найти предельную гибкость, ниже которой пользоваться формулой Эйлера нельзя:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{п}}.$$

Откуда

$$\lambda_{\text{пред}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{п}}}}. \quad (18.24)$$

Например, для Ст3, имеющей $E = 2,0 \cdot 10^7$ Н/см², $\sigma_{\text{п}} = 20\,000$ Н/см².

$$\lambda_{\text{пред}} \geq \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^7}{20000}} = 100.$$

Значит, формула Эйлера для Ст3 пригодна только при гибкости стержня больше 100. При гибкости стержней меньше

$\lambda_{\text{пред}}$ формула Эйлера неприменима, так как в этом случае, согласно (18.23), продольный изгиб происходит при напряжениях $\sigma_{\text{кр}} > \sigma_{\text{п}}$ и называется **неупругим**. Опытным путем установлено, что при $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ действительные критические напряжения ниже значений, определенных по формуле Эйлера; также доказано, что для многих материалов между $\sigma_{\text{кр}}$ и λ существует линейная зависимость. В результате обработки обширного опытного материала по продольному изгибу стержней Ф.С. Ясинским³¹ была составлена таблица критических напряжений в зависимости от гибкости для ряда применяемых в практике материалов и предложена двучленная формула для вычисления критических напряжений за пределом пропорциональности, которая носит его имя:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad (18.25)$$

для чугунного литья при $\lambda < \lambda_{\text{пред}} = 80$ пользуются параболической зависимостью

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (18.26)$$

где a, b, c - постоянные коэффициенты, зависящие от свойств материала, имеющие размерность напряжения; λ - гибкость стержня.

Формула (18.26) применяется при $\sigma_{\text{кр}} < \sigma_{\text{в}}$, если $\sigma_{\text{кр}} > \sigma_{\text{в}}$, то стержень необходимо рассчитывать на прочность, а не на устойчивость.

Значение коэффициентов a, b, c приведены в табл. П.8.

Формула (18.25) применяется при гибкости стержня в пределах $\lambda_{\text{т}} \leq \lambda < \lambda_{\text{пред}}$, где $\lambda_{\text{т}}$ - значение гибкости, при котором критическое напряжение равно у пластичных материалов пределу текучести, у хрупких - пределу прочности при сжатии. Значения $\lambda_{\text{пред}}$ и $\lambda_{\text{т}}$ даны в табл. П.8.

Таким образом, при расчете на продольный изгиб возможны три случая.

1. *Стержни большой гибкости* ($\lambda > \lambda_{\text{пред}}$). Расчет ведется по критической силе, вычисленной по формуле Эйлера. Для стержней большой гибкости, согласно формуле (18.23), критическое напряжение стержня зависит только от упругих свойств материала и гибкости стержня и не зависит от его предела прочности. Следовательно, для таких стержней использование высокока-

чественных сталей не дает повышения $\sigma_{кр}$, так как величина модуля продольной упругости E из-за наличия примесей и термической обработки практически остается одинаковым для всех марок. В конструкциях с одинаковым успехом можно применять простые углеродистые стали вместо легированных.

2. *Стержни средней гибкости* ($\lambda_T < \lambda < \lambda_{пред}$), где λ_T - гибкость, соответствующая пределу текучести у пластичных материалов или пределу прочности у хрупких материалов. Расчет ведется по критической силе, вычисленной с использованием формулы Ясинского:

$$F_{кр} = A\sigma_{кр}, \quad (18.27)$$

где A - площадь поперечного сечения стержня.

3. *Стержни малой гибкости* ($\lambda < \lambda_T$). Расчет ведется на прочность, так как в этом случае явление потери устойчивости стержня практически не наблюдается. В качестве предельного напряжения принимается предел текучести для пластичных материалов и предел прочности для хрупких материалов. Для стержней средней и малой гибкости применение стали с более высокими механическими характеристиками целесообразно, так как происходит повышение $\sigma_{кр}$.

В системе координат $\sigma_{кр} - \lambda$ зависимость $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ представлена на рис. 18.9.

Приведенный график показывает, что по мере возрастания гибкости стержня критическое напряжение уменьшается, приближаясь к нулю.

Следует иметь в виду, что применение формулы Эйлера при продольном изгибе стержней за пределом пропорциональности принципиально неверно и опасно своими последствиями, так как в этом случае, согласно графику $\sigma_{кр} - \lambda$

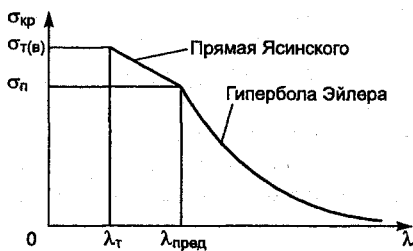


Рис. 18.9

(рис. 18.9), формула Эйлера дает завышенные значения критической силы.

18.5. Расчет на устойчивость сжатых стержней по коэффициенту снижения допускаемых напряжений

Кривая, представленная на рис. 18.9, определяет величину предельных напряжений для стержней. Из рисунка следует, что стержни в зависимости от гибкости выходят из строя в результате или непосредственного разрушения материала, или потери устойчивости. Допускаемое рабочее напряжение на сжатие должно быть меньше предельного, критического. Оно получается путем деления критического напряжения на соответствующий коэффициент безопасности.

Для стержней малой гибкости, рассчитываемых на прочность по предельному напряжению, равному пределу текучести, коэффициент безопасности n_T равен

$$\frac{\sigma_T}{[\sigma]_{сж}} = n_T, \quad (18.28)$$

где $[\sigma]_{сж}$ - допускаемое напряжение на сжатие.

Для стержней средней и большой гибкости предельным напряжением является критическое напряжение. Коэффициент безопасности по устойчивости n_y будет

$$\frac{\sigma_{кр}}{[\sigma]_y} = n_y, \quad (18.29)$$

где $[\sigma]_y$ - допускаемое напряжение на устойчивость.

Равноопасность стержней независимо от гибкости будет выполняться при $n_T = n_y$:

$$\frac{\sigma_T}{[\sigma]_{сж}} = \frac{\sigma_{кр}}{[\sigma]_y}. \quad (18.30)$$

Откуда допускаемое напряжение на устойчивость равно

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} [\sigma]_{сж} = \varphi [\sigma]_{сж}, \quad (18.31)$$

где $\varphi = \sigma_{кр} / \sigma_T$ - называется коэффициентом снижения допускаемого напряжения или коэффициентом продольного изгиба.

Согласно зависимости $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ (рис. 18.9), коэффициент φ изменяется в пределах 0 - 1. Коэффициент φ зависит от гибкости и для наиболее часто встречающихся материалов (сталь, чугун, дерево) приведен в табл. П.9.

Коэффициент безопасности по устойчивости принимается несколько большей величины, чем на прочность, что объясняется необходимостью учета возможности нецентрального приложения нагрузки, наличия начальной кривизны, неоднородности материала, а также других несовершенств стержня. Так как с увеличением длины несовершенства в стержне возрастают, то логично введение переменного коэффициента безопасности, увеличивающегося с ростом гибкости. Коэффициент безопасности по устойчивости, согласно техническим условиям, принимают: для сталей в пределах 1,7 - 3,0; для чугуна в пределах 5,0 - 6,5; для дерева в пределах 2,8 - 3,2. Условие устойчивости сжатых стержней будет следующим:

$$\sigma = \frac{N}{A_{\text{брутто}}} \leq \varphi [\sigma]_{\text{сж}}, \quad (18.32)$$

где $A_{\text{брутто}}$ - площадь поперечного сечения стержня без учета местных ослаблений.

Местные ослабления сечений стержня болтами, заклепками происходят на отдельных малых участках и практически не изменяют величины критической силы, определяемой жесткостью стержня по всей длине, поэтому в расчетах они не учитываются.

Расчет стержней на устойчивость по формуле (18.32) ведется аналогично расчету на простое сжатие коротких стержней по допускаемым напряжениям $\varphi [\sigma]_{\text{сж}}$, уменьшенным по сравнению с $[\sigma]_{\text{сж}}$.

В тех случаях, когда имеется ослабление поперечных сечений, требуется проведение проверки на прочность по условию

$$\sigma = \frac{N}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma]_{\text{сж}}, \quad (18.33)$$

где $A_{\text{нетто}}$ - площадь поперечного сечения с учетом местных ослаблений. Когда поперечные сечения не имеют ослаблений, проверка на прочность не требуется, так как $A_{\text{брутто}} = A_{\text{нетто}}$, а $[\sigma]_y < [\sigma]_{\text{сж}}$.

18.6. Выбор рациональной формы поперечных сечений для сжатых стержней

Из формулы (18.23) следует, что величина критического напряжения в основном зависит от гибкости стержня, определяемой значением наименьшего радиуса инерции сечения. Поэтому наиболее рациональной при продольном изгибе будет такая форма поперечного сечения стержня, при которой величина минимального радиуса инерции сечения при постоянной площади сечения будет наибольшей. Естественно, чтобы стержень оказывал одинаковое сопротивление потере устойчивости в любом направлении, все центральные осевые моменты инерции сечения должны быть равны. Этому условию вполне удовлетворяют квадратные, трубчатые и круглые сечения (рис. 18.10, а, б, в), которые часто и применяются для сжатых колонн и стоек. Толщина стенок трубчатых и коробчатых сечений принимается такой, чтобы не происходило местных деформаций тонкой стенки.

Для предотвращения местных деформаций внутри трубчатых и коробчатых сечений устанавливают диафрагмы (ребра жесткости) на определенных расстояниях по длине стержня.

При работе на продольный изгиб сечений из двух швеллеров их стенки необходимо раздвинуть (рис. 18.10, г), чтобы моменты инерции относительно обеих главных осей примерно были равны. Для обеспечения работы составного сечения как одного целого швеллеры соединяют между собой с помощью решетки из уголков или планок (рис. 18.10, д). Расстояние меж-

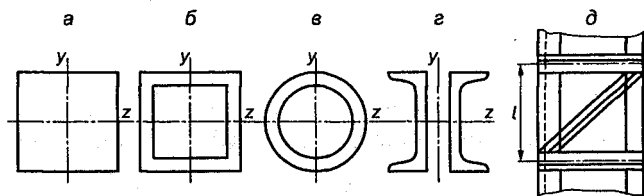


Рис. 18.10

ду соединительными планками l не должно превышать $40i$, где i – радиус инерции одного швеллера относительно центральной оси, параллельной плоскости расположения планок. В пределах элемента менее двух соединительных планок не допускается. Гибкость одной ветви на участке между соединительными планками не должна превышать 40. Если швеллеры скреплены недостаточно жестко, то каждая половина сечения будет работать самостоятельно и устойчивость составного сечения окажется небольшой. Все сказанное выше относится также к составному стержню из четырех уголков.

В качестве критерия оценки рациональности формы сечения при продольном изгибе можно использовать безразмерную

характеристику $\xi = \frac{i_{\min}}{\sqrt{A}}$, называемую **удельным радиусом инерции**.

Значения удельного радиуса инерции ξ , подсчитанные для некоторых сечений, приведены в табл. 18.1.

Таблица 18.1

Значения ξ для некоторых сечений

Форма сечения	Значения ξ
Трубчатое с соотношением $d_{\text{н}}/d_{\text{в}} = (0,95-0,8)$	2,25-01,64
Трубчатое с соотношением $d_{\text{н}}/d_{\text{в}} = (0,7-0,8)$	1,20-1,00
Уголок	0,50-0,30
Двутавр	0,41-0,27
Швеллер	0,41-0,29
Квадрат	0,289
Круг	0,283
Прямоугольник ($h = 2b$)	0,204

Из таблицы следует, что наиболее рациональны трубчатые и коробчатые тонкостенные сечения, наименее рациональны сплошные сечения (круг, квадрат, прямоугольник) и прокатные профили, работающие самостоятельно. В том случае, когда приведенные длины стержня в главных плоскостях различны (это имеет место при разном креплении стержня в главных плоскостях), необходимо конструировать сечение так, чтобы величины гибкостей в главных плоскостях были примерно одинаковыми. Очевидно, что применение в конструкциях для сжатых стержней рациональных форм поперечных сечений позволит получить существенную экономию металла.

Пример 18.1. Определить коэффициент безопасности по устойчивости стержня трубчатого сечения, имеющего наружный диаметр $d_H = 10$ мм, внутренний диаметр $d_B = 7$ мм, длину $l = 45$ см, шарнирно опертого по концам. Нагрузка 1400 Н (рис. 18.11).

Решение. Определим гибкость стержня:

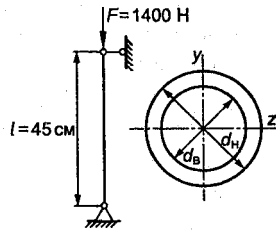


Рис. 18.11

$$I_z = I_y = \frac{\pi}{64} (d_H^4 - d_B^4) = \frac{3,14}{64} (1,0^4 - 0,7^4) = 0,0373 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,037}{0,4}} = 0,31 \text{ см};$$

$$A = \frac{\pi}{4} (d_H^2 - d_B^2) = \frac{3,14}{4} (1,0^2 - 0,7^2) = 0,4 \text{ см}^2.$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 45}{0,31} = 145,2.$$

Определяем критическую силу по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 0,0373}{(1 \cdot 45)^2} = 3632 \text{ Н}.$$

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{3632}{1400} = 2,6.$$

Пример 18.2. Произвести проверочный расчет и определить коэффициент безопасности для стержня из равнобокого уголка № 10 с защемленными концами, длиной $l = 2,5$ м, материал - Ст3, предел пропорциональности $\sigma_{\text{п}} = 20\,000$ Н/см², $[\sigma]_{\text{сж}} = 16\,000$ Н/см², нагрузка $F = 250$ кН (рис. 18.12).

Решение. Определим гибкость стержня, для чего выпишем из сортамента прокатной стали геометрические характеристики уголка $100 \times 100 \times 10$ мм:

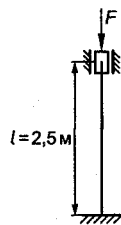


Рис. 18.12

$$I_{\min} = 74,1 \text{ см}^4; I_{\max} = 284 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = 1,96 \text{ см}; i_{\max} = 3,84 \text{ см};$$

$$A = 19,2 \text{ см}^2; \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 250}{1,96} = 63,8.$$

Найдем по таблице коэффициент снижения допускаемого напряжения ϕ :

$$\text{для } \lambda_1 = 60 \quad \phi_1 = 0,86;$$

$$\text{для } \lambda_2 = 70 \quad \phi_2 = 0,81;$$

$$\phi = \phi_1 - \frac{\phi_1 - \phi_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{70 - 60} (63,8 - 60) = 0,84.$$

Вычислим допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \phi [\sigma]_{\text{сж}} = 0,84 \cdot 16\,000 = 13\,440 \text{ Н/см}^2.$$

Определим напряжения, действующие в сечении стержня:

$$\sigma = \frac{250\,000}{19,2} = 13\,021 \text{ Н/см}^2 < 13\,440 \text{ Н/см}^2.$$

Условие прочности удовлетворяется.

Определим критическую силу:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{п}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^7}{20\,000}} = 99,3.$$

Так как $63,8 < 99,3$, то формула Эйлера неприменима. Используем формулу Ясинского. Выбирая из табл. П.8 значения $a = 31\,000$, $b = 114$, получаем

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 31\,000 - 114 \cdot 63,8 = 23\,727 \text{ Н/см}^2;$$

$$F_{\text{кр}} = A\sigma_{\text{кр}} = 23\,727 \cdot 19,2 = 455\,555 \text{ Н}.$$

Находим коэффициент безопасности:

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{455\,555}{20\,000} = 1,82.$$

Недонапряжение

$$\Delta = \frac{13440 - 13021}{13440} 100 = 3,1\% < 5\%,$$

что допустимо

Пример 18.3. Определить размеры поперечного сечения стойки, если $F = 150$ кН; $[\sigma] = 16000$ Н/см², материал - Ст. 3 (рис. 18.13).

Решение. Подбор сечения проводится методом итераций. Выразим все необходимые параметры через неизвестный размер площади b :

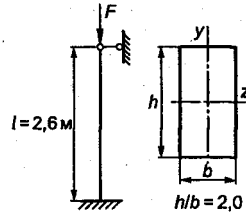


Рис. 18.13

$$A = hb = 2bb = 2b^2; \quad b = \sqrt{\frac{A}{2}};$$

$$I_{\min} = \frac{2bb^3}{12} = \frac{b^4}{6}; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{b^4}{6 \cdot 2b^2}} = \frac{b}{3,46};$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 260 \cdot 3,46}{b} = \frac{629,7}{b}.$$

Примем в качестве первого приближения среднее значение $\varphi_1 = 0,5$. Из условия устойчивости определим площадь сечения:

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{150 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 16000} = 18,75 \text{ см}^2; \quad b_1 = \sqrt{\frac{18,75}{2}} = 3,06 \text{ см}.$$

Найдем гибкость стержня, имеющего сечение A_1 :

$$\lambda_1 = \frac{629,7}{3,06} = 205,8.$$

Определим коэффициент продольного изгиба φ'_1 :

для $\lambda_1 = 200$ $\varphi_1 = 0,19$;

для $\lambda_2 = 210$ $\varphi_2 = 0,17$;

$$\varphi'_1 = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda - \lambda_1) = 0,19 - \frac{0,19 - 0,17}{210 - 200} (205,8 - 200) = 0,177.$$

Так как φ_1 и φ'_1 отличаются значительно, то берем второе приближение и повторяем расчет:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = 0,339; \quad A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{150 \cdot 10^3}{0,339 \cdot 16\,000} = 27,65 \text{ см}^2;$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{27,65}{2}} = 3,72 \text{ см}; \quad \lambda_2 = \frac{629,7}{3,72} = 169,3.$$

Находим значение φ'_2 :

$$\text{для } \lambda_1 = 160 \quad \varphi_1 = 0,29; \quad \varphi'_2 = 0,29 - 0,003 \cdot 9,3 = 0,262;$$

$$\text{для } \lambda_2 = 170 \quad \varphi_2 = 0,26.$$

Так как φ_2 и φ'_2 отличаются значительно, то берем третье приближение и повторяем расчет:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,339 + 0,262}{2} = 0,3;$$

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{150 \cdot 10^3}{0,3 \cdot 16\,000} = 31,25 \text{ см}^2;$$

$$b_3 = \sqrt{\frac{31,25}{2}} = 3,95 \text{ см}; \quad \lambda_3 = \frac{629,7}{3,95} = 159,4; \quad \varphi'_3 = 0,292.$$

Так как φ_3 и φ'_3 отличаются незначительно, менее чем на 0,01, то проверяем выполнение условия устойчивости при $\varphi'_3 = 0,292$.

$$\sigma = \frac{F}{A_3} = \frac{150 \cdot 10^3}{31,25} = 4800 \text{ Н/см}^2.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma]_y = \varphi'_3 [\sigma]_{\text{сж}} = 0,292 \cdot 16\,000 = 4672 \text{ Н/см}^2.$$

Находим отклонения действующих напряжений в сечении от допускаемых:

$$\Delta = \frac{4800 - 4672}{4672} \cdot 100 = 2,74\% < 5\%.$$

Перенапряжение допустимо.

Принимаем окончательно размеры сечения:

$$b = 40 \text{ мм}; h = 2 \cdot 40 = 80 \text{ мм}.$$

Пример 18.4. Определить критическую нагрузку для деревянной стойки постоянного сечения диаметром $D = 20$ см и высотой $l = 6$ м, находящейся под действием сил собственного веса. Нижний конец стойки жестко зашцеилен, верхний - свободен. Модуль упругости дерева $E_{\text{д}} = 1 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$ (рис. 18.14).

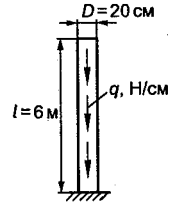


Рис. 18.14

Решение. Критической является нагрузка, создаваемая собственным весом или заданной равномерно распределенной нагрузкой, при которой стойка (стержень) теряет устойчивость. Критическая величина равномерно распределенной по длине стержня сжимающей нагрузки находится по формуле

$$(ql)_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2}.$$

Из рис. 18.8 для стержня, зашцеиленного одним концом и нагруженного распределенной нагрузкой, $\mu = 1,12$. Вычислим гибкость стойки:

$$I_{\text{min}} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} = 7850 \text{ см}^4; A = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ см}^2;$$

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{7850}{314}} = 5; \lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}} = \frac{1,12 \cdot 600}{5} = 134,4 > \lambda_{\text{пред}} = 70.$$

Критическая нагрузка

$$q_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{\mu^2 l^3} = \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 7850}{1,12^2 \cdot 600^3} = 285,6 \text{ Н/см}.$$

Пример 18.5. Поперечное сечение стойки состоит из двух швеллеров № 20, скрепленных между собой по высоте соединительными планками. Длина стойки $l = 4$ м, материал - сталь 5,

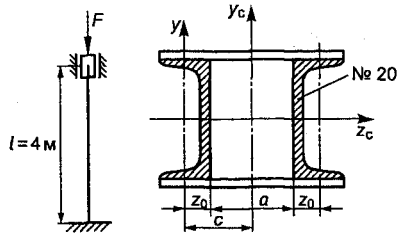


Рис. 18.15

допускаемое напряжение $[\sigma] = 16\,000 \text{ Н/см}^2$. Определить расстояние (a) между швеллерами, чтобы моменты инерции относительно главных осей сечения были равны, а также допустимую нагрузку на стойку (рис. 18.15).

Решение. Выписываем из сортамента прокатной стали геометрические характеристики швеллера № 20:

$$I_z = 1520 \text{ см}^4; I_y = 113 \text{ см}^4; A = 23,4 \text{ см}^2; z_0 = 2,07 \text{ см.}$$

Радиус инерции сечения относительно оси z_c равен

$$i_{\min} = i_z = \sqrt{\frac{2I_z}{2A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1520}{2 \cdot 23,4}} = 8,06 \text{ см.}$$

Расстояние между швеллерами найдем из условия $I_{z_c} = I_{y_c}$:

$$2I_{z_c} = 2(I_y + c^2 A).$$

Подставляя числовые значения, найдем

$$2 \cdot 1520 = 2(113 + c^2 23,4),$$

откуда

$$c = \sqrt{\frac{1520 - 113}{23,4}} = 7,75 \text{ см.}$$

Расстояние между швеллерами

$$a = 2(c - z_0) = 2(7,75 - 2,07) = 11,36 \text{ см.}$$

Примем $a = 11,4 \text{ см}$.

Вычислим гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 400}{8,06} = 24,8.$$

Найдем значения φ :

для $\lambda_1 = 20$ $\varphi_1 = 0,96$;

для $\lambda_2 = 30$ $\varphi_2 = 0,93$;

$$\varphi = 0,96 - \frac{0,96 - 0,93}{10} (24,8 - 20) = 0,946.$$

Допускаемая нагрузка на стойку:

$$[F] = 2 \cdot 23,4 \cdot 0,946 \cdot 16\,000 = 708\,365 \text{ Н} = 708 \text{ кН}.$$

18.7. Энергетический метод (метод Ритца) определения критической силы

Энергетический метод основан на изменении потенциальной энергии при переходе стержня из прямолинейной в криволинейную форму равновесия. При достижении сжимающей силой критического значения прямолинейная форма равновесия станет неустойчивой и стержень несколько изогнется. В поперечных сечениях наряду с нормальной силой будет действовать изгибающий момент (рис. 18.16).

При изгибе потенциальная энергия системы будет складываться из потенциальной энергии прямого сжатого стержня, которая практически является постоянной для малых прогибов, и потенциальной энергии изгиба $U_{\text{изг}}$. Так как изгиб стержня сопровождается понижением точки приложения силы, а значит, уменьшением потенциальной энергии груза U_{Γ} при постоянном значении энергии сжатого стержня, то изменение потенциальной энергии системы будет определяться величинами $U_{\text{изг}}$ и U_{Γ} . Если $U_{\text{изг}} > U_{\Gamma}$, то прогиб стержня сопровождается увеличением потенциальной энергии системы и, значит, прямолинейная форма равновесия является устойчивой.

Если $U_{\Gamma} > U_{\text{изг}}$, то прогиб стержня вызывает уменьшение потенциальной энергии системы, а значит, прямолинейная форма равновесия является неустойчивой. Таким образом, значение критической силы будет определяться условием

$$U_{\text{изг}} = U_{\Gamma}. \quad (18.34)$$

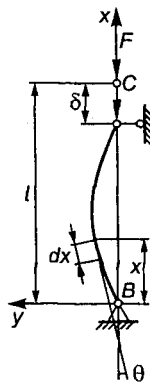


Рис. 18.16

При *изгибе* потенциальная энергия стержня определяется выражением

$$U_{\text{изг}} = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI_z},$$

или, учитывая, что $M = EI_z y''$, получим

$$U_{\text{изг}} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z (y'')^2 dx. \quad (18.35)$$

Понижение точки приложения силы δ при изгибе с точностью до величины второго порядка малости будет равно разности между длиной l и проекцией оси изогнутого стержня на ось x . Точка C соответствует сжатию стержня, когда прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой, т.е. при критическом значении продольной силы:

$$d\delta = dx - dx \cos \theta = dx(1 - \cos \theta) = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} dx. \quad (a)$$

Считая величины деформаций малыми, примем

$$\sin \frac{\theta}{2} = \text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (y'). \quad (б)$$

Подставляя (б) в (а), получим

$$d\delta = 2 \frac{1}{4} (y')^2 dx = \frac{1}{2} (y')^2 dx.$$

Откуда

$$\delta = \frac{1}{2} \int_l (y')^2 dx. \quad (18.36)$$

Уменьшение потенциальной энергии U_{Γ} равно работе критической силы $F_{\text{кр}}$ на перемещении δ :

$$U_{\Gamma} = W = F_{\text{кр}} \cdot \delta, \quad (18.37)$$

где δ - перемещение точки приложения силы $F_{\text{кр}}$.

Так как форма равновесия изменяется при постоянном значении силы F , то множитель $1/2$ в формуле (18.37) отсутствует.

Подставляя (18.35) и (18.37) в (18.34), получим

$$F_{кр} = \frac{\int EI_z (y'')^2 dx}{\int (y')^2 dx} \quad (18.38)$$

В выражении (18.38) $y = f(x)$ представляет собой функцию прогибов, которая должна подбираться с учетом граничных условий. Так как изгибающий момент пропорционален кривизне оси бруса, то y'' будет равняться нулю, где равен нулю изгибающий момент, т.е. на свободных и шарнирно закрепленных концах стержня.

Пример 18.5. Определить критическую силу для ступенчатого стального стержня, состоящего из двух участков длиной $a = 2$ м и $b = 3$ м. Отношение жесткостей поперечных сечений равно

$$\frac{EI_{z_1}}{EI_{z_2}} = 2. \text{ Диаметр } d_1 = 20 \text{ см (рис. 18.17).}$$

Решение. Принимаем функцию прогиба в виде синусоиды

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Граничные условия: при $x = 0$ $y = 0$; при $x = l$ $y = 0$; при $x = a$ $y_1 = y_2$ и $y'_1 = y'_2$.

Найдем производные функции прогибов:

$$y' = \frac{\pi}{l} f \cos \frac{\pi x}{l}; \quad y'' = -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Анализ показывает, что как выбранная функция y , так и ее производные удовлетворяют граничным условиям. Потенциальная энергия изгиба стержня равна

$$U_{изг} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z (y'')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a EI_{z_1} (y'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^l EI_{z_2} (y'')^2 dx =$$

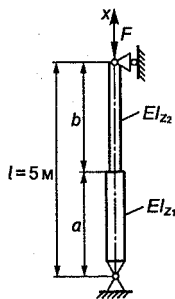


Рис. 18.17

$$\begin{aligned}
 &= \frac{EI_{z_1}}{2} \cdot \frac{\pi^4 f^2}{l^4} \int_0^{\frac{l}{2}} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \frac{EI_{z_2}}{2} \cdot \frac{\pi^4 f^2}{l^4} \int_{\frac{l}{2}}^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \\
 &= \frac{\pi^4 f^2}{4l^4} EI_{z_2} \left(a+l - \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi a}{l} \right).
 \end{aligned}$$

Опускание точки приложения силы F при изгибе образуется за счет поворота всех элементов dx стержня:

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} f^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{f^2 \pi^2}{4l};$$

$$U_{\Gamma} = F_{\text{кр}} \cdot \frac{f^2 \pi^2}{4l}.$$

Значение критической силы

$$\begin{aligned}
 F_{\text{кр}} &= \frac{\frac{\pi^4 f^2}{4l^4} EI_{z_2} \left(a+l - \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi a}{l} \right)}{\frac{f^2 \pi^2}{4l}} = \frac{\pi^2 EI_{z_2}}{l^3} \left(a+l - \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi a}{l} \right) = \\
 &= \frac{1,306\pi^2 EI_{z_2}}{l^2} = \frac{\pi^2 EI_{z_2}}{0,138l^2} = \frac{0,5 \cdot 1,306\pi^2 EI_{z_1}}{l^2}.
 \end{aligned}$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$F_{\text{кр}} = \frac{0,65 \cdot 3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 7850}{500^2} = 402\,689 \text{ Н} = 4025 \text{ кН};$$

$$I_{z_1} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} = 7850 \text{ см}^4.$$

Пример 18.6. Определить критическую силу для стержня диаметром $d = 30$ см длиной $l = 4$ м, нагруженного распреде-

ленной нагрузкой $q=60 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ и сжимающей нагрузкой F , приложенной в верхнем сечении (рис. 18.18).

Решение. Задаемся функцией прогиба в виде кривой, представляющей упругую линию стержня:

$$y = f - f \cos \frac{\pi x}{2l} = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right);$$

$$y' = f \frac{\pi}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l}; \quad y'' = f \frac{\pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

Граничные условия: $y(0) = 0$;
 $y'(0) = 0$; $y''(l) = 0$.

Анализ показывает, что функции y, y', y'' удовлетворяют граничным условиям. Потенциальная энергия изгиба стержня при принятой функции прогиба равна

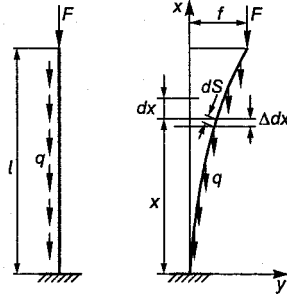


Рис. 18.18

$$U_{\text{изг}} = \frac{EI_z}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{EI_z}{2} f^2 \frac{\pi^4}{16l^4} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{\pi^4 f^2 EI_z}{64l^3}.$$

Работа, совершаемая распределенной нагрузкой q и приложенной силой F при изгибе стержня, будет равна их сумме:

$$\delta_x = \frac{1}{2} \int_0^x (y')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{f^2 \pi^2}{4l^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{f^2 \pi^2}{16l^2} \left(x - \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} \right);$$

$$U_{\Gamma} = \int_0^l q \delta_x dx + F_{\text{кр}} \int_0^l \frac{\pi^2 f^2}{8l^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx = q \frac{f^2 \pi^2}{16l^2} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{2l^2}{\pi^2} \right) +$$

$$+ F_{\text{кр}} \frac{f^2 \pi^2}{16l^2} \cdot l = q \frac{f^2 \pi^2}{16} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right) + F_{\text{кр}} \frac{f^2 \pi^2}{16l}.$$

Найдем величину критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_z - 4ql^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right)}{4l^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 5150 - 4 \cdot 20 \cdot 64 \cdot 10^6 \cdot 0,297}{4 \cdot 16 \cdot 10^4} =$$

$$= 1\,584\,403 \text{ Н} = 1584 \text{ кН};$$

$$A = \frac{3,14 \cdot 18^2}{4} = 254,34 \text{ см}^2; \quad I_z = \frac{3,14 \cdot 18^4}{64} = 5150 \text{ см}^4.$$

18.8. Продольно-поперечный изгиб

Продольно-поперечным изгибом называется такой вид изгиба, при котором в поперечных сечениях стержня одновременно действуют изгибающий момент, вызванный поперечными нагрузками, и нормальная сжимающая сила, вызванная продольной нагрузкой.

Рассмотрим шарнирно опертую балку, загруженную продольной силой F и поперечными силами (рис. 18.19).

Так как прогибы считаются малыми, то изгибающий момент от поперечных сил M_{Π} будет зависеть только от координаты x . Изгибающий момент в произвольном сечении с координатой x равен сумме момента от поперечных сил и изгибающего момента от продольной силы:

$$M_x = M_{\Pi} - F \cdot y. \quad (18.39)$$

Знак изгибающего момента от продольной силы принимается таким же, как и при продольном изгибе.

Необходимо отметить, что при продольно-поперечном изгибе принцип независимости действия сил неприменим. Поэтому в случае продольно-поперечного изгиба проводить расчет балки на центральное сжатие с поперечным изгибом нельзя, а необходимо в расчете учитывать влияние продольной силы на изгибающие моменты и прогибы балки. Дифференциальное уравнение упругой линии балки при продольно-поперечном изгибе имеет вид

$$EIy'' = M_{\Pi} - Fy. \quad (18.40)$$

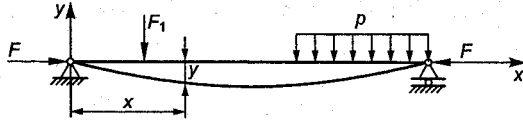


Рис. 18.19

При отсутствии продольной силы F дифференциальное уравнение упругой линии балки будет

$$EIy'' = M_{\Pi}, \quad (18.41)$$

где y_{Π} - прогиб балки только от действия поперечной нагрузки. Подставляя (18.41) в (18.40), получаем

$$EIy'' = EIy''_{\Pi} - Fy. \quad (18.42)$$

Расчет стержней при продольно-поперечном изгибе проводят приближенно в предположении, что упругая линия стержня близка к синусоиде. Это допущение дает достаточно точные результаты для шарнирно опертых балок при действии поперечных нагрузок, направленных в одну сторону. Примем, что упругая линия балки как при наличии продольных сил, так и при их отсутствии описывается уравнениями вида

$$y = f \sin \frac{\pi}{l} x; \quad y_{\Pi} = f_{\Pi} \sin \frac{\pi}{l} x, \quad (18.43)$$

где f и f_{Π} - прогибы балки по середине пролета, соответственно при наличии и отсутствии продольных сил.

После дифференцирования y и y_{Π} по x и подстановки в уравнение (18.42)

$$y'' = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x; \quad y''_{\Pi} = -f_{\Pi} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x;$$

$$EI f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x = EI f_{\Pi} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x + F f \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (18.44)$$

Подставляя в уравнение (18.44) $x = l/2$, получим

$$EI f \frac{\pi^2}{l^2} = EI f_{\Pi} \frac{\pi^2}{l^2} + F f. \quad (18.45)$$

Выражение $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$ совпадает с формулой Эйлера для критической силы сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами. Поэтому его обозначают F_3 и в отличие от критической силы называют **эйлеровой силой**.

Тогда из (18.45) получим

$$f = \frac{F_3 f_{\Pi}}{F_3 - F} = \frac{f_{\Pi}}{1 - \frac{F}{F_3}}. \quad (18.46)$$

Из формулы (18.46) следует, что полный прогиб f при совместном действии продольной силы и поперечных сил зависит от F/F_3 - отношения сжимающей силы F к эйлеровой силе F_3 .

Момент инерции сечения I при вычислении эйлеровой силы берется относительно оси, перпендикулярной к плоскости действия поперечной нагрузки. Эйлерова сила F_3 вычисляется по формуле Эйлера с учетом закрепления концов балки для любой гибкости, в том числе и меньше предельной. Выражение (18.46) дает удовлетворительные результаты, когда продольная сила F не превышает 80 % от критической силы $F_{кр}$.

Предполагая, что изгибающие моменты пропорциональны прогибам, получим формулу для приближенного определения величины максимального изгибающего момента при продольно-поперечном изгибе:

$$M_{\max} = \frac{M_{\Pi}}{1 - \frac{F}{F_3}}, \quad (18.47)$$

где M_{Π} - изгибающий момент от поперечной нагрузки по середине пролета балки.

Наибольшее напряжение будет равно сумме напряжений от сжимающей силы F и максимального изгибающего момента M_{\max} :

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\Pi}}{W \left(1 - \frac{F}{F_3}\right)}, \quad (18.48)$$

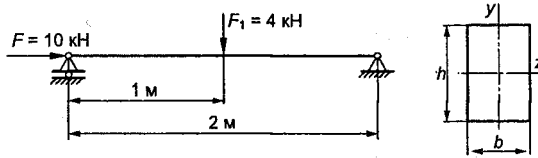


Рис. 18.20

где A - площадь поперечного сечения балки; W - осевой момент сопротивления относительно оси, перпендикулярной к плоскости действия поперечной нагрузки.

Сравним значения M_{\max} и σ_{\max} , получаемые по формулам (18.47) и (18.48), с их значениями, вычисленными по более точным формулам, полученным на основе формул (18.42) и (18.46).

Определим M_{\max} и σ_{\max} для балки длиной $l = 2$ м прямоугольного поперечного сечения, $b = 3$ см, $h = 6$ см, нагруженной по середине пролета поперечной силой $F_1 = 4$ кН (рис.18.20) и продольной сжимающей силой $F = 10$ кН. Материал - сталь, $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см².

Прогиб по середине балки от силы F_1

$$f_{\Pi} = \frac{F_1^3}{48EI_z} = \frac{4000 \cdot 200^3 \cdot 12}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 6^3} = 0,617 \text{ см.}$$

Эйлерова сила

$$F_3 = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 6^3}{200^2 \cdot 12} = 266\,220 \text{ Н.}$$

Изгибающий момент от поперечных сил в среднем сечении балки

$$M_{\Pi} = \frac{F_1 l}{4} = \frac{4000 \cdot 200}{4} = 200\,000 \text{ Н·см.}$$

Максимальный изгибающий момент по формуле (18.47)

$$M_{\max} = \frac{M_{\Pi}}{1 - \frac{F}{F_3}} = \frac{200\,000}{1 - \frac{10\,000}{266\,220}} = 207\,900 \text{ Н·см.}$$

Максимальное напряжение по формуле (18.48)

$$\sigma_{\max} = \frac{10\,000}{3 \cdot 6} + \frac{200\,000 \cdot 6}{3 \cdot 6^2 \cdot 0,96} = 12\,130 \text{ Н/см}^2.$$

Изгибающий момент с учетом изгиба от сжимающей силы

$$M_{\max}^* = M_{\Pi} + Ff = \frac{F_1 l}{4} + \frac{Ff_{\Pi}}{1 - \frac{F}{F_3}} =$$

$$\frac{4000 \cdot 200}{4} + \frac{10\,000 \cdot 0,617}{1 - \frac{10\,000}{266\,220}} = 206\,427 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\max}^*}{W_z} = \frac{10\,000}{3 \cdot 6} + \frac{206\,427 \cdot 6}{3 \cdot 6^2} = 12\,024 \text{ Н/см}^2$$

Сравнивая полученные значения M_{\max} и σ_{\max} , видим, что они практически совпадают.

При продольно-поперечном изгибе принцип независимости действия сил не выполняется. Прогобы и изгибающие моменты изменяются нелинейно от продольных сил. *Характерная особенность этой нелинейной зависимости заключается в том, что при небольшом увеличении продольной нагрузки прогибы и изгибающие моменты возрастают значительно.* Следовательно, когда напряжения будут равны допускаемым, нагрузка будет меньше допускаемой величины и при незначительном ее увеличении напряжения могут достигнуть предела текучести, что практически недопустимо. Поэтому *расчет на прочность при продольно-поперечном изгибе целесообразно проводить не по допускаемым напряжениям, а по допускаемым нагрузкам.* Представим, что поперечная и осевая нагрузки увеличиваются пропорционально одному и тому же параметру n , пока напряжение в опасной точке поперечного сечения не достигнет опасной величины $\sigma_{\text{оп}}$, равной пределу текучести у пластичного материала или пределу прочности у хрупкого; при этом считается, что в процессе возрастания внешних сил соотношение поперечной и продольной нагрузок остается неизменным. Тогда на основе формулы (18,48) можно записать

$$\sigma_{\max} = \frac{Fn}{A} \left[1 + \frac{M_{\text{п}} n A}{FnW \left(1 - \frac{Fn/A}{F_3/A} \right)} \right] = \sigma_{\text{оп}}, \quad (18.49)$$

или

$$\sigma_{\text{оп}} = \sigma_{\text{оп}}^{\text{р}} \left[1 + \frac{M_{\text{п}} A}{FW \left(1 - \frac{\sigma_{\text{оп}}^{\text{р}}}{\sigma_3} \right)} \right], \quad (18.50)$$

где $\sigma_{\text{оп}}^{\text{р}} = \frac{Fn}{A}$ - напряжение, возникающее при предельном значении сжимающей силы;

$\sigma_3 = \frac{F_3}{A}$ - напряжение, соответствующее эйлеровой силе.

Очевидно, на практике нельзя допускать возникновения в балке опасного напряжения $\sigma_{\text{оп}}$, а необходимо ввести соответствующий коэффициент безопасности на продольно-поперечный изгиб $n_{\text{пп}}$, сходный со значением, при котором напряжение равно допускаемому, устанавливаемому по отношению к пределу текучести или пределу прочности в зависимости от свойств материала. Напряжения $\sigma_{\text{оп}}^{\text{р}}$ и $\sigma_{\text{оп}}$ взаимно связаны, поэтому можно составить отношение

$$\frac{\sigma_{\text{оп}}^{\text{р}}}{\sigma_{\text{оп}}} = \frac{\frac{\sigma_{\text{оп}}^{\text{р}}}{n_{\text{пп}}}}{\frac{\sigma_{\text{оп}}}{n_{\text{пп}}}} = \frac{[\sigma^{\text{р}}]}{[\sigma]} = \varphi_{\text{пп}}, \quad (18.51)$$

где $[\sigma^{\text{р}}]$ - допускаемое напряжение по продольной силе; $[\sigma]$ - допускаемое напряжение на прочность при простом сжатии;

$\varphi_{\text{пп}}$ - коэффициент снижения допускаемых напряжений при продольно-поперечном сгибе.

Подставляя значение $\sigma_3 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ в (18.50), с учетом (18.51) получаем расчетную формулу в виде

$$\sigma_{\text{оп}} = \sigma_{\text{оп}} \varphi_{\text{пп}} \left[1 + \frac{m}{1 - \frac{\varphi_{\text{пп}} \sigma_{\text{оп}} \lambda^2}{\pi^2 E}} \right], \quad (18.52)$$

где $m = \frac{M_{\text{п}} A}{FW}$.

Принимая $\sigma_{\text{оп}}$ равным допускаемому напряжению при простом сжатии из уравнения (18.52), можно вычислить значение коэффициента снижения допускаемых напряжений при продольно-поперечном изгибе $\varphi_{\text{пп}}$ для различных материалов в зависимости от гибкости стержня λ и коэффициента m . В табл. П.22, П.23 приведены значения этих коэффициентов для некоторых сталей и дерева. Условие прочности при продольно-поперечном изгибе можно представить в виде

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma^p] = \varphi_{\text{пп}} [\sigma]. \quad (18.53)$$

При расчетах на продольно-поперечный изгиб необходимо проводить проверку балки на устойчивость в плоскости наименьшей жесткости.

Пример 18.7. Трубчатый брус длиной $l = 5$ м, свободно опертый по концам, загружен по середине сосредоточенной силой $F_1 = 4$ кН. Наружный диаметр трубы $d_{\text{н}} = 15,2$ см, внутренний

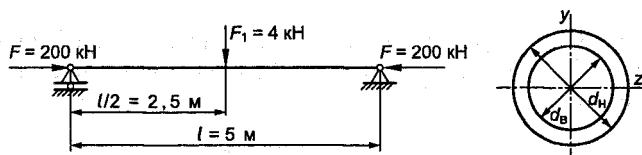


Рис. 18.21

$d_B = 13,8$ см. Труба сжимается силой $F = 200$ кН. Проверить прочность и устойчивость бруса, если $[\sigma] = 16\,000$ Н/см² (рис. 18.21).

Решение. Определим прогиб по середине балки от силы F_1 :

$$f_{\Pi} = \frac{F_1 l^3}{48 E I_z} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 500^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 840} = 0,62 \text{ см};$$

$$I_z = \frac{\pi}{64} (d_H^4 - d_B^4) = \frac{3,14}{64} (15,2^4 - 13,8^4) = 840 \text{ см}^4.$$

Определим эйлерову силу:

$$F_3 = \frac{\pi^2 E I_z}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 840}{1 \cdot 500^2} = 662\,565 \text{ Н}.$$

Изгибающий момент от поперечной силы в среднем сечении

$$M_{\Pi} = \frac{F_1 l}{4} = \frac{400 \cdot 500}{4} = 500\,000 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Максимальный изгибающий момент по формуле (18.47)

$$M_{\max} = \frac{M_{\Pi}}{1 - \frac{F}{F_3}} = \frac{500\,000}{1 - \frac{200\,000}{662\,565}} = 714\,285 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Максимальное напряжение по формуле (18.48)

$$\sigma_{\max} = \frac{200\,000}{31,9} + \frac{714\,285}{110,5} = 12\,734 \text{ Н/см}^2 < [\sigma] = 16\,000 \text{ Н/см}^2;$$

$$A = \frac{\pi}{4} (d_H^2 - d_B^2) = \frac{3,14}{4} (231 - 190,4) = 31,9 \text{ см}^2;$$

$$W_z = \frac{2 I_z}{d_H} = \frac{2 \cdot 840}{15,2} = 110,5 \text{ см}^3.$$

Проводим проверку устойчивости, для чего определяем гибкость и находим соответствующий коэффициент продольного изгиба φ :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 500}{5,13} = 97,5;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{840}{31,9}} = 5,13 \text{ см}; \varphi = 0,68.$$

Допускаемое усилие на сжатие

$$[F_y] = A\varphi[\sigma] = 31,9 \cdot 0,68 \cdot 16\,000 = 347\,072 \text{ Н},$$

что превышает действующую нагрузку на 73,5 %.

Пример 18.8. Для трубчатого бруса (рис.18.21) определить величину допускаемой сжимающей силы F . Все остальные данные взять из примера 18.7.

Решение. Из предыдущей задачи известно, что

$$M_{\Pi} = 500\,000 \text{ Н·см}; A = 31,9 \text{ см}^2; W_z = 110,5 \text{ см}^3; \lambda = 97,5.$$

Определяем величину допускаемой нагрузки по выражению (18.53):

$$[F] = A\varphi_{\text{пп}}[\sigma].$$

Подсчитываем коэффициент

$$m = \frac{M_{\Pi} A}{[F_y] W_z} = \frac{M_{\Pi}}{W_z \varphi_{\text{пп}} [\sigma]} = \frac{500\,000}{110,5 \cdot 16\,000 \varphi_{\text{пп}}} = \frac{0,283}{\varphi_{\text{пп}}},$$

откуда $m\varphi_{\text{пп}} = 0,283$.

В табл. П.22 находим для гибкости $\lambda = 97,5$ и $m = 0,6$ и $0,8$ значения λ и $\varphi_{\text{пп}}$.

$$m = 0,6; \lambda = 90; \varphi_{\text{пп}} = 0,434; m\varphi_{\text{пп}} = 0,260;$$

$$\lambda = 100; \varphi_{\text{пп}} = 0,402; m\varphi_{\text{пп}} = 0,241;$$

$$m = 0,8; \lambda = 90; \varphi_{\text{пп}} = 0,393; m\varphi_{\text{пп}} = 0,314;$$

$$\lambda = 100; \varphi_{\text{пп}} = 0,366; m\varphi_{\text{пп}} = 0,292.$$

Используем формулу для линейного интерполирования табличных функций с двумя входными параметрами*:

$$I_2 = I_{11} + \frac{I_{21} - I_{11}}{x_2 - x_1} (l - x_1) + \left[(I_{12} - I_{11}) + \frac{(I_{22} - I_{12}) - (I_{21} - I_{11})}{x_2 - x_1} (l - x_1) \right] \cdot \frac{K - y_1}{y_2 - y_1},$$

* Уланский, В.П. Интерполирование табличных функций многих переменных / В.П. Уланский, Г.С. Хованский. М., 1963.

где x_1, x_2, y_1, y_2 - заданные значения аргументов x и y ; $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$ - заданные значения табличной функции I ; $l_2 = f(l, \kappa)$ - искомое интерполяционное значение функции I (табл. 18.2).

Таблица 18.2

$y \backslash x$	x_1	l	x_2
y_1	I_{11}		I_{21}
K		l_2	
y_2	I_{12}		I_{22}
$x_1 \leq l \leq x_2$		$y_1 \leq K \leq y_2$	

В нашем случае

$m \backslash \lambda$	90	97,5	100
0,6	0,434		0,402
0,7		$\varphi_{\text{пп}}$	
0,8	0,393		0,366

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{пп}} &= 0,434 + \frac{0,402 - 0,434}{100 - 90} (97,5 - 90) + \\ &+ \left[(0,393 - 0,434) + \frac{(0,366 - 0,393) - (0,402 - 0,434)}{100 - 90} (97,5 - 90) \right] \times \\ &\quad \times \frac{0,7 - 0,6}{0,8 - 0,6} = 0,392. \end{aligned}$$

Учитывая, что $m\varphi_{\text{пп}} = 0,283$, найдем $m = 0,72$.

Допускаемая нагрузка

$$[F] = A \cdot \varphi_{\text{пп}} [\sigma] = 31,9 \cdot 0,392 \cdot 16\,000 = 200\,077 \text{ Н.}$$

Проверяем брус на устойчивость.

Допускаемая нагрузка на сжатие

$$[F]_y = A \cdot \varphi [\sigma] = 31,9 \cdot 0,68 \cdot 16\,000 = 347\,072 \text{ Н} > [F].$$

Практически в предыдущей задаче сжимающая сила F соответствует допустимому значению.

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

19.1. Особенности расчетной схемы тонкостенной оболочки вращения

Тонкостенные оболочки находят широкое применение в различных областях техники. К ним относятся цистерны, различные резервуары, газовые баллоны, купола зданий и т.д. Оболочки различаются формой срединной поверхности, представляющей собой геометрическое место точек, равноудаленных от внутренней и наружной поверхности. Если срединная поверхность представляет собой сферу, цилиндр, конус и так далее, то оболочку называют соответственно **сферической, цилиндрической, конической** и т.д. Используемые на практике тонкостенные оболочки, как правило, имеют постоянную толщину. Наибольшее распространение получили оболочки, срединная поверхность которых является телом вращения (сфера, цилиндр, конус и т.д.). Оболочка вращения, на которую действует нагрузка, симметричная относительно оси вращения, называется **осесимметричной**. При расчете тонкостенных осесимметричных оболочек принимают, что нормальные напряжения, возникающие в стенке, распределяются по толщине равномерно, т.е. изгиб оболочки отсутствует. Теория, исключая изгиб стенок оболочки, называется **безмоментной теорией оболочек**. Следует отметить, что преимущества оболочек наиболее полно реализуются только в случае, когда их стенки работают на растяжение (или сжатие) без изгиба. *Согласно допущению безмоментной теории в сечениях оболочки изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы считаются равными нулю.*

19.2. Определение напряжений в осесимметричной оболочке по безмоментной теории

Рассмотрим оболочку, поверхность которой образована вращением некоторой кривой относительно оси $x - x$ (рис. 19.1), нагруженную внутренним давлением p .

Кривизна в любой точке оболочки характеризуется двумя радиусами: ρ_m - радиусом кривизны меридионального сечения и ρ_t - радиусом кривизны нормального сечения, перпендикулярного к меридиану, равным отрезку нормали, заключенному между рассматриваемой точкой и осью вращения. Радиусы ρ_m и ρ_t называются **главными радиусами кривизны поверхности вращения**. Форма поверхности определяется гауссовой кривизной:

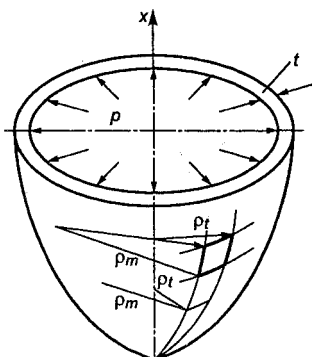


Рис. 19.1

$$K = 1 / (\rho_m \cdot \rho_t). \quad (19.1)$$

Если $K > 0$, то поверхность имеет *выпуклые* меридианы (рис. 19.2, а), если $K = 0$, то поверхность имеет *прямые* меридианы (рис. 19.2, б) и при $K < 0$ поверхность имеет *вогнутые* меридианы (рис. 19.2, в).

Если поверхности имеют одинаковую гауссову кривизну, то их можно развернуть друг по другу без разрывов. В технике наибольшее распространение получили оболочки *положительной* и *нулевой* гауссовой кривизны.

Выделим (см. рис. 19.1) двумя меридиональными сечениями и двумя коническими сечениями, нормальными к дуге меридиана, бесконечно малый элемент из стенки оболочки и рассмотрим его равновесие (рис. 19.3).

Элемент находится в равновесии под действием сил, обусловленных меридиональным напряжением σ_m , направлен-

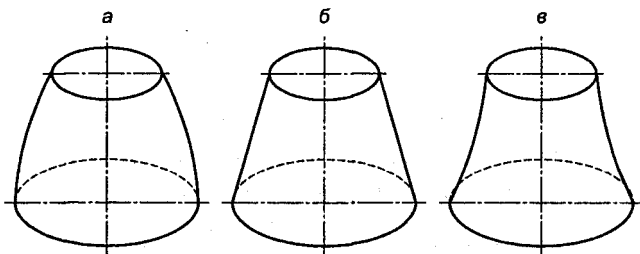


Рис. 19.2

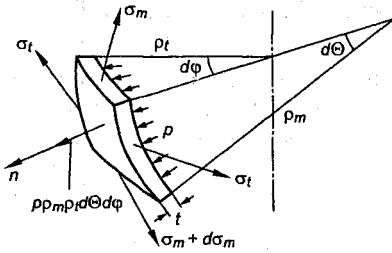


Рис. 19.3

ным по касательной к меридиану; окружным напряжением σ_t , направленным по касательной к параллели, и давлением p , действующим на поверхность элемента. Меридиональные напряжения σ_m на гранях элемента получают приращения $d\sigma_m$,

окружные напряжения в силу осевой симметрии одинаковы. Составим уравнение равновесия элемента в виде суммы проекций всех сил на нормаль к поверхности n :

$$\begin{aligned} p\rho_m d\Theta\rho_t d\varphi - \sigma_m t\rho_t d\varphi \sin \frac{d\Theta}{2} - (\sigma_m + d\sigma_m) t\rho_t d\varphi \sin \frac{d\Theta}{2} - \\ - 2\sigma_t t\rho_m d\Theta \sin \frac{d\varphi}{2} = 0. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Слагаемое $d\sigma_m t\rho_t d\varphi \sin \frac{d\Theta}{2}$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с остальными членами и им можно пренебречь.

Так как $d\Theta$ и $d\varphi$ малы, то

$$\sin \frac{d\Theta}{2} \approx \frac{d\Theta}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}. \quad (19.3)$$

Произведя элементарные преобразования (19.2) с учетом (19.3), получим

$$\sigma_m / \rho_m + \sigma_t / \rho_t = p / t. \quad (19.4)$$

Уравнение (19.4) носит название **уравнения Лапласа**³². Так как оно содержит два неизвестных σ_m и σ_t , то для их определения необходимо составить дополнительное уравнение равновесия части оболочки, отсеченной коническим нормальным сечением (рис. 19.4).

Выделенная часть оболочки находится в равновесии под действием сил, обусловленных внутренним давлением p и мери-

диональным напряжением σ_m , возникающим в стенке оболочки. Осевую равнодействующую внешних сил обозначим через F_x . Тогда уравнение равновесия в виде проекции всех сил на ось x будет

$$2\pi r \sigma_m \sin \Theta = F_x. \quad (19.5)$$

Откуда определим меридиональное напряжение:

$$\sigma_m = \frac{F_x}{2\pi r t \sin \Theta}. \quad (19.6)$$

Таким образом, у тонкостенных оболочек по безмоментной теории меридиональное σ_m и окружное σ_t напряжения определяются из уравнений равновесия, т.е. задача расчета оболочек является статически определенной. Это объясняется тем, что мы сразу приняли распределение напряжений по толщине стенки *постоянным*. Вследствие малой толщины оболочки радиусы

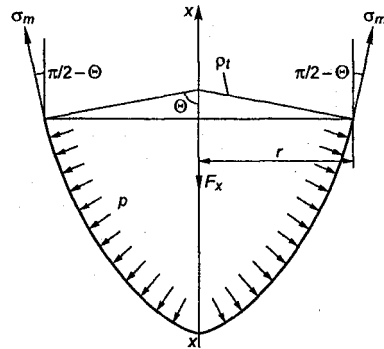


Рис. 19.4

ρ_m , ρ_t и l принимают относительно ее внутренней поверхности.

Для пользования формулой (19.6) необходимо уметь находить равнодействующую F_x внешних поверхностных сил, направленную вдоль оси оболочки. Выделим бесконечно малый элемент оболочки dA , на который действует равномерно распределенное давление p (рис. 19.5).

Проекция поверхностной нагрузки на ось x

$$p_x = p \cos \Theta \cdot dA. \quad (19.7)$$

Проекция элемента dA на плоскость B , перпендикулярную к оси x , будет

$$dA' = dA \cos \Theta. \quad (19.8)$$

Подставляя в (19.7) значение dA из (19.8), получаем

$$p_x = p dA'. \quad (19.9)$$

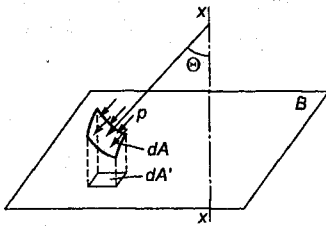


Рис. 19.5

Проекция на ось x равнодействующей сил давления, действующего на конечную поверхность оболочки, согласно (19.9), будет определяться интегралом, взятым по площади проекции поверхности оболочки на плоскость, перпендикулярную оси x :

$$F_x = \int_A p dA' = p \int_A dA' = pA', \quad (19.10)$$

где A' – площадь проекции поверхности оболочки на плоскость, перпендикулярную к оси x .

Таким образом, независимо от формы поверхности оболочки, на которую действует равномерно распределенное давление, проекция равнодействующей сил давления на ось x равняется произведению давления на площадь проекции поверхности оболочки на плоскость, перпендикулярную к оси x .

Найдем выражения F_x для некоторых частных случаев нагружения. Для оболочки, нагруженной равномерным давлением p (рис. 19.6, а), величина силы F_x будет равна произведению давления p на площадь круга радиусом r , расположенного нормально к оси x :

$$F_x = p\pi r^2. \quad (19.11)$$

Для оболочки, заполненной жидкостью (рис. 19.6, б) и находящейся под давлением p , сила F_x будет складываться из веса

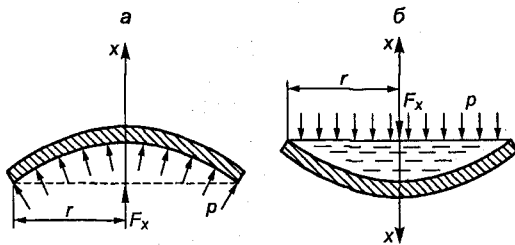


Рис. 19.6

жидкости в отсеченной части и силы давления, действующего на жидкость:

$$F_x = \gamma V_{\text{от}} + p\pi r^2, \quad (19.12)$$

где γ - удельный вес жидкости; $V_{\text{от}}$ - объем отсеченной части оболочки.

19.3. Частные случаи расчета оболочек по безмоментной теории

1. *Цилиндрическая оболочка, подверженная равномерному внутреннему давлению p (рис. 19.7, а).*

В этом случае $p_m = \infty$; $p_t = R$; $\sigma_m = \sigma_x$. Тогда из формулы Лапласа (19.4) получим

$$\sigma_t / R + \sigma_x / \infty = p / t,$$

откуда

$$\sigma_t = pR / t, \quad (19.13)$$

где t - толщина стенки.

Чтобы определить σ_x , проведем перпендикулярно к оси x сечение I - I и рассмотрим равновесие любой части (рис. 19.7, б). Отсеченная часть находится в равновесии под действием сил, обусловленных давлением p на днище оболочки и напряжениями σ_x , равномерно распределенными по толщине t стенки цилиндра. Проектируя силы на ось x , получим

$$\sigma_x \cdot 2\pi R t = \pi R^2 p.$$

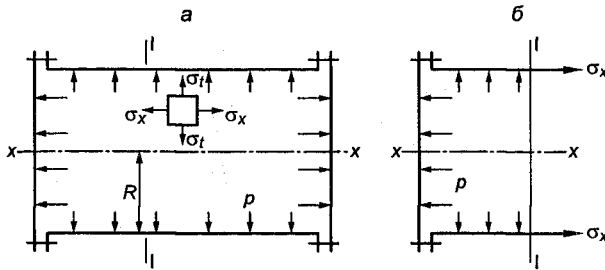


Рис. 19.7

Откуда

$$\sigma_x = \frac{pR}{2t} \quad (19.14)$$

Сравнивая напряжения σ_t и σ_x , видим, что окружное напряжение в 2 раза больше осевого, чем и объясняется наблюдаемое на практике разрушение цилиндрических оболочек путем образования трещин вдоль образующей.

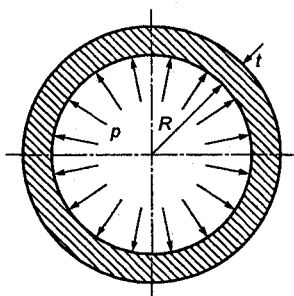


Рис. 19.8

2. Сферическая оболочка под действием равномерно распределенного внутреннего давления (рис. 19.8).

В этом случае $\rho_m = \rho_t = R$.

Из уравнения Лапласа получим

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2t} \quad (19.15)$$

Из уравнения (19.15) следует, что сферическая оболочка прочнее цилиндрической, т.е. сферическая форма является наиболее целесообразной для резервуаров, работающих под действием внутреннего давления.

Однако из технологических соображений резервуары делают цилиндрической формы с днищами сферической или эллиптической формы. Установленное практикой оптимальное отношение высоты днища H к радиусу $D/2$ цилиндрической части составляет примерно 0,5, при этом радиус сферы

$R_{сф} = \frac{5}{8}D$ (где D - диаметр цилиндрической части) и угол наклона нормали на краю днища с осью резервуара $\Theta_{max} \approx 53^\circ$

(рис. 19.9, а).

В зоне соединения сферического днища с цилиндрической частью возникает большая радиальная T_r , составляющая от меридиональной силы T_m сф, передаваемой от днища на цилиндрическую часть, которая вызывает изгиб стенки резервуара (рис. 19.9, б). Поэтому, чтобы уменьшить изгиб, на краю цилиндра устанавливают распорное кольцо, которое должно воспринимать радиальную составляющую T_r силы T_m сф и уstra-

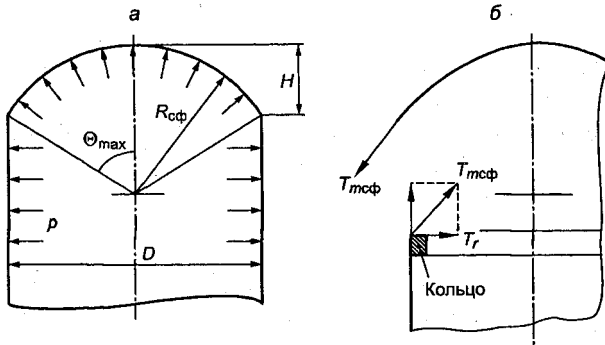


Рис. 19.9

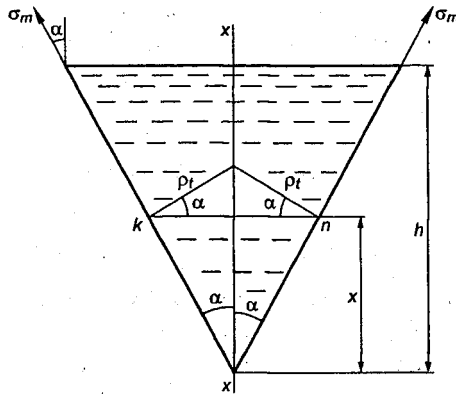


Рис. 19.10

нять напряжения от изгиба. Преимуществом эллиптического днища является то, что в этом случае радиальная составляющая силы $T_{m \text{ эл}}$ в месте сопряжения цилиндра и эллиптического днища отсутствует.

3. *Коническая оболочка, заполненная жидкостью, с удельным весом γ* (рис. 19.10).

В этом случае гауссова кривизна $K = 0$. Окружное напряжение σ_t можно вычислить по формуле Лапласа (19.4). Внутреннее давление p в точках k и n , расположенных от поверхности жидкости на расстоянии $h-x$, будет

$$p = \gamma(h-x). \quad (19.16)$$

Радиус кривизны ρ_t нормального сечения в точках k и n

$$\rho_t = \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}. \quad (19.17)$$

Уравнение Лапласа (19.4) будет:

$$\frac{\sigma_t}{x \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha} = \frac{\gamma(h-x)}{t}. \quad (19.18)$$

Откуда

$$\sigma_t = \frac{\gamma(h-x)x \operatorname{tg} \alpha}{t \cos \alpha}. \quad (19.19)$$

Приравняв производную от σ_t по x к нулю, найдем высоту x , на которой σ_t имеет наибольшее значение

$$\frac{d\sigma_t}{dx} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{t \cos \alpha} (h-2x) = 0,$$

получим $x = h/2$, и

$$\sigma_t^{\max} = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{4t \cos \alpha}. \quad (19.20)$$

Меридиональное напряжение σ_m на уровне x определим, составив уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на ось x :

$$2\pi x t \operatorname{tg} \alpha \cdot t \sigma_m \cos \alpha = \pi x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot [(h-x) + x/3] \cdot \gamma. \quad (19.21)$$

Из (19.21) найдем

$$\sigma_m = \frac{x \operatorname{tg} \alpha \cdot (h-2x/3) \gamma}{2t \cos \alpha}. \quad (19.22)$$

Приравняв производную от σ_m по x к нулю, найдем высоту x , на которой σ_m будет иметь максимальное значение:

$$\frac{d\sigma_m}{dx} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{2t \cos \alpha} \left(h - \frac{4}{3}x \right) = 0.$$

Откуда

$$x = \frac{3}{4}h. \quad (19.23)$$

Подставляя (19.23) в (19.22), получим

$$\sigma_m^{\max} = \frac{3h^2 \gamma \operatorname{tg} \alpha}{16t \cos \alpha}. \quad (19.24)$$

Уравнения (19.20) и (19.24) показывают, что максимальное меридиональное и максимальное окружное напряжения действуют на разных высотах конической оболочки.

Напряжения σ_m и σ_t являются главными напряжениями. Третье главное напряжение направлено нормально к поверхности оболочки. На внутренней поверхности оно равно давлению p , на наружной - нулю.

В тонкостенных оболочках p по абсолютной величине всегда меньше σ_m и σ_t , поэтому обычно его величиной пренебрегают и считают, что материал оболочки находится в плоском напряженном состоянии, для которого будем иметь

$\sigma_1 = \sigma_t$; $\sigma_2 = \sigma_m$; $\sigma_3 = 0$. В зависимости от состояния материала при расчете оболочки на прочность используют третью или четвертую теорию прочности. Условие прочности по четвертой теории прочности записывается в виде

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2} - \sigma_m \sigma_t \leq [\sigma], \quad (19.25)$$

по третьей теории

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_t \leq [\sigma]. \quad (19.26)$$

При выборе требуемой толщины стенок оболочки необходимо к расчетной толщине добавлять 1 - 2 мм на коррозию металла.

19.4. Определение радиальной распределенной нагрузки, действующей на распорное кольцо в оболочках

Рассмотрим оболочку, меридиональные сечения у которой не являются плавными кривыми, а имеют излом в сечении $B - B$. Касательные, проведенные к меридиональной кривой вы-

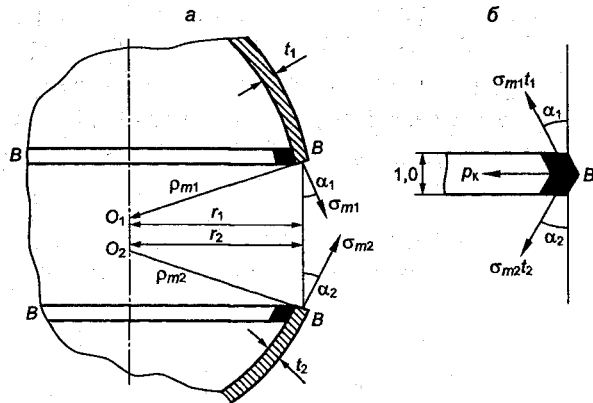


Рис. 19.11

ше и ниже от излома (сечения $B - B$), пересекаются под некоторым углом $180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$ (где α_1 - угол между касательной к меридиональной кривой выше излома и осью оболочки; α_2 - угол между касательной к меридиональной кривой ниже излома и осью оболочки (рис. 19.11, а).

Меридиональное напряжение в сечении, образованном конической поверхностью O_1BB , обозначим через σ_{m1} , а в сечении, образованном конической поверхностью O_2BB , - через σ_{m2} ; толщину стенок обозначим соответственно через t_1 и t_2 . Тогда интенсивности равномерно распределенных меридиональных сил в сечениях будут

$$\sigma_{m1}t_1 \text{ и } \sigma_{m2}t_2. \quad (19.27)$$

Запишем уравнение равновесия кольца высотой, равной единице, выделенного около сечения $B - B$, в виде суммы проекций сил на ось оболочки (рис. 19.11, б):

$$\sigma_{m1}t_1 \cos\alpha_1 \cdot 2\pi r = \sigma_{m2}t_2 \cos\alpha_2 \cdot 2\pi r,$$

где $r_1 = r_2 = r$.

Откуда

$$\sigma_{m1}t_1 \cos\alpha_1 = \sigma_{m2}t_2 \cos\alpha_2. \quad (19.28)$$

Из уравнения (19.26) следует, что проекции сил на ось оболочки уравновешиваются. Сумма проекций сил на плоскость,

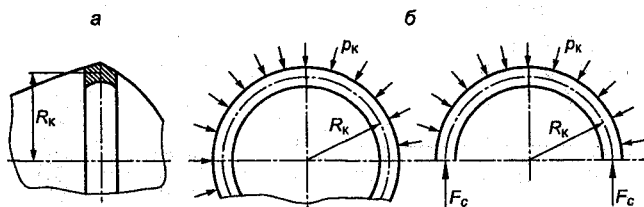


Рис. 19.12

перпендикулярную к оси оболочки, дает радиальную распределенную нагрузку p_k сжимающую оболочку в сечении $B - B$.

$$p_k = \sigma_{m1} t_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{m2} t_2 \sin \alpha_2. \quad (19.29)$$

Радиальная нагрузка p_k вызывает в оболочке напряжения изгиба.

Для предотвращения изгиба в резервуарах устанавливают распорные кольца, которые предназначены для восприятия радиальной сжимающей нагрузки (рис. 19.12, а).

Чтобы определить сжимающее усилие в кольце F_c , разрежем кольцо по горизонтальному диаметральному сечению (рис. 19.12, б) и рассмотрим равновесие его верхней части, для чего составим сумму проекций всех сил на вертикальную ось:

$$2F_c - p_k \cdot 2R_k = 0,$$

откуда

$$F_c = p_k R_k, \quad (19.30)$$

где R_k - радиус осевой линии кольца, который для тонкого кольца можно считать радиусом внутренней или наружной поверхности.

Сжимающее напряжение в кольце

$$\sigma = -p_k R_k / A_k, \quad (19.31)$$

где A_k - площадь поперечного сечения кольца.

Часто на практике вместо распорного кольца создают утолщение оболочки, загибая края днища внутрь центральной части (рис. 19.13).

Пример 19.1. Определить для цилиндрического резервуара со сферическими днищами поперечное сечение распорного

кольца, если внутреннее давление газа в резервуаре равно p , радиус сферического днища R , радиус цилиндрической части r , толщина стенки днища t_1 , стенки цилиндрической части t_2 (рис. 19.14).

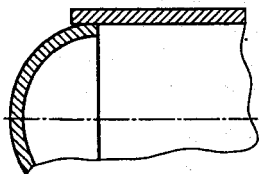


Рис. 19.13

Решение. Определяем меридиональное напряжение σ_{m1} в днище и осевое напряжение σ_x в цилиндрической части:

$$\sigma_{m1} = \frac{pR}{2t_1}; \quad (19.32)$$

$$\sigma_x = \frac{pR}{2t_2}. \quad (19.33)$$

Находим по (19.29) радиальную распределенную нагрузку p_k , приложенную к распорному кольцу. Так как напряжение σ_x параллельно оси резервуара, то $\alpha_2 = 0$.

$$p_k = \sigma_{m1} t_1 \sin \alpha_1 = \frac{pR}{2} \sin(90^\circ - \Theta) = \frac{pR}{2} \cos \Theta. \quad (19.34)$$

Принимая радиус кольца $R_k = r$ и используя формулу (19.31), согласно гипотезе наибольших касательных напряжений, находим необходимую площадь поперечного сечения кольца:

$$A_k = \frac{p_k R_k}{[\sigma]} = \frac{pr \cos \Theta}{2[\sigma]}, \quad (19.35)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение на растяжение.

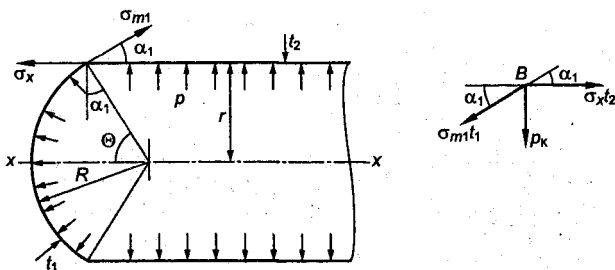


Рис. 19.14

Пример 19.2. Бак наполнен водой до высоты $h = 5$ м, удельный вес воды $\gamma = 10\,000$ Н/м³, радиус цилиндрической части $r = 2,4$ м, радиус сферического днища $R = 3,0$ м, угол $\alpha = 53^\circ$, толщина стенок $t = 0,8$ м. Определить наибольшие меридиональные и окружные напряжения в цилиндрической и сферической частях бака, а также сжимающее усилие в распорном кольце и его площадь поперечного сечения (рис. 19.15, а), если допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 16\,000$ Н/см².

Решение. Определяем вес жидкости в сосуде:

$$F_x = \left[\pi r^2 h_1 + \pi (R-l)^2 \left(R - \frac{1}{3}(R-l) \right) \right] \gamma, \quad (19.36)$$

где

$$l = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{3^2 - 2,4^2} = 1,8 \text{ м}; \quad H = R - l = 3 - 1,8 = 1,2 \text{ м};$$

$$h_1 = h - H = 5 - 1,2 = 3,8 \text{ м};$$

$$F_x = \left[3,14 \cdot 2,4^2 \cdot 3,8 + 3,14 \cdot 1,2^2 \left(3,0 - \frac{1,2}{3} \right) \right] \cdot 10\,000 = 805\,000 \text{ Н}.$$

Напряжение в цилиндрической части:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{2\pi r t} = \frac{805\,000}{2 \cdot 3,14 \cdot 240 \cdot 0,8} = 668 \text{ Н/см}^2 = 6,7 \text{ МПа} = \text{const};$$

$$\sigma_{t_{\max}} = h_1 \gamma r / t = 380 \cdot 0,01 \cdot 240 / 0,8 = 1140 \text{ Н/см}^2 = 11,4 \text{ МПа}.$$

Максимальное напряжение в сферической части будет на дне бака, где действует наибольшее гидростатическое давление. Согласно уравнению Лапласа (19.4) получим

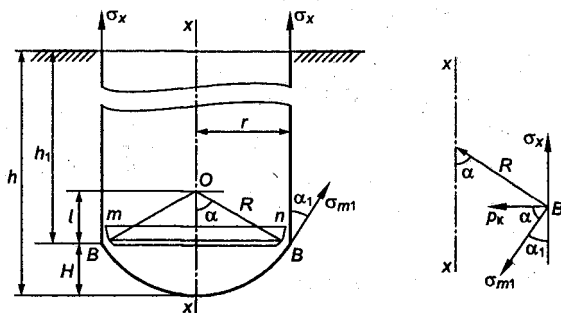


Рис. 19.15

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{\gamma h R}{2t} = \frac{0,01 \cdot 500 \cdot 300}{2 \cdot 0,8} = 938 \text{ Н/см}^2 = 9,4 \text{ МПа.}$$

Меридиональное напряжение σ_{ml} в сечении сферической части с конической поверхностью *ОВВ* определяется из условия, что меридиональные усилия уравниваются весом жидкости F_x :

$$F_x = \sigma_{ml} \cdot 2\pi r t \cos \alpha_1,$$

откуда

$$\sigma_{ml} = \frac{F_x}{2\pi r t \cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{805\,000}{2 \cdot 3,14 \cdot 240 \cdot 0,8 \cdot \sin 53} = 836 \text{ Н/см}^2 = 8,4 \text{ МПа.}$$

Приложенная к распорному кольцу радиальная нагрузка

$$p_k = \sigma_{ml} t \sin \alpha_1 = 836 \cdot 0,8 \cdot \sin(90^\circ - 53^\circ) = 403 \text{ Н/см.}$$

Принимая радиус кольца $R_k = r = 2,4$ м, по (19.35) находим необходимую площадь поперечного сечения кольца:

$$A_k = p_k r / [\sigma] = 403 \cdot 240 / 16\,000 = 6 \text{ см}^2.$$

Если взять толщину кольца 10 мм, то ширина (высота) кольца

$$b = 6,0 / 1,0 = 6 \text{ см.}$$

Пример 19.3. Определить максимальное допускаемое давление p в цилиндрическом баллоне диаметром $D = 25$ см, если толщина стенки $t = 0,5$ см, а допускаемое напряжение $[\sigma] = 16\,000 \text{ Н/см}^2$.

Решение. Определим окружное и осевое напряжения в стенке цилиндра:

$$\sigma_t = \frac{pD}{2t} = \frac{p \cdot 25}{2 \cdot 0,5} = 25p \text{ Н/см}^2; \quad \sigma_x = \frac{pD}{4t} = \frac{p \cdot 25}{4 \cdot 0,5} = 12,5p \text{ Н/см}^2.$$

Из условия прочности по третьей теории $\sigma_t = \sigma_1 = 25p = 16\,000$ найдем

$$p = 16\,000 / 25 = 640 \text{ Н/см}^2 = 6,4 \text{ МПа.}$$

Пример 19.4. Определить толщину стенки сферического сосуда, находящегося под давлением газа $p = 25$ ат, если его диаметр $D = 1,2$ м, а допускаемое напряжение $[\sigma] = 12000$ Н/см².

Решение. Определим напряжения в стенке сосуда:

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pD}{4t} = \frac{250 \cdot 120}{4t}$$

Из условия прочности по гипотезе наибольших касательных напряжений определим толщину стенки

$$\sigma_t = \sigma_1 = 250 \cdot 30 / t = 12000;$$

$$t = 250 \cdot 30 / 12000 = 0,625 \text{ см} = 6,25 \text{ мм.}$$

Пример 19.5. Цилиндрический паровой котел имеет толщину стенки $t = 15$ мм и диаметр $D = 1,2$ м. Определить допускаемую величину давления пара p , если допускаемое напряжение для материала $[\sigma] = 140$ МПа, а также диаметр и количество болтов для прикрепления крышки (рис. 19.16). Допускаемое напряжение для материала болтов $[\sigma] = 160$ МПа.

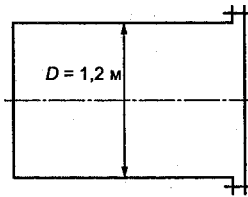


Рис. 19.16

Решение. Предельное давление определим из условия прочности по теории наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_t = \frac{pD}{2t} < [\sigma]; \quad p = \frac{[\sigma] \cdot 2t}{D} = \frac{14000 \cdot 2 \cdot 1,5}{120} = 350 \text{ Н/см}^2.$$

Внутренний диаметр резьбы болтов рекомендуется принимать следующим:

$$d_1 = 2t = 2 \cdot 15 = 30 \text{ мм.}$$

Ближайший болт, у которого внутренний диаметр по ГОСТу приближается к d_1 , будет М36 с $d_1 = 33,4$ мм.

Количество болтов найдем из условия: сила, действующая на крышку от давления пара, должна уравновешиваться сопротивлением болтов разрыву:

$$\frac{\pi D^2}{4} p = n \frac{\pi d_1^2}{4} [\sigma],$$

где n - число болтов.

Тогда

$$n = \frac{\pi D^2}{d_1^2 [\sigma]} = \frac{350 \cdot 120^2}{3,34^2 \cdot 16000} = 28.$$

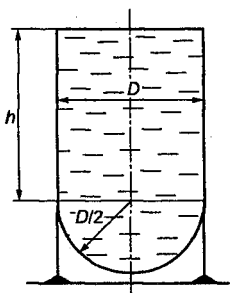


Рис. 19.17

Пример 19.6. Цилиндрический резервуар диаметром $D = 4$ м с днищем в виде полусферы наполнен водой на высоту $h = 6$ м. Толщина стенок цилиндрической части и днища $t = 0,5$ см. Найти максимальное напряжение в цилиндрической и сферической частях (рис. 19.17).

Решение. Определяем наибольшие напряжения в цилиндрической части:

$$\sigma_{t_{\max}} = \frac{h\gamma D}{2t} = \frac{600 \cdot 0,01 \cdot 400}{2 \cdot 0,5} = 2400 \text{ Н/см}^2 = 24 \text{ МПа}.$$

Наибольшее напряжение в сферической части будет на дне резервуара

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{\gamma(h + D/2)R}{2t} = \frac{0,01 \cdot (600 + 200) \cdot 200}{2 \cdot 0,5} = 1600 \text{ Н/см}^2 = 16 \text{ МПа}.$$

Пример 19.7. Цилиндрический котел имеет толщину стенки $t = 1,5$ см, диаметр $D = 2,0$ м и находится под давлением $p = 15$ ат. Продольный шов выполнен внахлестку заклепками диаметром $d = 26$ мм с шагом $s = 120$ мм. Определить прочность заклепочного шва на разрыв, если допускаемое напряжение для листовой стали $[\sigma] = 140$ МПа.

Решение. Находим усилие, приходящееся на длину l , равную шагу заклепочного соединения, используя (19.10) и (19.30):

$$N = p \frac{D}{2} l = \frac{150 \cdot 200}{2} \cdot 12 = 180\,000 \text{ Н}.$$

Площадь сечения стенки котла на длине, равной шагу шва,

$$A_{\text{нетто}} = t(l - d) = 1,5 \cdot (120 - 26) = 14,1 \text{ см}^2.$$

Напряжение в опасном сечении

$$\sigma = N / A_{\text{нетто}} = 180\,000 / 14,1 = 127 \text{ МПа} < [\sigma] = 140 \text{ МПа}.$$

РАСЧЕТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

20.1. Определение напряжений в толстостенном цилиндре при действии внутреннего и наружного давления

Толстостенные цилиндры и трубы находят широкое применение в машиностроении. Это трубопроводы и сосуды высокого давления, цилиндры гидравлических прессов, гильзы плунжерных пар в топливных насосах и другое оборудование. Сюда относятся также соединения круглых деталей с гарантированным натягом. Под *толстостенными трубами* будем понимать цилиндр или трубу, у которых отношение толщины стенки к внутреннему радиусу больше 0,1, т.е.

$$\frac{\delta}{r_{\text{в}}} > 0,1, \quad (20.1)$$

где δ - толщина стенки цилиндра; $r_{\text{в}}$ - внутренний радиус цилиндра.

Особенностью расчетной схемы толстостенных цилиндров является необходимость учета изменения окружных и радиальных напряжений по толщине стенки.

Рассмотрим закрытый толстостенный цилиндр, находящийся под действием внутреннего $p_{\text{в}}$ и наружного $p_{\text{н}}$ давления (рис. 20.1). Пусть $r_{\text{в}}$ - внутренний радиус и $r_{\text{н}}$ - наружный ра-

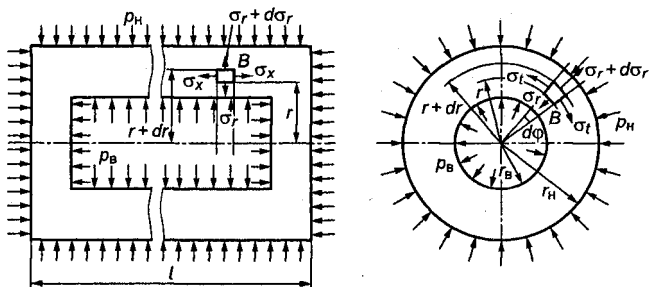


Рис. 20.1

диус цилиндра. Длину цилиндра l будем считать произвольной, а материал – однородным и упругим.

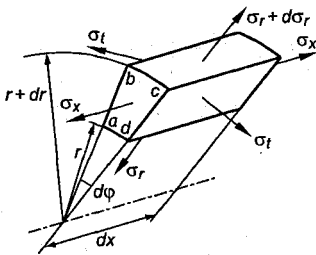


Рис. 20.2

Так как все поперечные сечения цилиндра равнозначны, достаточно рассмотреть напряженное состояние для произвольной точки в любом сечении. Выделим в окрестности точки B бесконечно малый элемент длиной dx , ограниченный двумя радиальными сечениями, образующими угол $d\varphi$, двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и

$r+dr$, и рассмотрим его равновесие (рис. 20.2).

Выделенный элемент будет находиться в равновесии под действием сил, обусловленных окружными σ_t , радиальными σ_r и осевыми σ_x напряжениями. Напряжения σ_t и σ_r изменяются по толщине стенки цилиндра, осевые напряжения σ_x распределены по сечению равномерно. Из условия симметрии цилиндра и нагрузки следует, что напряжения σ_t , σ_r , σ_x являются *главными напряжениями*, а площадки, на которых они действуют, – *главными площадками*. Следовательно, любые площадки, проходящие через радиус и ось цилиндра, будут главными. Из рис. 20.2 следует, что в случае закрытого цилиндра, нагруженного внутренним и внешним давлением, в точке B материал испытывает трехосное напряженное состояние. На гранях ab и cd элемента в силу симметрии действуют одинаковые окружные напряжения σ_t . Радиальные напряжения по толщине элемента изменяются. Поэтому если на поверхности ad напряжение равно σ_r , то на поверхности bc оно получит приращение $d\sigma_r$. Составим уравнение равновесия элемента в виде суммы проекций всех сил на направление радиуса:

$$(\sigma_r + d\sigma_r) (r+dr) \cdot d\varphi \cdot dx - \sigma_r \cdot r \cdot d\varphi \cdot dx - 2\sigma_t \cdot dr \cdot dx \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0. \quad (20.2)$$

Для малых углов

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}.$$

Сокращая на $d\varphi dx$ и пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка, получим

$$r \cdot d\sigma_r + \sigma_r \cdot dr - \sigma_t \cdot dr = 0,$$

или, разделив на dr :

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0. \quad (20.3)$$

Остальные уравнения равновесия для элемента удовлетворяются тождественно.

Уравнение (20.3) содержит два неизвестных σ_r и σ_t , зависящих от одного независимого переменного – радиуса r . Таким образом, задача является один раз статически неопределимой и для ее решения требуется дополнительное уравнение, учитывающее особенности деформации цилиндра. Деформация в направлении оси x , согласно обобщенному закону Гука, равна

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_r + \sigma_t)]. \quad (20.4)$$

Так как ε_x и σ_x не зависят от r и по длине и толщине стенки цилиндра не изменяются ($\varepsilon_x = \text{const}$, $\sigma_x = \text{const}$), то из уравнения (20.4) вытекает следующее равенство:

$$\frac{d\varepsilon_x}{dr} = -\frac{\mu}{E} \left[\frac{d}{dr} (\sigma_r + \sigma_t) \right] = 0.$$

Откуда

$$\frac{d}{dr} (\sigma_r + \sigma_t) = 0. \quad (20.5)$$

Из (20.5) следует, что

$$\sigma_r + \sigma_t = C_1 = \text{const} \quad (20.6)$$

и

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{d\sigma_t}{dr}. \quad (20.7)$$

Следовательно, для любой точки толстостенного цилиндра (трубы) сумма радиального и окружного напряжения есть величина постоянная. Подставляя выражение (20.7) в уравнение (20.3), получаем недостающее для решения задачи второе уравнение:

$$-r \frac{d\sigma_t}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0. \quad (20.8)$$

Складывая уравнения (20.8) и (20.3), находим

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} (\sigma_r - \sigma_t) + 2(\sigma_r - \sigma_t) = \frac{d}{dr} [r^2 \cdot (\sigma_r - \sigma_t)] = 0, \quad (20.9)$$

откуда

$$r^2 \cdot (\sigma_r - \sigma_t) = C_2 = \text{const.} \quad (20.10)$$

Решая совместно (20.10) и (20.6), получаем значения напряжений σ_r и σ_t :

$$\sigma_r = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2 \cdot r^2}; \quad (20.11)$$

$$\sigma_t = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2 \cdot r^2}. \quad (20.12)$$

Постоянные C_1 и C_2 находятся из краевых условий: при $r = r_B$, $\sigma_r = -p_B$; при $r = r_H$, $\sigma_r = -p_H$. Подставляя краевые условия в (20.11) и решая систему двух уравнений с двумя неизвестными, получаем

$$\begin{aligned} -p_B &= \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2 \cdot r_B^2}; \\ -p_H &= \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2 \cdot r_H^2}; \\ \frac{C_2}{2} &= \frac{(p_B - p_H) \cdot r_B^2 \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2}, \quad \frac{C_1}{2} = \frac{p_B \cdot r_B^2 - p_H \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2}. \end{aligned} \quad (20.13)$$

Подставляя $\frac{C_1}{2}$ и $\frac{C_2}{2}$ в (20.11) и (20.12), получаем

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_B \cdot r_B^2 - p_H \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \mp \frac{(p_B - p_H) \cdot r_B^2 \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \frac{1}{r^2}, \quad (20.14)$$

где r - текущий радиус, расстояние от рассматриваемой точки до оси цилиндра.

Знак «-» соответствует напряжению σ_r ; «+» - напряжению σ_t .

Осевое напряжение σ_x равняется осевой растягивающей силе $\pi(p_B \cdot r_B^2 - p_H \cdot r_H^2)$, деленной на площадь $\pi(r_H^2 - r_B^2)$:

$$\sigma_x = \frac{p_B \cdot r_B^2 - p_H \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2}. \quad (20.15)$$

Для открытого цилиндра (трубы) осевое напряжение $\sigma_x = 0$.

20.2. Определение перемещений в толстостенном цилиндре при действии внутреннего и наружного давления

Любая точка стенки цилиндра при его деформации получает определенное перемещение. Это перемещение по условиям симметрии должно проходить в радиальной плоскости. Все точки, лежащие в плоскости симметрии до деформации, остаются в ней и после деформации.

Обозначим радиальное перемещение точки через u , которое будем считать положительным, если оно направлено от оси цилиндра. Величина u является функцией текущего радиуса r . Перемещения вдоль оси цилиндра возникают в результате общего удлинения или укорочения цилиндра, при этом они происходят так, что поперечные сечения цилиндра не искажаются. Длина цилиндра принимается достаточно большой, а влияние дниц на радиальные перемещения u - пренебрежимо малым. Выразим относительные удлинения в радиальном ϵ_r и окружном ϵ_t направлениях через перемещения u (рис. 20.3).

Пусть слой ad под действием сил переместился на величину u , тогда перемещение слоя bc , отстоящего на расстоянии dr , будет $u + du$. Отсюда относительное радиальное удлинение

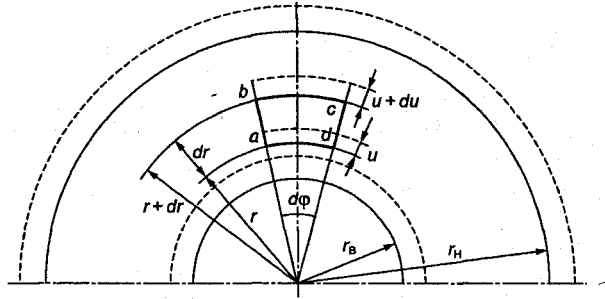


Рис. 20.3

$$\varepsilon_r = \frac{u+du-u}{dr} = \frac{du}{dr}. \quad (20.16)$$

Относительное окружное удлинение

$$\varepsilon_t = \frac{(r+u) \cdot d\varphi - r \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (20.17)$$

Вместе с тем относительные удлинения ε_r и ε_t , согласно обобщенному закону Гука, связаны с напряжениями σ_r , σ_t , σ_x соотношениями

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_t + \sigma_x)]; \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_x)]. \quad (20.18)$$

Приравнявая выражения (20.17), (20.18) и подставляя вместо напряжений их значения из (20.14) и (20.15), после элементарных преобразований получим формулу для определения радиальных перемещений u произвольной точки цилиндра:

$$u = \varepsilon_t \cdot r = \frac{r}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_x)] = \frac{1-2\mu}{E} \frac{p_B \cdot r_B^2 - p_H \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{(p_B - p_H) \cdot r_B^2 \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \frac{1}{r}. \quad (20.19)$$

Для открытого цилиндра осевое напряжение $\sigma_x = 0$, напряженное состояние в точках стенки цилиндра двухосное, перемещение u имеет следующий вид:

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{p_B \cdot r_B^2 - p_H \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{(p_B - p_H) \cdot r_B^2 \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \frac{1}{r} \quad (20.20)$$

Рассмотренная задача определения напряжений и перемещений в толстостенном цилиндре носит название **задачи Ламе**³³, по имени французского ученого, впервые давшего ее решение.

20.3. Анализ частных случаев нагружения толстостенных цилиндров ($\sigma_x = 0$)

Цилиндр нагружен только внутренним давлением

В этом случае $p_H = 0$ и формулы для вычисления напряжений и перемещений принимают вид

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_B \cdot r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 \mp \frac{r_H^2}{r^2} \right); \quad (20.21)$$

$$u = \frac{p_B \cdot r_B^2}{E(r_H^2 - r_B^2)} \left((1-\mu)r + (1+\mu) \frac{r_H^2}{r} \right). \quad (20.22)$$

На рис. 20.4 показаны эпюры изменения радиального и окружного напряжения по толщине стенки цилиндра.

Напряжение σ_t является растягивающим, а напряжение σ_r - сжимающим. На наружной поверхности при $r = r_H$ радиальное напряжение $\sigma_r = 0$, а окружное напряжение

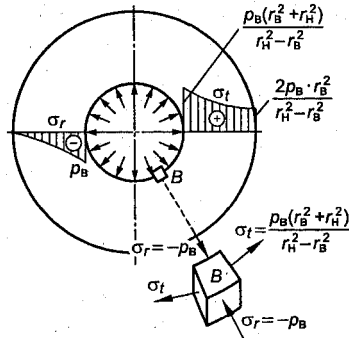


Рис. 20.4

$$\sigma_t = \frac{2p_B \cdot r_B^2}{r_H^2 - r_B^2}$$

Для расчета на прочность необходимо установить опасную точку стенки и по соответствующей гипотезе прочности составить условие прочности.

Наиболее напряженная точка располагается на внутренней поверхности цилиндра. В этой точке материал находится в плоском напряженном состоянии. Главные напряжения

$$\sigma_1 = \frac{p_B (r_B^2 + r_H^2)}{r_H^2 - r_B^2} = \sigma_1; \quad (20.23)$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_r = -p_B = \sigma_3. \quad (20.24)$$

Для пластичного материала условие прочности по теории наибольших касательных напряжений будет равно

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p_B (r_B^2 + r_H^2)}{r_H^2 - r_B^2} - (-p_B) = \frac{2p_B \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \leq [\sigma], \quad (20.25)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

Формула (20.25) позволяет определять требуемые значения наружного и внутреннего радиусов при заданных остальных величинах:

$$\frac{r_H}{r_B} \geq \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2p_B}}. \quad (20.26)$$

Формула (20.26) показывает, что при некоторой величине внутреннего давления p_B независимо от толщины стенки обеспечить условие прочности невозможно. Так, например, при давлении $p_B > 0,5[\sigma]$ условие прочности по гипотезе наибольших касательных напряжений не удовлетворяется и отношение r_H/r_B обращается в бесконечность. В этом случае эквивалентное напряжение будет больше допускаемого при любой толщине стенки. Когда давление p_B больше $0,5\sigma_T$ (где σ_T - предел текучести материала), во внутренних точках появляется пластическая деформация. Следует заметить, что пластическая деформация представляет опасность только тогда, когда она

распространяется на всю толщину стенки, поэтому при больших внутренних давлениях расчет ведут по предельной нагрузке. При этом за предельную нагрузку принимают такое давление, при котором пластическая деформация распространяется на всю толщину стенки. *Величина предельного давления определяется методами теории пластичности.* Например, для цилиндра, изготовленного из пластичного материала, предельное давление определится по формуле

$$p_{\text{пред}} = \frac{2 \cdot \sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \frac{r_H}{r_B}. \quad (20.27)$$

Расчет по предельной нагрузке проводят в определенной последовательности. Зная давление p_B , задаются коэффициентом безопасности $[n]$ и вычисляют требуемое предельное давление:

$$p_{\text{пред}} = p_B [n].$$

По формуле (20.27) определяют $\ln r_H / r_B$ и, приняв радиус r_B , находят r_H . Таким образом можно рассчитать цилиндр (трубу) на любое внутреннее давление.

Когда в толстостенных трубах не допускается возникновение пластических деформаций, то для увеличения внутреннего давления, до которого труба будет работать упруго, ее делают составной, из нескольких труб, насаженных одна на другую с натягом.

Пример 20.1. Определить толщину стенки стального цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления $p_B = 5000 \text{ Н/см}^2$, если внутренний радиус $r_B = 2 \text{ см}$, а допускаемое напряжение $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ и предел текучести $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$. Расчет провести по допускаемым напряжениям и по предельной нагрузке.

Решение. Используя теорию наибольших касательных напряжений, по формуле (20.26) найдем

$$\frac{r_H}{r_B} \geq \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2 \cdot p_B}} = \sqrt{\frac{14000}{14000 - 2 \cdot 5000}} = 1,87.$$

Тогда $r_H = 1,87 \cdot r_B = 1,87 \cdot 2 = 3,74$ см;

$$\delta = 3,74 - 2 = 1,74 \text{ см.}$$

Выполним расчет по предельной нагрузке, приняв коэффициент безопасности равным 3,5.

Предельное давление

$$p_{\text{пред}} = p_B \cdot [n] = 5000 \cdot 3,5 = 17\,500 \text{ Н/см}^2.$$

По формуле (20.27) найдем $\ln r_H/r_B$:

$$17\,500 = \frac{2 \cdot 25\,000}{\sqrt{3}} \ln \frac{r_H}{r_B};$$

$$\ln \frac{r_H}{r_B} = \frac{17\,500 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 25\,000} = 0,606; \quad \frac{r_H}{r_B} = 1,83.$$

Тогда $r_H = 1,83 \cdot r_B = 2 \cdot 1,83 = 3,66$ см;

$$\delta = r_H - r_B = 3,66 - 2 = 1,66 \text{ см.}$$

Сравнение результатов показывает, что в данном случае расчет по допускаемым напряжениям и расчет по предельной нагрузке дают практически одинаковое значение толщины стенки.

Пример 20.2. Исходя из данных предыдущей задачи определить толщину стенки цилиндра, если внутреннее давление $p_B = 15\,000 \text{ Н/см}^2 = 150 \text{ МПа}$.

Решение. При заданном давлении выполнить расчет по допускаемым напряжениям невозможно, так как $p_B > 0,5 \sigma_T$ ($150 \text{ МПа} > 0,5 \cdot 250 \text{ МПа}$).

По предельной нагрузке при $[n] = 3,5$

$$p_{\text{пред}} = p_B \cdot [n] = 150 \cdot 3,5 = 525 \text{ МПа.}$$

По формуле (20.27)

$$\ln \frac{r_H}{r_B} = \frac{p_{\text{пред}} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sigma_T} = \frac{52\,500 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 25\,000} = 1,82.$$

Откуда

$$\frac{r_H}{r_B} = 6,17; \quad r_H = 6,17 \cdot r_B = 6,17 \cdot 2 = 12,34 \text{ см;}$$

$$\delta = r_H - r_B = 12,34 - 2 = 10,34 \text{ см.}$$

Цилиндр нагружен только внешним давлением

В этом случае $p_B = 0$ и формулы для напряжений и перемещений принимают вид

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_H \cdot r_H^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 \mp \frac{r_B^2}{r^2} \right); \quad (20.28)$$

$$u = \frac{p_H \cdot r_H^2}{E(r_H^2 - r_B^2)} \left[(1 - \mu)r + (1 + \mu) \frac{r_B^2}{r} \right]. \quad (20.29)$$

Эпюры распределения напряжений по толщине стенки цилиндра показаны на рис. 20.5.

Напряжения σ_r и σ_t являются отрицательными. Наибольшее значение окружное напряжение σ_t примет на внутренней поверхности, где $\sigma_r = 0$:

$$\sigma_t = \frac{p_H \cdot r_H^2}{E(r_H^2 - r_B^2)}.$$

На наружной поверхности радиальное напряжение σ_r равно давлению $\sigma_r = -p_H$.

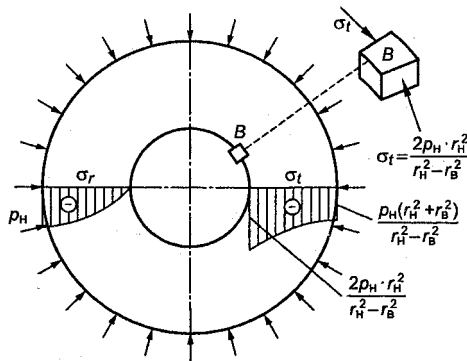


Рис. 20.5

Эпюры показывают, что опасными являются точки внутренней поверхности, находящиеся в условиях одноосного сжатия. Условие прочности по теории наибольших касательных напряжений имеет следующий вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - \left(\frac{2 \cdot p_{\text{н}} \cdot r_{\text{н}}^2}{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2} \right) = \frac{2 \cdot p_{\text{н}} \cdot r_{\text{н}}^2}{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2} \leq [\sigma]. \quad (20.30)$$

Согласно формулам (20.25) и (20.30) величина эквивалентного напряжения будет одинаковой для цилиндров, имеющих одинаковые геометрические размеры и нагруженных равным наружным или внутренним давлением $p_{\text{н}} = p_{\text{в}} = p$.

Цилиндр нагружен одинаковым внутренним и внешним давлением ($p_{\text{н}} = p_{\text{в}} = p$)

В этом случае окружное и радиальное напряжения равны между собой и не зависят от радиуса r :

$$\sigma_r = -p; \quad (20.31)$$

$$\sigma_t = -p. \quad (20.32)$$

Радиальное перемещение

$$u = -\frac{1-\mu}{E} \cdot p \cdot r. \quad (20.33)$$

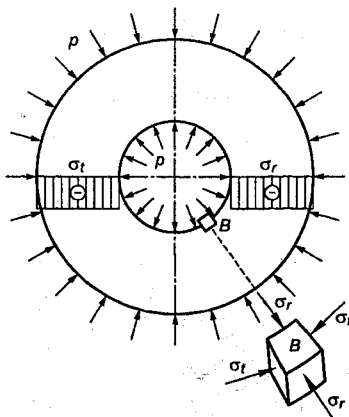


Рис. 20.6

Эпюры распределения напряжений по толщине стенки цилиндра представлены на рис. 20.6.

Эпюры показывают, что все точки стенки цилиндра являются равноопасно нагруженными, а материал испытывает двухосное сжатие. Условие прочности по теории наибольших касательных напряжений будет

$$\sigma_{\text{экв}} = 0 - (-p) = p \leq [\sigma]. \quad (20.34)$$

**Цилиндр имеет бесконечно большую толщину
и находится под действием внутреннего давления**

В этом случае $p_H = 0$; $r_H = \infty$ и формулы для напряжений и перемещений принимают вид

$$\sigma_{r,t} = \pm p_B \frac{r_B^2}{r^2}; \quad (20.35)$$

$$u = \frac{1+\mu}{E} \cdot p_B \cdot \frac{r_B^2}{r}. \quad (20.36)$$

Из (20.35) следует, что радиальное напряжение σ_r в любой точке стенки цилиндра равно и противоположно направлено окружному напряжению σ_t и все точки находятся в состоянии чистого сдвига. Эпюры изменения напряжений σ_r и σ_t в функции текущего радиуса r представлены на рис. 20.7.

Наибольшие значения окружное и радиальное напряжения имеют на внутренней поверхности:

$$\sigma_t = p_B; \quad \sigma_r = -p_B.$$

Условие прочности по теории наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = p_B - (-p_B) = 2 p_B \leq [\sigma]. \quad (20.37)$$

Из формулы (20.35) следует, что напряжения σ_t и σ_r в точках, расположенных на расстоянии $4r_B$ от оси цилиндра, составляют всего 1/16 от значения p_B . Следовательно, цилиндр с отношением радиусов

$\frac{r_H}{r_B} > 4$ можно рассматривать как имеющий

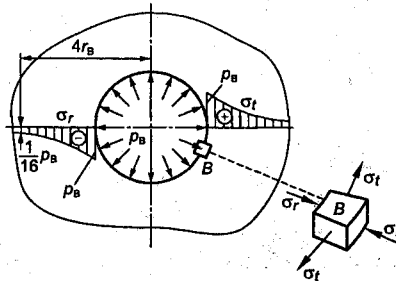


Рис. 20.7

бесконечно большую толщину стенки. Погрешность таких расчетов не превышает 5 %. Таким образом, можно заключить, что если точки внешнего контура удалены от оси цилиндрического отверстия больше чем на $4r_B$, то форма внешнего контура не имеет существенного значения и может быть произвольной. Расчетная схема таких деталей будет сводиться к схеме цилиндра с бесконечно большой толщиной стенки.

Сплошной цилиндр нагружен внешним давлением

В этом случае $p_B = 0$; $r_B = 0$ и формулы для напряжений и перемещений принимают вид

$$\sigma_{r,t} = -p_H; \quad (20.38)$$

$$u = -\frac{p_H}{E}(1-\mu) \cdot r. \quad (20.39)$$

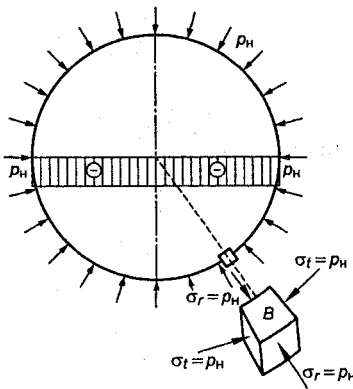


Рис. 20.8

Эпюры распределения напряжений в сплошном цилиндре представлены на рис. 20.8.

Напряжения по радиусу цилиндра распределяются равномерно. Из рис. 20.8 видно, что материал в любой точке находится в условиях плоского напряженного состояния (двухосного сжатия). Условие прочности будет

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - (-p_H) = \\ &= p_H \leq [\sigma]. \quad (20.40) \end{aligned}$$

Пример 20.3. Длинная стальная труба, имеющая внутренний диаметр 4 см, подвергается внутреннему давлению $p_B = 27$ МПа и наружному давлению $p_H = 9$ МПа. Считая деформацию в направлении оси трубы равной нулю, определить главные напряжения и расчетное напряжение на основе теории наибольших касательных напряжений.

Решение. Наибольшие окружное и радиальное напряжения будут действовать на внутренней поверхности трубы при $r = r_B = 2$ см:

$$\sigma_t = \frac{2700 \cdot 2^2 - 900 \cdot 5^2}{5^2 - 2^2} + \frac{(2700 - 900) \cdot 2^2 \cdot 5^2}{5^2 - 2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = 1586 \text{ Н/см}^2 = 15,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_r = \frac{2700 \cdot 2^2 - 900 \cdot 5^2}{5^2 - 2^2} - \frac{(2700 - 900) \cdot 2^2 \cdot 5^2}{5^2 - 2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = -2700 \text{ Н/см}^2 = -27 \text{ МПа}$$

Так как деформация трубы в направлении оси равна нулю, то

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_t + \sigma_r)] = 0.$$

Откуда

$$\sigma_x = \mu(\sigma_t + \sigma_r) = 0,3(1586 - 2700) = -334 \text{ Н/см}^2 = -363 \text{ МПа}.$$

Коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Расчетное напряжение

$$\sigma_1 = \sigma_t = 1586 \text{ Н/см}^2 = 15,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = -334 \text{ Н/см}^2 = -3,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = -2700 \text{ Н/см}^2 = -27 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 1586 + 2700 = 4286 \text{ Н/см}^2 = 42,9 \text{ МПа}.$$

Пример 20.4. Стальная труба имеет наружный диаметр 20 см, подвергается внутреннему давлению 35 МПа. Определить необходимую толщину стенки цилиндра, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$. Использовать теорию наибольших касательных напряжений.

Решение. Определяем главные напряжения σ_r , σ_t , σ_x . Из формулы (20.21) находим:

$$\sigma_r = \frac{3500 \cdot r_B^2}{10^2 - r_B^2} \left(1 - \frac{10^2}{r_B^2} \right) = -3500 \text{ Н/см}^2 = -35 \text{ МПа};$$

$$\sigma_t = \frac{3500 \cdot r_B^2}{10^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{10^2}{r_B^2} \right) = \frac{3500 \cdot (10^2 + r_B^2)}{10^2 - r_B^2} \text{ Н/см}^2.$$

Считая трубу длинной, деформацию вдоль оси принимаем равной нулю.

Тогда

$$\sigma_x = \mu(\sigma_t + \sigma_r) = \mu \left[\frac{3500 \cdot (10^2 + r_B^2)}{10^2 - r_B^2} - 3500 \right] = \frac{2 \cdot 3500 \cdot \mu \cdot r_B^2}{10^2 - r_B^2} \text{ Н/см}^2.$$

Главные напряжения равны:

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{3500 \cdot (10^2 + r_B^2)}{10^2 - r_B^2}, \text{ Н/см}^2;$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = \frac{2 \cdot 3500 \cdot \mu \cdot r_B^2}{10^2 - r_B^2}, \text{ Н/см}^2;$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = -3500 \text{ Н/см}^2.$$

Условие прочности будет следующим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3500 \cdot (10^2 + r_B^2)}{10^2 - r_B^2} + 3500 = \frac{2 \cdot 3500 \cdot 10^2}{10^2 - r_B^2} = 18\,000.$$

Откуда

$$r_B = \sqrt{\frac{18\,000 - 700}{18}} = 7,8 \text{ см};$$

$$\delta = r_H - r_B = 10 - 7,8 = 2,2 \text{ см}.$$

Задачу можно было решить, непосредственно используя формулу (20.25) или (20.26), так как напряжение σ_x будет иметь промежуточное значение.

20.4. Расчет посадок с гарантированным натягом

На практике часто бывает необходимо создать давление между валом и втулкой или между двумя цилиндрами при их сборке. Это достигается за счет того, что внутренний радиус наружной детали делают меньше наружного радиуса внутренней детали. Разность диаметров посадочных поверхностей наружной и внутренней детали называется **натягом**. Сборку деталей обычно производят путем нагревания наружной (охватывающей) детали или охлаждения в жидком азоте внутренней (охватываемой) детали, иногда просто запрессовывают одну деталь в другую с применением смазки. После выравнивания температур на посадочных поверхностях деталей возникает давление, называемое **контактным**. Если длина соединяемых цилиндров

одинакова, то контактное давление p_k равномерно распределяется по посадочной поверхности.

Вычислим величину контактного давления и возникающие напряжения при посадке с натягом одного цилиндра на другой (рис. 20.9).

Обозначим через r_B и r_C радиусы внутреннего цилиндра, через r'_C и r_H - радиусы наружного цилиндра, через Δ - диаметральный натяг. Внутренний радиус наружного цилиндра

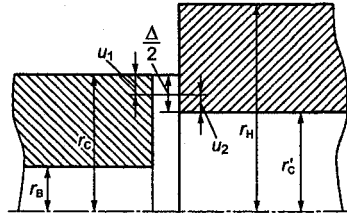


Рис. 20.9

$$r'_C = r_C - \frac{\Delta}{2}. \quad (20.41)$$

При посадке радиус r_C внутреннего цилиндра уменьшится и точки цилиндра на контактной поверхности получат отрицательное перемещение u_1 , а внутренний радиус наружного цилиндра увеличится и точки цилиндра на контактной поверхности получат положительное перемещение u_2 . Отсюда уравнение совместности деформаций запишется из условия, что увеличение внутреннего радиуса наружного цилиндра плюс уменьшение наружного радиуса внутреннего цилиндра должно равняться $\Delta/2$:

$$u_2 + (-u_1) = \frac{\Delta}{2}. \quad (20.42)$$

Пусть E_1 и E_2 , μ_1 и μ_2 - соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона внутреннего и наружного цилиндров. Контактное давление p_k является для внутреннего цилиндра внешним давлением, а для наружного - внутренним. Положив в формуле (20.29) $p_H = p_k$; $r_H = r = r_C$, найдем уменьшение радиуса посадочной поверхности u_1 внутреннего цилиндра:

$$u_1 = -\frac{p_k \cdot r_C^2}{E_1 (r_C^2 - r_B^2)} \left[(1 - \mu_1) r_C + (1 + \mu_1) \frac{r_B^2}{r_C} \right]. \quad (20.43)$$

Аналогично, подставив в формулу (20.22) $p_K = p_B$; $r'_c = r = r_c$, найдем изменение радиуса посадочной поверхности наружного цилиндра:

$$u_2 = \frac{p_K \cdot r_c^2}{E_2 (r_H^2 - r_c^2)} \left[(1 - \mu_2) r_c + (1 + \mu_2) \frac{r_H^2}{r_c} \right]. \quad (20.44)$$

Подставив (20.43) и (20.44) в уравнение совместности деформаций (20.42), найдем величину контактного давления:

$$\begin{aligned} & \frac{p_K \cdot r_c^2}{E_2 (r_H^2 - r_c^2)} \left[(1 - \mu_2) r_c + (1 + \mu_2) \frac{r_H^2}{r_c} \right] + \\ & + \frac{p_K \cdot r_c^2}{E_1 (r_c^2 - r_B^2)} \left[(1 - \mu_1) r_c + (1 + \mu_1) \frac{r_B^2}{r_c} \right] = \frac{\Delta}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$p_K = \frac{\Delta}{2r_c \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{r_c^2 + r_B^2}{r_c^2 - r_B^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{r_H^2 + r_c^2}{r_H^2 - r_c^2} + \mu_2 \right) \right]}. \quad (20.45)$$

Если сопрягаемые цилиндры изготовлены из одинакового материала, то $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и формула (20.45) после преобразований получит вид

$$p_K = \frac{\Delta \cdot E}{2r_c \left(\frac{r_c^2 + r_B^2}{r_c^2 - r_B^2} + \frac{r_H^2 + r_c^2}{r_H^2 - r_c^2} \right)}, \quad (20.46)$$

или

$$p_K = \frac{\Delta \cdot E \cdot (r_c^2 - r_B^2) \cdot (r_H^2 - r_c^2)}{4r_c^3 (r_H^2 - r_B^2)}. \quad (20.47)$$

В частном случае сплошного вала и втулки, положив $r_B = 0$, получим

$$p_k = \frac{\Delta \cdot E \cdot (r_H^2 - r_c^2)}{4r_c \cdot r_H^2}, \quad (20.48)$$

где r_c - наружный радиус вала.

Формулы (20.45) - (20.48) применяются для расчета посадок гладких цилиндров с одинаковой длиной сопрягаемых деталей; при этом необходимо отметить, что они будут справедливы только в пределах натягов, вызывающих в материале упругие деформации.

При различной длине сопрягаемых поверхностей контактные давления распределяются по длине неравномерно. Выступающие концы длинной охватываемой детали оказывают большее сопротивление сжатию, в результате чего увеличивается контактное давление у краев посадочной поверхности, т.е. возникает концентрация напряжений (рис. 20.10, а). Для снижения величины максимальных контактных напряжений $p_{k \max}$ применяют разгрузочные канавки (рис. 20.10, б).

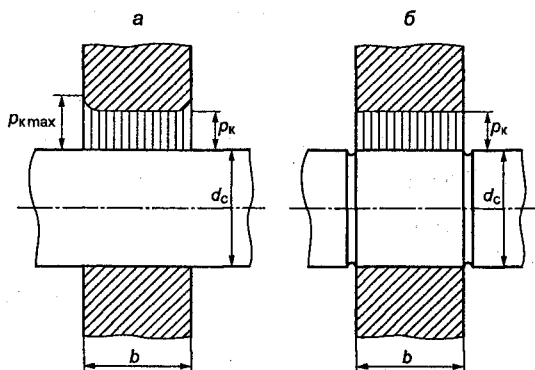


Рис. 20.10

При расчете посадок с гарантированным натягом необходимая величина контактного давления определяется в зависимости от величины вращающего момента или осевого усилия, передаваемых соединением за счет сил трения, возникающих на контактной поверхности.

Пример 20.5. Определить напряжение, возникающее при посадке втулки на вал, диаметром $d = 12$ см, наружный диаметр

втулки $d_H = 20$ см. Материал вала и втулки одинаков. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, натяг $\Delta = 0,045$ мм.

Решение. Определим величину контактного давления по формуле (20.48), приняв $r_c = 6$ см, $r_H = 10$ см:

$$p_k = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 0,0045 \cdot (10^2 - 6^2)}{4 \cdot 6 \cdot 10^2} = 2400 \text{ Н/см}^2 = 24 \text{ МПа.}$$

Напряжение в вале, согласно (20.38), будет

$$\sigma_t = \sigma_r = -p_k = -2400 \text{ Н/см}^2 = -24 \text{ МПа.}$$

Напряжение во втулке найдем по формуле (20.21):

$$\sigma_r = -p_k = -2400 \text{ Н/см}^2 = -24 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_t = \frac{2400 \cdot (6^2 + 10^2)}{10^2 - 6^2} = 5100 \text{ Н/см}^2 = 51 \text{ МПа.}$$

Эквивалентное напряжение в точке на внутренней поверхности втулки

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 51 + 24 = 75 \text{ МПа.}$$

Таким образом, даже при малом натяге возникают значительные напряжения. Поэтому детали, предназначенные для сборки с натягом, необходимо обрабатывать с большой точностью, не допуская отклонения натяга от номинального значения.

20.5. Определение напряжений в составных трубах

Как было показано, увеличение толщины стенки цилиндра (трубы) при величине внутреннего давления, превышающей половину предела текучести σ_T , не может обеспечить работу цилиндра без появления пластических деформаций. Если возникновение пластических деформаций недопустимо, как в приборах высокого давления, в стволах орудий, то применяют составные цилиндры, изготовленные из нескольких труб, насаженных одна на другую с натягом. В этом случае возникающее между цилиндрами контактное давление p_k является для внутреннего цилиндра внешним давлением, а для охватывающего (наружного цилиндра) - внутренним. Контактное давление

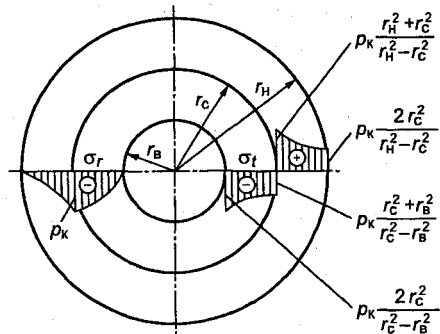


Рис. 20.11

определяется по формулам (20.45) и (20.47). За счет него в составном цилиндре возникают начальные напряжения, которые можно вычислить по формулам (20.21), (20.28). Эпюра распределения начальных напряжений по поперечному сечению составного цилиндра показана на рис. 20.11.

В наружном цилиндре возникает растягивающее окружное напряжение σ_t , во внутреннем - сжимающее окружное напряжение. При нагружении составного цилиндра внутренним (рабочим) давлением его стенки будут работать как одно целое и начальные напряжения будут алгебраически складываться с рабочими напряжениями. Суммарное окружное напряжение в опасных точках на внутренней поверхности уменьшится по сравнению с теми же точками сплошного цилиндра, и поэтому составной цилиндр будет способен выдержать большее давление. Распределение окружных и радиальных напряжений по поперечному сечению составного цилиндра при совместном действии внутреннего и контактного давления показано на рис. 20.12. Пунктиром показано изменение напряжений при условии, что цилиндр имеет сплошные стенки.

Так как вследствие натяга у внешнего цилиндра увеличивается окружное напряжение в точке C поверхности контакта, то необходимо проводить у составного цилиндра проверку прочности как внутреннего, так и наружного цилиндра. На практике целесообразно величину контактного давления и, следовательно, величину натяга Δ выбирать так, чтобы обеспечивалось условие равнопрочности внутреннего и наружного цилин-

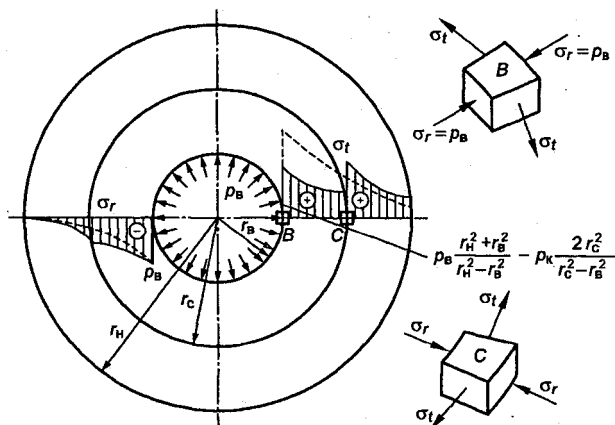


Рис. 20.12

дров. Для составного цилиндра, собранного из двух (рис. 20.12), условие равнопрочности цилиндров имеет вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}(B) = \sigma_{\text{ЭКВ}}(C). \quad (20.49)$$

Согласно (20.14) получим:
в точке B

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = p_B \frac{r_H^2 + r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} - p_K \frac{2 \cdot r_C^2}{r_C^2 - r_B^2} - (-p_B); \quad (20.50)$$

в точке C

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = p_B \frac{r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{r_C^2} \right) + p_K \frac{r_H^2 + r_C^2}{r_H^2 - r_C^2} - p_B \frac{r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 - \frac{r_H^2}{r_C^2} \right) - (-p_K). \quad (20.51)$$

Приравнявая (20.50) и (20.51), найдем величину p_K контактного давления:

$$p_K = \frac{p_B \cdot r_H^2 \cdot (r_C^2 - r_B^2)^2 \cdot (r_H^2 - r_C^2)}{r_C^2 (r_H^2 - r_B^2) \cdot (2r_H^2 \cdot r_C^2 - r_H^2 \cdot r_B^2 - r_C^4)}. \quad (20.52)$$

Подставляя в (20.52) значения p_K из (20.47), найдем величину натяга, обеспечивающего условие равнопрочности при заданном внутреннем давлении:

$$\Delta = \frac{4p_B}{E} \frac{r_H^2 \cdot r_C \cdot (r_C^2 - r_B^2)}{r_H^2 (r_C^2 - r_B^2) + r_C^2 (r_H^2 - r_C^2)} \quad (20.53)$$

Заменив в (20.50) контактное давление из (20.52) и приравняв производную $\sigma_{\text{экв}}$ по r_C к нулю, получим *оптимальное значение радиуса контактной поверхности, при котором достигается минимальное значение эквивалентного напряжения в опасной точке:*

$$r_C = \sqrt{r_B \cdot r_H}; \quad (20.54)$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\min} = p_B \frac{r_H}{r_H - r_B}.$$

Оптимальная величина контактного давления будет

$$p_K = \frac{p_B}{2} \cdot r_H - r_B \frac{r_H - r_B}{r_H + r_B}. \quad (20.55)$$

Натяг, соответствующий этому давлению, получим, подставив в (20.53) величину p_K из (20.55):

$$\Delta = \frac{2 \cdot p_B \cdot r_C}{E}. \quad (20.56)$$

Соотношения (20.52) – (20.56) носят название **условий равнопрочности Гадолина**²², по имени русского ученого, впервые их получившего.

Пример 20.6. Определить напряжения в составном цилиндре, нагруженном внутренним давлением $p_B = 25$ МПа, если внутренний радиус $r_B = 10$ см; $r_C = 15$ см; $r_H = 20$ см. Величина натяга $\Delta = 0,035$ см. Модуль упругости $E = 210^5$ МПа.

Решение. Определяем величину контактного давления по формуле (20.47):

$$p_K = \frac{\Delta \cdot E \cdot (r_C^2 - r_B^2) \cdot (r_H^2 - r_C^2)}{4r_C^3 (r_H^2 - r_B^2)} = \frac{0,035 \cdot 2 \cdot 10^7 (15^2 - 10^2) \cdot (20^2 - 15^2)}{4 \cdot 15^3 (20^2 - 10^2)} =$$

$$= 3781 \text{ Н/см}^2 = 37,8 \text{ МПа}.$$

Окружное и радиальное напряжения, вызываемые контактным давлением во внутреннем цилиндре, определяются по формуле (20.28):

$$(\sigma_t)_{r=10 \text{ см}} = -\frac{p_K \cdot r_C^2}{r_C^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_B^2}{r_C^2} \right) = -\frac{3781 \cdot 15^2 \cdot 2}{15^2 - 10^2} = -13\,612 \text{ Н/см}^2 = -136 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_t)_{r=15 \text{ см}} = -\frac{p_K \cdot (r_C^2 + r_B^2)}{r_C^2 - r_B^2} = -\frac{3781 \cdot (15^2 + 10^2)}{15^2 - 10^2} = -9831 \text{ Н/см}^2 = -98,3 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=10 \text{ см}} = 0;$$

$$(\sigma_r)_{r=15 \text{ см}} = -\frac{p_K \cdot r_C^2}{r_C^2 - r_B^2} \left(1 - \frac{r_B^2}{r_C^2} \right) = -p_K = -3781 \text{ Н/см}^2 = -37,8 \text{ МПа}.$$

Окружное и радиальное напряжения, вызываемые контактным давлением во внешнем цилиндре, определяются по формуле (20.21):

$$(\sigma_t)_{r=15 \text{ см}} = \frac{p_K \cdot r_C^2}{r_H^2 - r_C^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{r_C^2} \right) = \frac{3781 \cdot (15^2 + 20^2)}{20^2 - 15^2} = 13\,504 \text{ Н/см}^2 = 135 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_t)_{r=20 \text{ см}} = \frac{p_K \cdot r_C^2}{r_H^2 - r_C^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{r_C^2} \right) = \frac{3781 \cdot 15^2 \cdot 2}{20^2 - 15^2} = 9723 \text{ Н/см}^2 = 97,2 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=15 \text{ см}} = -p_K = -3781 \text{ Н/см}^2 = -37,8 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=20 \text{ см}} = 0.$$

Найдем напряжения, вызываемые внутренним давлением p_B на внутренней, наружной поверхности и на поверхности радиусом $r_C = 15 \text{ см}$, принимая цилиндр сплошным.

Используя формулу (20.21), получим:

$$(\sigma_t)_{r=10 \text{ см}} = \frac{p_B \cdot r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{r_B^2} \right) = \frac{25\,000 \cdot (20^2 + 10^2)}{20^2 - 10^2} =$$

$$= 41\,667 \text{ Н/см}^2 = 416,7 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_t)_{r=20 \text{ см}} = \frac{p_B \cdot 2 \cdot r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} = \frac{25\,000 \cdot 2 \cdot 10^2}{20^2 - 10^2} = 16\,667 \text{ Н/см}^2 = 166,7 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_t)_{r=15 \text{ см}} = \frac{p_B \cdot r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{r_C^2} \right) = \frac{25\,000 \cdot 10^2}{20^2 - 10^2} \left(1 + \frac{20^2}{15^2} \right) =$$

$$= 23\,167 \text{ Н/см}^2 = 231,7 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=10 \text{ см}} = -p_B = -25\,000 \text{ Н/см}^2 = -250 \text{ МПа}; \quad (\sigma_r)_{r=20 \text{ см}} = 0;$$

$$(\sigma_r)_{r=15 \text{ см}} = \frac{p_B \cdot r_B^2}{r_H^2 - r_B^2} \left(1 - \frac{r_H^2}{r_C^2} \right) = \frac{25\,000 \cdot 10^2}{20^2 - 10^2} \left(1 - \frac{20^2}{15^2} \right) =$$

$$= -6\,500 \text{ Н/см}^2 = -65 \text{ МПа}.$$

Складывая алгебраически напряжения от внутреннего и контактного давления, получим эпюру распределения напряжений по толщине стенки составного цилиндра (рис. 20.13).

Внутренний цилиндр:

$$(\sigma_t)_{r=10 \text{ см}} = 41\,667 - 13\,612 = 28\,055 \text{ Н/см}^2 = 280,5 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_t)_{r=15 \text{ см}} = 23\,167 - 9831 = 13\,336 \text{ Н/см}^2 = 133,4 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=10 \text{ см}} = -25\,000 \text{ Н/см}^2 = -250 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=15 \text{ см}} = -6\,500 - 3781 = -10\,281 \text{ Н/см}^2 = -103 \text{ МПа}.$$

Наружный цилиндр:

$$(\sigma_t)_{r=15 \text{ см}} = 23\,167 + 13\,504 = 36\,671 \text{ Н/см}^2 = 366,7 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_t)_{r=20 \text{ см}} = 16\,667 + 9723 = 26\,390 \text{ Н/см}^2 = 264 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=15 \text{ см}} = -6\,500 - 3781 - 10\,281 \text{ Н/см}^2 = -103 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=20 \text{ см}} = 0.$$

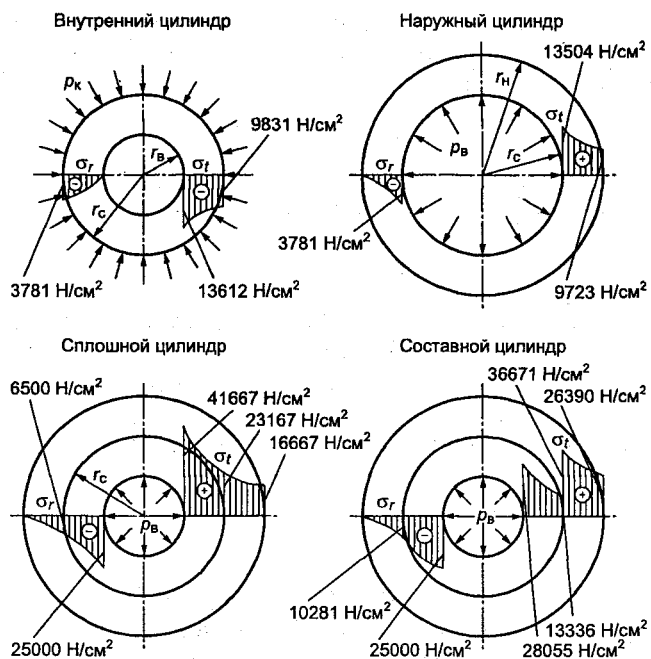


Рис. 20.13

Значения эквивалентных напряжений следующие:
 для сплошного цилиндра

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 41\,667 + 25\,000 = 66\,667 \text{ Н/см}^2 = 666,7 \text{ МПа};$$

для составного цилиндра

точка В: $\sigma_{\text{ЭКВ}} = 28\,055 + 25\,000 = 53\,055 \text{ Н/см}^2 = 530,6 \text{ МПа};$

точка С: $\sigma_{\text{ЭКВ}} = 36\,667 + 6500 = 43\,167 \text{ Н/см}^2 = 431,7 \text{ МПа}.$

Таким образом, получили снижение эквивалентных напряжений у составного цилиндра по сравнению со сплошным цилиндром на 20 %.

Пример 20.7. Определить величины натягов для цилиндра, собранного из трех труб размерами:

1-я труба: $r_b = 4 \text{ см}; r_{c1} = 8 \text{ см};$

2-я труба: $r_{c2} = 8 \text{ см}; r'_{c2} = 10 \text{ см};$

3-я труба: $r_{c3} = 10 \text{ см}; r_h = 15 \text{ см}.$

Величина контактного давления на сопрягаемых поверхностях пусть будет одинаковой и равной $p_{к1} = p_{к2} = 20$ МПа; $E = 210^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

Решение. Вычислим напряжения, возникающие на внутренней и наружной поверхности каждой трубы.

1-я труба:

$$(\sigma_t)_{r=4 \text{ см}} = \frac{p_{к1} \cdot r_{с1}^2}{r_{с1}^2 - r_{в}^2} \left(1 + \frac{r_{в}^2}{r_{с1}^2} \right) = \frac{2000 \cdot 8^2 \cdot 2}{8^2 - 4^2} =$$

$$= -5333 \text{ Н/см}^2 = -53,3 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_t)_{r=8 \text{ см}} = -\frac{p_{к1} (r_{с1}^2 + r_{в}^2)}{r_{с1}^2 - r_{в}^2} = -\frac{2000 (8^2 + 4^2)}{8^2 - 4^2} =$$

$$= -3333 \text{ Н/см}^2 = -33,3 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=4 \text{ см}} = 0; \quad (\sigma_r)_{r=8 \text{ см}} = -2000 \text{ Н/см}^2 = -20 \text{ МПа}.$$

2-я труба:

$$(\sigma_t)_{r=8 \text{ см}} = -2000 \text{ Н/см}^2 = -20 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_t)_{r=10 \text{ см}} = -2000 \text{ Н/см}^2 = -20 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=8 \text{ см}} = -2000 \text{ Н/см}^2 = -20 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=10 \text{ см}} = -2000 \text{ Н/см}^2 = -20 \text{ МПа}.$$

3-я труба:

$$(\sigma_t)_{r=10 \text{ см}} = \frac{p_{к2} \cdot r_{с3}^2}{r_{н}^2 - r_{с3}^2} \left(1 + \frac{r_{н}^2}{r_{с3}^2} \right) = \frac{2000 (10^2 + 15^2)}{15^2 - 10^2} =$$

$$= 5200 \text{ Н/см}^2 = 52 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_t)_{r=15 \text{ см}} &= \frac{p_{к2} \cdot r_{с3}^2}{r_H^2 - r_{с3}^2} \left(1 + \frac{r_H^2}{r_{с3}^2} \right) = \frac{2000 \cdot 10^2 \cdot 2}{15^2 - 10^2} = \\
 &= 3200 \text{ Н/см}^2 = 32 \text{ МПа}; \\
 (\sigma_r)_{r=10 \text{ см}} &= p_{к2} = -2000 \text{ Н/см}^2 = -20 \text{ МПа}; \\
 (\sigma_r)_{r=15 \text{ см}} &= 0.
 \end{aligned}$$

В случае многослойного цилиндра величину требуемого натяга наиболее просто определить по формуле (20.19), если известны напряжения на контактных поверхностях охватывающей и охватываемой труб. Определив радиальные перемещения охватывающей и охватываемой труб, требуемый натяг находят как разность перемещений, взятых со своим знаком. Диаметральный натяг будет равен

$$\Delta = 2u_2 - 2u_1. \quad (20.57)$$

Определим перемещения точек, расположенных на поверхностях контакта ($\sigma_x = 0$).

Для первой контактной поверхности

$$u_{c1} = \frac{r_{c1}}{E} (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_r) = \frac{8}{2 \cdot 10^7} (-3333 + 0,3 \cdot 2000) = -0,00109 \text{ см};$$

$$u_{c2} = \frac{r_{c2}}{E} (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_r) = \frac{8}{2 \cdot 10^7} (-2000 + 0,3 \cdot 2000) = -0,00056 \text{ см};$$

$$\Delta_1 = 2u_{c2} - 2u_{c1} = -0,00112 + 0,00218 = 0,00106 \text{ см} = 10,6 \text{ мкм}.$$

Для второй контактной поверхности

$$u_{c2} = \frac{r_{c2}}{E} (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_r) = \frac{10}{2 \cdot 10^7} (-2000 + 0,3 \cdot 2000) = -0,0007 \text{ см};$$

$$u_{c3} = \frac{r_{c3}}{E} (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_r) = \frac{10}{2 \cdot 10^7} (5200 + 0,3 \cdot 2000) = 0,0029 \text{ см};$$

$$\Delta_2 = 2u_{c3} - 2u_{c2} = 0,0058 + 0,0014 = 0,0072 \text{ см} = 72 \text{ мкм}.$$

Найденные величины натягов обеспечивают заданные контактные давления.

Глава 21

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

21.1. Основные положения теории колебаний

Колебания представляют один из наиболее распространенных видов движения, имеющего большую практическую значимость в инженерном деле. Работа машин, приборов и механизмов всегда сопровождается колебаниями, что снижает их надежность, вызывает шум или оказывает вредное влияние на организм человека. Существуют определенные области неприятных частот для человека. Например, при вертикальных колебаниях мы остро реагируем на частоту около 5 Гц; при частотах 5–10 Гц нарушается дыхательный процесс, а также зрительное восприятие. Часто колебания являлись причиной разрушения ответственных конструкций (турбинных лопаток, воздушных винтов, мостов, перекрытий зданий и т.д.). Известны случаи, когда конструкции, жесткие и прочные при статических нагрузках, разрушались при колебаниях, вызываемых небольшими силами. Поэтому перед инженерами во всех областях техники встают задачи предупреждения возрастания интенсивности колебаний выше допустимых значений, что требует проведения соответствующих расчетов деталей машин, а также применения в необходимых случаях дополнительных виброзащитных устройств.

Механические колебания систем делятся на свободные и вынужденные.

Свободные колебания - это колебания, которые совершает система около состояния равновесия под действием восстанавливающих сил и сил сопротивления.

Восстанавливающая сила - это сила, стремящаяся вернуть систему в положение равновесия. В упругих системах восстанавливающие силы представляют собой силы упругости, возникающие вследствие деформирования элементов системы при колебаниях. При колебаниях маятника роль восстанавливающей силы играет составляющая силы тяжести, направленная по касательной к траектории движения. Восстанавливающая сила, создаваемая силами упругости, пропорциональными от-

клонению системы от положения равновесия, называется **линейной**, а колебания – **линейными**. Восстанавливающие силы определяют свойства и способность механических систем совершать свободные колебания.

Силы сопротивления обуславливаются силами трения в сочленениях элементов и опорах механических систем, силами сопротивления среды, внутренним трением в материале, а также трением в демпферах, которые устанавливаются для гашения колебаний. Для механических систем силы сопротивления принимаются пропорциональными первой степени скорости движения. Такие системы называются **диссипативными** или **системами с вязким трением**. Силы сопротивления вызывают рассеивание (диссипацию) энергии и постепенное затухание свободных колебаний, которые будут продолжаться, пока потенциальная энергия, накопленная системой к началу колебательного процесса, не израсходуется на их преодоление. При отсутствии сопротивлений система совершает гармонические незатухающие колебания. Сами свободные колебания для упругой системы (конструкции) опасности не представляют. Но они имеют фундаментальное значение, так как характеризуют «динамическую индивидуальность» системы, определяющую ее поведение при вынужденных колебаниях. Для возникновения свободных колебаний система должна обладать массой, позволяющей при движении накапливать кинетическую энергию, и способностью при отклонении от положения равновесия (деформации) накапливать потенциальную энергию.

Вынужденные колебания – это колебания, совершаемые системой под действием периодически изменяющихся внешних сил, называемых **возмущающими**. Это колебания незатухающие. Они продолжаются до тех пор, пока действует возмущающая сила. Например, колебание подставки, когда на ней работает несбалансированный двигатель. В результате таких колебаний часто наступает усталостное разрушение.

Упругие системы, испытывающие колебательное движение, различаются по числу степеней свободы. **Числом степеней свободы** называется **число независимых координат, определяющих положение системы**. В зависимости от числа степеней свободы различают системы с **конечным** и с **бесконечно большим числом степеней свободы**. Все реальные деформируемые тела являются системами с бесконечным числом степеней свободы. Точное решение таких задач сопряжено с большими трудностями, а в

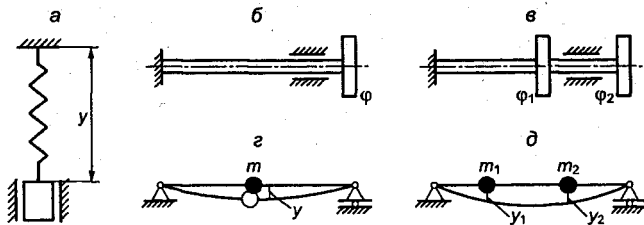


Рис. 21.1

ряде случаев вообще невозможно. Поэтому на практике ограничивают расчетную схему реальной конструкции несколькими или даже одной степенью свободы. Ограничение числа учитываемых в расчете степеней свободы состоит в том, что массивные элементы конструкции принимаются за абсолютно твердые тела, а упругие элементы считаются лишенными массы и представляются в виде безынерционных элементов. Так, например, груз, подвешенный на пружине (рис. 21.1, а), если масса пружины мала по сравнению с массой груза, можно считать системой с одной степенью свободы, так как положение груза определяется одной координатой y . Диск, закрепленный на упругом валике (рис. 21.1, б), также представляет собой систему с одной степенью свободы, если масса валика мала по сравнению с массой диска и последний может колебаться только вокруг оси валика. В этом случае положение системы определяется одной координатой – углом поворота φ . Два диска закреплены на упругом валике (рис. 21.1, в) – система имеет две степени свободы, так как положение системы определяется двумя координатами – углами φ_1 и φ_2 поворота дисков. На балке закреплен груз массой m (рис. 21.1, г); если масса балки мала по сравнению с массой груза, то система имеет одну степень свободы и ее положение определяется одной координатой y . Система, представленная на рис. 21.1, д, является системой с двумя степенями свободы, так как ее положение будет определяться двумя координатами y_1 и y_2 . Одна и та же реальная конструкция в зависимости от поставленной задачи исследования может быть приведена к расчетной схеме с одной или несколькими степенями свободы.

Колебания характеризуются: периодом T , представляющим собой время одного полного колебания (измеряется в секундах); частотой $\nu = 1/T$ – величиной, обратной периоду, равной числу

колебаний в единицу времени (измеряется в герцах); амплитудой A , представляющей собой максимальное отклонение от положения равновесия; начальной фазой φ_0 , определяющей положение системы в момент начала колебаний. В технике широко используется круговая частота ω :

$$\omega = 2\pi \cdot \nu = 2\pi / T.$$

21.2. Общее дифференциальное уравнение колебаний упругих линейных систем с одной степенью свободы

Рассмотрим упругую балку, на которой в середине закреплен груз массой m (рис. 21.2). Массой балки пренебрегаем. В данном случае система имеет одну степень свободы.

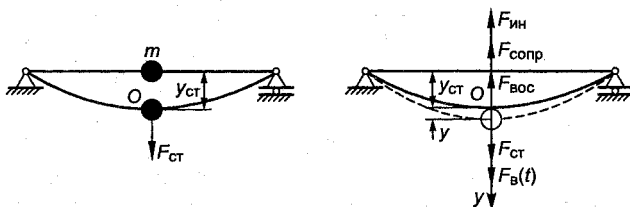


Рис. 21.2

Под действием силы тяжести $F_{ст} = mg$ балка получит прогиб $y_{ст}$. Поместим начало координат в точке O статического равновесия. Обозначим через y перемещение груза в произвольный момент времени под действием возмущающей силы $F_{в}(t)$. В этом положении на груз будут действовать восстанавливающая сила $F_{вос}$, сила сопротивления $F_{сопр}$, сила инерции $F_{ин}$, а также сила тяжести $F_{ст}$ и возмущающая сила $F_{в}(t)$. Сумма всех приложенных к массе m сил в любой момент времени, согласно принципу Д'Аламбера, должна равняться нулю:

$$F_{ст} + F_{в}(t) - F_{вос} - F_{сопр} - F_{ин} = 0. \quad (21.1)$$

Силы, входящие в уравнение (21.1), определяются соотношениями

$$F_{ст} = Cy_{ст}; \quad (21.2)$$

$$F_{вос} = C(y_{ст} + y); \quad (21.3)$$

$$F_{сопр} = ky'; \quad (21.4)$$

$$F_{ин} = my'', \quad (21.5)$$

где C – коэффициент жесткости упругой системы, представляющий собой силу, вызывающую деформацию (прогиб, угол поворота, удлинение), равную единице; k – коэффициент сопротивления, определяемый физической природой трения в системе.

Подставляя выражения (21.2 – 21.5) в уравнение (21.1), получим

$$my'' + ky' + Cy = F_B(t). \quad (21.6)$$

Разделим правую и левую части уравнения (21.6) на m и обозначим

$$2h = k/m; \quad \omega_0^2 = C/m, \quad (21.7)$$

где h – коэффициент затухания, зависящий от характера сил сопротивления; ω_0 – представляет собой, как будет показано ниже, круговую частоту свободных или собственных колебаний системы.

Тогда уравнение (21.6) запишется в виде

$$y'' + 2hy' + \omega_0^2 y = \frac{F_B(t)}{m}. \quad (21.8)$$

Уравнение (21.8) является общим дифференциальным уравнением колебаний упругих линейных систем с одной степенью свободы. Рассмотрим частные случаи.

21.3. Свободные колебания линейных систем

Свободные колебания при отсутствии сил трения

Дифференциальное уравнение движения системы получим, положив в уравнении (21.8) $h = 0$, $F_B(t) = 0$:

$$y'' + \omega_0^2 y = 0. \quad (21.9)$$

Уравнение описывает идеализированную систему, изолированную от внешней среды, имеющую постоянный запас энергии. Такие системы называются **консервативными**. Для консервативных систем с одной степенью свободы характерно в любой момент времени равенство сил инерции и сил упругости. Как известно, общее решение уравнения (21.9) имеет вид

$$y = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t, \quad (21.10)$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Постоянные интегрирования

$$C_1 = A \cdot \cos \varphi_0; \quad C_2 = A \cdot \sin \varphi_0, \quad (21.11)$$

где φ_0 - некоторый постоянный угол.

Тогда

$$C_1^2 + C_2^2 = A^2 \cdot (\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) = A^2; \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad (21.12)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = C_2 / C_1. \quad (21.13)$$

Обозначая перемещение и скорость в начальный момент $t=0$ через $y=y_0$ и $y'=y'_0$ из уравнения (21.10), находим

$$C_2 = y_0; \quad C_1 = y'_0 / \omega_0. \quad (21.14)$$

Таким образом,

$$A = \sqrt{y_0^2 + (y'_0 / \omega_0)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y_0 \omega_0}{y'_0}. \quad (21.15)$$

Подставляя (21.11) в (21.10), получаем уравнение движения системы в виде

$$y = A \cos \varphi_0 \sin \omega_0 t + A \sin \varphi_0 \cos \omega_0 t = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (21.16)$$

Максимальное значение функции $\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ равно 1, поэтому постоянная A равна y_{\max} - наибольшему отклонению системы от положения равновесия и называется **амплитудой колебаний**. Величина $(\omega_0 t + \varphi_0)$ называется **фазой колебаний**, угол φ_0 называется **начальной фазой** и определяет начальное положение при $t = 0$, из которого система начинает свое движение:

$$y_0 = A \sin \varphi_0. \quad (21.17)$$

Так как φ_0 может принимать все значения от 0 до 2π , то уравнение (21.16) будет описывать колебательное движение системы при любом ее начальном положении.

Колебательное движение, представленное уравнением (21.16), называется **гармоническим** и описывается синусоидальным законом с постоянными амплитудой A , периодом T , круговой частотой ω_0 и начальной фазой φ_0 (рис. 21.3).

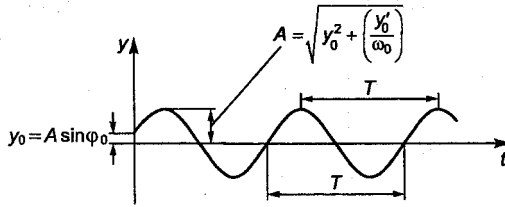


Рис. 21.3

Жесткость системы C равна отношению нагрузки к статическому перемещению:

$$C = \frac{F_{ст}}{y_{ст}} = \frac{mg}{y_{ст}},$$

где m - масса груза.

Тогда из уравнения (21.7) круговая частота свободных колебаний, или ее называют еще **круговой частотой собственных колебаний системы**, будет равна

$$\omega_0 = \sqrt{C/m} = \sqrt{g/y_{ст}}. \quad (21.18)$$

Период колебаний T определяется из условия, что при увеличении времени t на величину периода T аргумент под знаком синуса изменяется на 2π :

$$[\omega_0(t+T) + \varphi_0] - (\omega_0 t + \varphi_0) = 2\pi,$$

Откуда

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{y_{ст}/g}. \quad (21.19)$$

$$\omega_0 = 2\pi/T, \quad (21.19, a)$$

т. е. круговая частота, как отмечалось, представляет собой число колебаний за 2π секунд.

Частота колебаний в герцах равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}}. \quad (21.20)$$

Как следует из выражений (21.18) и (21.19), круговая частота ω_0 и период T свободных колебаний не зависят от амплитуды колебаний, а определяются только величиной статической деформации $y_{ст}$.

Свободные колебания при наличии сил трения

Дифференциальное уравнение колебательного движения системы в этом случае получим, подставив в уравнении (21.8) $F_B(t) = 0$:

$$y'' + 2hy' + \omega_0^2 y = 0. \quad (21.21)$$

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами требует составления характеристического уравнения, для чего примем

$$y = e^{rt}. \quad (21.22)$$

Дифференцируя уравнение (21.22) дважды по времени и подставляя значения производных в (21.21), получаем характеристическое уравнение

$$r^2 + 2h \cdot r + \omega_0^2 = 0. \quad (21.23)$$

Корни уравнения (21.23) равны

$$r_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (21.24)$$

Выражение (21.24) показывает, что характер движения системы будет определяться соотношением величин h и ω_0 .

Возможны следующие три случая движения.

1. При $h \ll \omega_0$ корни характеристического уравнения комплексно сопряженные. Колебания являются *затухающими, квазипериодическими* (рис. 21.4).

2. При $h \gg \omega_0$ корни характеристического уравнения вещественные. Колебательное движение является *аперiodическим*, по существу *монотонным процессом* (рис. 21.5).

3. При $h = \omega_0$ имеет место *предельное аперiodическое движение*, когда система практически весьма быстро возвращается в положение равновесия (рис. 21.6).

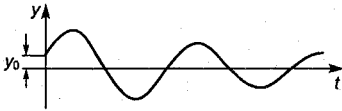


Рис. 21.4

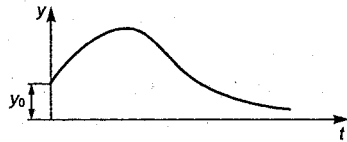


Рис. 21.5

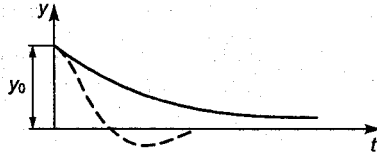


Рис. 21.6

Следовательно, колебательное движение наблюдается только при $h < \omega_0$. Для этого случая корни характеристического уравнения представим в виде

$$r_1 = -h + i \cdot \sqrt{\omega_0^2 - h^2}; \quad r_2 = -h - i \cdot \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (21.21) будет следующим:

$$y = e^{-ht} \cdot \left[C_1 \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - h^2} \cdot t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - h^2} \cdot t\right) \right],$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

Выразим C_1 и C_2 через переменные A и φ_0 :

$$C_1 = A \cos \varphi_0; \quad C_2 = A \sin \varphi_0.$$

Подставив C_1 и C_2 , получим общее решение уравнения (21.21) в виде

$$y = A e^{-ht} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - h^2} \cdot t + \varphi_0\right) = A e^{-ht} \sin(\omega_h t + \varphi_0), \quad (21.25)$$

где A - амплитуда затухающих колебаний; $\omega_h = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ - круговая частота затухающих колебаний.

Так как множитель $y = e^{-ht}$ постепенно убывает со временем, то из уравнения (21.25) следует, что при наличии сопротивления движение системы представляет собой затухающие колебания (рис. 21.7).

Огибающие кривой процесса определяются функциями

$$y = \pm A_0 e^{-ht},$$

где A_0 - начальная ордината огибающей.

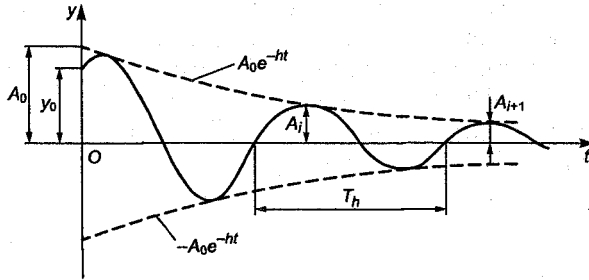


Рис. 21.7

Темп затухания колебаний зависит от величины h – коэффициента затухания.

Период колебаний равен промежутку времени между двумя любыми последовательными отклонениями системы в одну сторону:

$$T_h = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - h^2/\omega_0^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - h^2/\omega_0^2}}, \quad (21.26)$$

где T – период свободных колебаний системы при отсутствии сил сопротивления.

Так как знаменатель в формуле (21.26) меньше единицы, то $T_h > T$. Но h/ω_0 мало и увеличение периода T_h за счет сил сопротивления представляет собой величину второго порядка малости:

$$T_h = T \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\omega_0} \right)^2 + \dots \right]$$

Поэтому в инженерных расчетах при определении периода и круговой частоты свободных колебаний не учитывают сил сопротивления.

Интенсивность затухания колебаний оценивается логарифмическим декрементом, являющимся натуральным логарифмом отношения двух последовательных амплитуд при отклонении системы в одну сторону:

$$\Delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \ln \frac{A_0 e^{-ht}}{A_0 e^{-h(i+1)T}} = hT_h. \quad (21.27)$$

В металлоконструкциях при отсутствии специальных демпферов логарифмический декремент составляет от нескольких сотых до десятых долей единицы. Теоретически амплитуда колебания, убывающая по экспоненциальному закону, становится равной нулю через бесконечно большой промежуток времени. На практике обычно считают, что колебания полностью прекращаются, если амплитуда стала меньше 0,01 начального значения.

Формула (21.27) позволяет, зная Δ и T , определить коэффициент затухания h .

Величины A_i , A_{i+1} , T_h определяются из виброграммы затухающих колебаний. Расчеты показывают, что хотя сопротивление почти не влияет на частоту и период колебаний, оно интенсивно гасит свободные колебания. Это позволяет считать свободные колебания по прошествии некоторого промежутка времени после начала движения прекратившимися.

21.4. Вынужденные колебания линейных систем

Вынужденные колебания при отсутствии сил сопротивления

Дифференциальное уравнение движения системы получим, положив в уравнении (21.8) $h = 0$. Возмущающую силу $F_B(t)$ примем изменяющейся по гармоническому закону:

$$F_B(t) = F_B \sin(\omega_B t + \psi),$$

где F_B - максимальное значение; ω_B - круговая частота; ψ - начальная фаза возмущающей силы. Дифференциальное уравнение движения системы будет

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_B}{m} \sin(\omega_B t + \psi). \quad (21.28)$$

Полное решение уравнения (21.28) является суммой общего решения однородного уравнения без правой части, описывающего свободные колебания, и частного решения уравнения с правой частью:

$$y = y_1 + y_2.$$

Общее решение однородного уравнения, согласно (21.16), будет

$$y_1 = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Частное решение ищем в виде

$$y_2 = A_B \sin(\omega_B t + \psi),$$

где A_B - неизвестная амплитуда вынужденных колебаний, происходящих с частотой возмущающей силы.

Тогда полное решение уравнения будет следующим:

$$y = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + A_B \sin(\omega_B t + \psi). \quad (21.29)$$

Подставляя y , y' , y'' в уравнение (21.28), после преобразований получаем:

$$y' = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + A_B \omega_B \cos(\omega_B t + \psi);$$

$$y'' = -A \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - A_B \omega_B^2 \sin(\omega_B t + \psi);$$

$$A_B (\omega_0^2 - \omega_B^2) = F_B / m. \quad (21.30)$$

Откуда амплитуда вынужденных колебаний

$$A_B = \frac{F_B}{m(\omega_0^2 - \omega_B^2)} = \frac{F_B}{m\omega_0^2(1 - \omega_B^2/\omega_0^2)} = y_{\max}^{\text{ст}} \frac{1}{(1 - \omega_B^2/\omega_0^2)}, \quad (21.31)$$

где $y_{\max}^{\text{ст}} = \frac{F_B}{m\omega_0^2}$ - наибольшее отклонение системы от положения равновесия при статическом приложении максимального (амплитудного) значения возмущающей силы.

Множитель $\frac{1}{(1 - \omega_B^2/\omega_0^2)}$ характеризует динамическое действие возмущающей силы и называется динамическим коэффициентом K_d :

$$K_d = \frac{1}{|1 - \omega_B^2/\omega_0^2|}. \quad (21.32)$$

Тогда амплитуда вынужденных колебаний

$$A_B = y_{\max}^{\text{ст}} K_d. \quad (21.33)$$

Откуда

$$K_d = A_B / y_{\max}^{\text{ст}}$$

Динамический коэффициент K_d показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического отклонения, вызванного максимальным значением возмущающей силы.

Динамический коэффициент зависит только от отношения частоты возмущающей силы к частоте собственных колебаний системы. Отрицательное значение K_d означает, что колебания системы происходят в противофазе с возмущающей силой, поэтому практическое значение имеет абсолютное значение этого коэффициента. Зависимость K_d от отношения ω_B / ω_0 графически представлена на рис. 21.8.

При малых значениях ω_B / ω_0 динамический коэффициент близок к единице и колебательное движение системы будет происходить, как при статическом действии возмущающей силы.

Когда ω_B / ω_0 близко к единице, динамический коэффициент, а значит, и амплитуда вынужденных колебаний, интенсивно растут и обращаются в бесконечность при $\omega_B = \omega_0$. Явление повышения амплитуды при совпадении частот собственных колебаний и возмущающей силы называется **резонансом**.

При $\omega_B / \omega_0 > 1$ величина динамического коэффициента уменьшается и при больших значениях отношения ω_B / ω_0 колебания имеют малую амплитуду, при которой систему можно считать практически неподвижной. Колебания при резонансе не являются гармоническими, а их размахи растут пропорционально времени (рис. 21.9, а). На рисунке начальные условия приняты нулевыми.

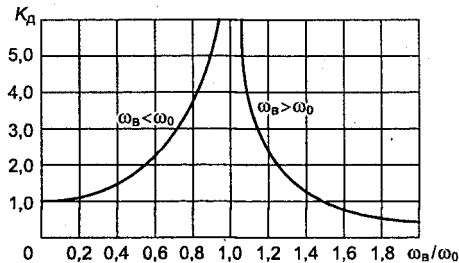


Рис. 21.8

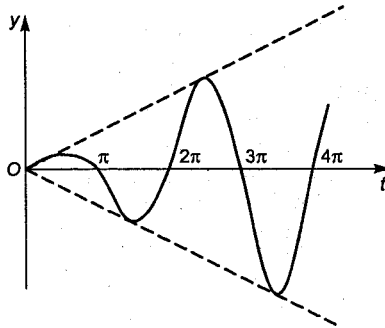


Рис. 21.9, а

Уравнение движения системы представляет собой сумму колебаний с частотами ω_B и ω_0 :

$$y = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{F_B}{m(\omega_0^2 - \omega_B^2)} \sin(\omega_B t + \psi). \quad (21.34)$$

Первый член описывает свободные колебания системы, которые имели бы место при отсутствии возмущающей силы. Данные колебания зависят от начальных условий.

Второй член описывает вынужденные колебания, происходящие с частотой возмущающей силы. Эти колебания не зависят от начальных условий. В реальных системах свободные колебания с частотой ω_0 через некоторое время затухают и устанавливаются одни вынужденные колебания системы, описываемые вторым членом уравнения (21.34).

Вынужденные колебания при наличии сил сопротивления

При гармонической возмущающей силе $F_B(t) = F_B \sin(\omega_B t + \psi)$ дифференциальное уравнение движения линейной системы будет

$$y'' + 2hy' + \omega_0^2 y = \frac{F_B}{m} \sin(\omega_B t + \psi). \quad (21.35)$$

Полное решение уравнения (21.35) складывается из общего решения y_1 однородного уравнения без правой части и частного решения y_2 уравнения с правой частью:

$$y = y_1 + y_2.$$

Общее решение однородного уравнения при $h \ll \omega_0$, согласно (21.25), следующее:

$$y_1 = A e^{-ht} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - h^2} \cdot t + \varphi_0\right).$$

Частное решение будем искать в виде

$$y_2 = A_B \sin(\omega_B t + \psi - \varepsilon), \quad (21.36)$$

где A_B - неизвестная амплитуда вынужденных колебаний, происходящих с частотой возмущающей силы; ε - сдвиг фаз между вынужденными колебаниями системы в установившемся режиме и колебаниями возмущающей силы.

Вычислим производные y_2' и y_2'' и подставим их в уравнение (21.35):

$$\begin{aligned} y_2' &= A_B \omega_B \sin(\omega_B t + \psi - \varepsilon); \quad y_2'' = -A_B \omega_B^2 \sin(\omega_B t + \psi - \varepsilon); \\ &- A_B \omega_B^2 \sin(\omega_B t + \psi - \varepsilon) + 2h A_B \omega_B \cos(\omega_B t + \psi - \varepsilon) + \\ &+ \omega_0^2 A_B \sin(\omega_B t + \psi - \varepsilon) = \\ &= \frac{F_B}{m} [\sin(\omega_B t + \psi - \varepsilon) \cos \varepsilon + \cos(\omega_B t + \psi - \varepsilon) \sin \varepsilon]. \end{aligned} \quad (21.37)$$

Приравнявая в тождестве (21.37) коэффициенты при $\sin(\omega_B t + \psi - \varepsilon)$ и $\cos(\omega_B t + \psi - \varepsilon)$, получаем

$$A_B (\omega_0^2 - \omega_B^2) = \frac{F_B}{m} \cos \varepsilon; \quad 2h A_B \omega_B = \frac{F_B}{m} \sin \varepsilon. \quad (21.38)$$

Возведем каждое из уравнений (21.38) в квадрат и сложим:

$$A_B^2 \left[(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \right] = (F_B/m)^2.$$

Откуда

$$\begin{aligned} A_B &= \frac{F_B}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}} = \frac{F_B}{m \omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{2h}{\omega_0^2} \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}}} = \\ &= y_{\max}^{\text{ст}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{(2h)^2}{\omega_0^2} \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}}}, \end{aligned} \quad (21.39)$$

где $y_{\max}^{\text{ст}} = \frac{F_B}{m\omega_0^2}$ - наибольшее отклонение системы от положения равновесия при статическом приложении амплитудного

значения возмущающей силы; $K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{(2h)^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}}}$ - ди-

намический коэффициент.

Амплитуда вынужденных колебаний будет

$$A_B = y_{\max}^{\text{ст}} K_d.$$

Разделив второе уравнение на первое в (21.33), получим

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}, \text{ или } \varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}. \quad (21.40)$$

Уравнение движения системы

$$y = A e^{-ht} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - h^2} \cdot t + \varphi_0\right) + \frac{F_B}{m \cdot \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_B^2\right)^2 + 4h\omega_B^2}} \sin(\omega_B t + \psi - \varepsilon). \quad (21.41)$$

Из уравнения (21.41) следует, что движение системы складывается из свободных затухающих колебаний, описываемых первым членом уравнения, и вынужденных колебаний, происходящих с частотой возмущающей силы и сдвигом фаз ε , описываемых вторым членом уравнения. Свободные затухающие колебания по истечении некоторого времени исчезают, остаются вынужденные колебания, продолжающиеся до тех пор, пока действует возмущающая сила. Эти колебания определяют характер движения системы. Процесс установления колебательного движения системы показан на рис. 21.9, б. Из рисунка следует, что через промежуток времени, равный t_0 , свободные колебания затухают и система совершает только вынуж-

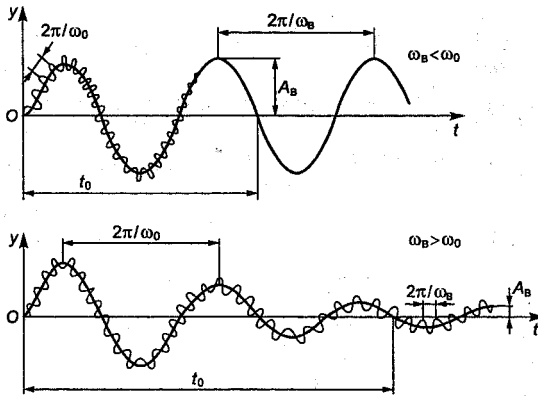


Рис. 21.9, б

денные колебания с амплитудой, равной A_B , и частотой ω_B . При изменении частоты возмущающей силы и наличии сопротивления вынужденные колебания сдвигаются по фазе относительно возмущающей силы.

Если $\omega_B \ll \omega_0$, то из выражения (21.40) следует, что ϵ близко к нулю и фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой возмущающей силы. Когда ω_B близко к ω_0 , сдвиг фаз равняется $\pi/2$, вынужденные колебания отстают по фазе на $\pi/2$ от возмущающей силы. В этом случае возмущающая сила действует в такт с собственными колебаниями системы, т.е. система постоянно получает энергию.

Кривые изменения сдвига фаз в зависимости от отношения ω_B / ω_0 для различных значений $2h/\omega_0$ представлены на рис. 21.10.

Когда $\omega_B \gg \omega_0$, сдвиг фаз приближается к π , т.е. колебания совершаются в противофазе с возмущающей силой и пополнения системы энергией не происходит.

Из рис. 21.10 следует, что чем меньше затухание, тем более резко происходит изменение сдвига фаз. Когда $h = 0$, при резонансе, изменение фаз происходит скачкообразно от $\epsilon = 0$ до $\epsilon = \pi$ и изображается ломаной линией 0112, что соответствует случаю вынужденных колебаний без затухания. Чем больше затухание, тем изменение сдвига фаз происходит более плавно.

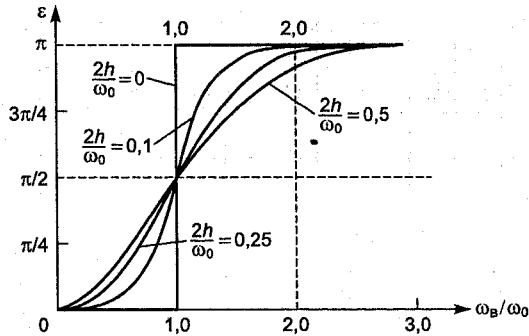


Рис. 21.10

В положении резонанса независимо от величины сопротивления сдвиг фазы всегда равен $\pi/2$ и энергия, поставляемая системе возмущающей силой, максимальна.

Динамический коэффициент системы при наличии сопротивления зависит от двух величин: от отношения ω_b/ω_0 и от отношения $2h/\omega_0$. Зависимость динамического коэффициента от отношения частот ω_b/ω_0 для различных значений $2h/\omega_0$, характеризующих демпфирующее действие сил трения, показана на рис. 21.11.

Из рисунка видно, что если частота возмущающей силы мала по сравнению с собственной частотой колебаний системы, то значение K_d близко к единице и амплитуда вынужденных колебаний равняется $y_{\max}^{\text{ст}}$; если значение ω_b велико по сравнению с ω_0 , то K_d становится меньше единицы и амплитуда вынужденных колебаний будет меньше по сравнению с перемещением системы $y_{\max}^{\text{ст}}$ при статическом действии возмущающей силы. Когда частота возмущающей силы приближается к частоте свободных колебаний системы, динамический коэффициент быстро увеличивается. Чем меньше затухание, тем больше амплитуда вынужденных колебаний в зоне резонанса. Поскольку затухание оказывает влияние на динамический коэффициент в основном в зоне резонанса, а в областях, далеких от резонанса ($\omega_b \ll \omega_0$ и $\omega_b \gg \omega_0$), затухание

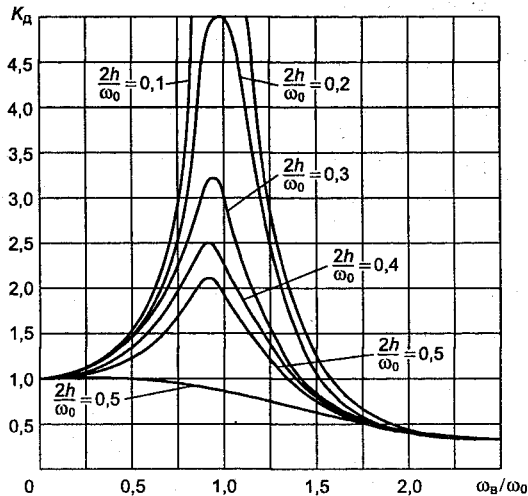


Рис. 21.11

практически не влияет на динамический коэффициент, то расчет режимов вне резонанса можно вести без учета сопротивления системы.

Так как максимум кривых незначительно смещается влево от значения $\omega_B/\omega_0=1$, то резонансные значения динамического коэффициента принято определять при $\omega_B=\omega_0$. Подставляя $\omega_B/\omega_0=1$ в формулу для K_d , получаем

$$K_{d \text{ рез}} = \omega_B/2h. \quad (21.42)$$

Подставляя в (21.39) значение $K_{d \text{ рез}}$ из (21.42), получаем величину амплитуды вынужденных колебаний в момент резонанса

$$A_{B \text{ рез}} = \frac{y_{\max}^{\text{ст}} \omega_0}{2h} = \frac{F_B}{2h \cdot m \cdot \omega_0}. \quad (21.43)$$

Из формулы (21.43) следует, что наличие сопротивлений, а также появление нелинейностей при больших размахах колебаний ограничивают рост амплитуды, делая ее конечной величиной. Необходимо помнить, что резонанс представляет собой явление наложения движений, что только в результате взаимо-

действия свободных (собственных) колебаний системы и вынужденных колебаний возникает движение с возрастающими пропорционально времени амплитудами. Чтобы амплитуда вынужденных колебаний достигла максимального значения, необходимо определенное время на «раскачку» системы. Поэтому кратковременное состояние резонанса для конструкций не является опасным, так как за малое время амплитуда не успевает достичь больших значений. Однако когда ω_v приближается к ω_0 , динамические коэффициенты могут принимать большие значения, и работа при таких режимах становится опасной, так как может наступить разрушение конструкции или появление в ней значительных остаточных деформаций. В реальных металлоконструкциях рассеяние энергии незначительно, поэтому совсем небольшая возмущающая сила может вызвать опасные резонансные колебания. Так, запрещается отрядам переходить мосты в ногу. Если ритм шагов совпадет с собственной частотой моста, то возможно даже его разрушение. Подобные случаи в действительности имели место. Например, в 1831 г. в Манчестере 60 человек разрушили Браунтонский подвесной мост через реку Ирвель; в 1868 г. в Чатаме рухнул мост на опорах при прохождении отряда Британской морской пехоты; в 1850 г. батальон французской пехоты численностью в 500 человек разрушил Анжерский подвесной мост, при этом погибло 226 человек. Таким образом, **определение частот собственных колебаний конструкций в инженерных расчетах имеет большое значение, так как, сопоставляя их с частотой возмущающей силы, возможно предупредить возникновение резонанса.**

21.5. Учет собственного веса системы при колебаниях

Как отмечалось, на практике расчет сводят к простейшему случаю колебаний системы с одной степенью свободы, пренебрегая массой стержня, пружины и т.д. Хотя подобные упрощения во многих случаях дают вполне удовлетворительные результаты, существуют задачи, в которых необходимо учитывать влияние распределенных масс на частоту колебаний.

Учет массы колеблющейся системы обычно производится на основе метода, предложенного лордом Рэлеем, подробно рассмотренного нами в §17.3. Влияние массы на частоту свободных колебаний системы рассмотрим на конкретном примере колебаний консольной балки. Определим круговую частоту

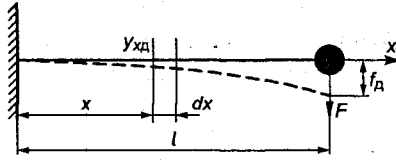


Рис. 21.12

свободных колебаний консольной балки с учетом собственного веса, нагруженной на конце грузом F (рис. 21.12).

Принимаем, что форма изогнутой оси балки с учетом и без учета массы при колебаниях совпадает с формой статической кривой прогиба, вызванного приложенным грузом:

$$y_{x д} / f_{д} = y_{x ст} / f_{ст} = \text{const}, \quad (21.44)$$

где $y_{x д}$ - перемещение сечения стержня, расположенного на расстоянии x от опоры, при колебаниях; $f_{д}$ - перемещение груза F при колебаниях; $y_{x ст}$, $f_{ст}$ - перемещение сечения стержня, расположенного на расстоянии x от опоры и перемещение сечения стержня при статическом приложении груза F .

Если $f_{д}$ перемещение груза при колебаниях, то перемещение любого элемента стержня $p dx$ (где p - вес единицы длины стержня), находящегося на расстоянии x от опоры, согласно (21.44), будет

$$y_{x д} = f_{д} \frac{y_{x ст}}{f_{ст}}. \quad (21.45)$$

Используя любой метод (начальных параметров, теорему Кастилиано, интеграл Мора), найдем перемещение сечения балки на расстоянии x от заземления и перемещение конца балки при статическом приложении груза:

$$y_{x ст} = -F \frac{3lx^2 - x^3}{6El_z}; \quad y_{ст} = -F \frac{l^3}{3El_z}.$$

Согласно (21.45) перемещение элемента балки $q dx$ будет

$$y_{x д} = f_{д} \frac{3lx^2 - x^3}{2l^3}. \quad (21.46)$$

Круговая частота собственных колебаний ω_0 системы по методу Рэлея определяется из рассмотрения баланса энергии системы.

Кинетическая энергия элемента стержня длиной dx с учетом (21.46) будет

$$dT = \frac{p}{2g} \left(\frac{df_{\text{д}}}{dt} \frac{3lx^2 - x^3}{2l^3} \right)^2 dx. \quad (21.47)$$

Кинетическая энергия балки равна

$$T_6 = \int_0^l \frac{p}{2g} \left(\frac{df_{\text{д}}}{dt} \frac{3lx^2 - x^3}{2l^3} \right)^2 dx. \quad (21.48)$$

Упругую балку с равномерно распределенным весом заменим безмассовой балкой, обладающей той же кинетической энергией, но нагруженной на конце балки приведенным весом $Q_{\text{п}}$. Кинетическая энергия приведенного веса будет

$$T_{\text{п}} = \frac{Q_{\text{п}}}{2g} \left(\frac{df_{\text{д}}}{dt} \right)^2. \quad (21.49)$$

Величину приведенного веса $Q_{\text{п}}$ определим, приравняв кинетическую энергию балки и кинетическую энергию приведенного веса, расположенного на конце балки:

$$\int_0^l \frac{p}{2g} \left(\frac{df_{\text{д}}}{dt} \frac{3lx^2 - x^3}{2l^3} \right)^2 dx = \frac{Q_{\text{п}}}{2g} \left(\frac{df_{\text{д}}}{dt} \right)^2. \quad (21.50)$$

Откуда

$$Q_{\text{п}} = \int_0^l p \left(\frac{3lx^2 - x^3}{2l^3} \right)^2 dx = \frac{33}{140} pl = \frac{33}{140} Q_6, \quad (21.51)$$

где $Q_6 = pl$ - вес балки.

Круговая частота собственных колебаний системы с учетом массы балки будет определяться как круговая частота собственных колебаний безмассовой консоли, нагруженной на конце

грузом $F + \frac{33}{140} Q_6$:

$$y_{\text{ст}} = \left(F + \frac{33}{140} Q_6 \right) \frac{l^3}{3El_z}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{y_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{3gEl_z}{\left(F + \frac{33}{140} Q_6 \right) l^3}}.$$

Точность рассмотренного метода достаточна для всех встречающихся в инженерной практике случаев. Максимальная ошибка не превышает 1,0 – 1,5 %.

21.6. Методы отстройки систем от резонанса

Возрастание амплитуды колебаний при резонансе заставляет конструкторов избегать в работе резонансных областей. Согласно исследованиям интенсивный рост амплитуды колебаний происходит в небольшом диапазоне изменения частоты возмущающей системы $\omega_b = (0,7 - \sqrt{2})\omega_0$, где ω_0 - собственная частота системы. В диапазонах частот $\omega_b \leq 0,7\omega_0$ и $\omega_b \geq \sqrt{2}\omega_0$ амплитуда колебаний практически не превышает значений при статической деформации.

Существует два метода предупреждения возможности появления нежелательных резонансных колебаний.

Первый метод наиболее эффективный и заключается в отстройке от резонанса системы путем соответствующего изменения частоты возмущающей силы или собственной частоты, чтобы между ними был определенный интервал. Изменять собственную частоту системы можно, меняя ее параметры. Так, внося конструктивные изменения, следует увеличить или уменьшить жесткость системы и ее массу. Обычно на практике исходят из требования, чтобы частота возмущающей силы по отношению к собственной частоте системы имела значения

$$\omega_b \leq 0,7\omega_0 \text{ и } \omega_b \geq \sqrt{2}\omega_0 = 1,41\omega_0. \quad (21.52)$$

Однако подобное требование не всегда можно осуществить, так как возмущающая сила может иметь широкий диапазон частот, например при работе двигателей внутреннего сгорания.

Второй метод заключается в увеличении демпфирования системы, применении специальных устройств - динамических гасителей колебаний с вязким сопротивлением, принцип действия которых основан на явлении антирезонанса - уменьшения за счет поглощения энергии амплитуды установившихся вынужденных колебаний системы в условиях резонанса. Применение демпферов особенно полезно, когда возмущающая сила имеет широкий диапазон частот или отстройка от резонанса требует больших конструктивных изменений.

Практически демпфирование не изменяет значения резонансных частот, но значительно уменьшает амплитуды в условиях резонанса. При большом сопротивлении понятие резонанса теряет смысл, так как динамический коэффициент представляет собой монотонно убывающую величину при возрастании частоты возмущающей силы. Определение собственных частот систем имеет исключительно важное значение для правильного выбора массы и жесткости системы, а также принятия мер по предупреждению нежелательных резонансных колебаний.

21.7. Условие прочности при колебаниях

Максимальные перемещения упругой системы при колебаниях определяются суммой

$$y_{\max} = y_{\text{ст}} + A_{\text{в}}, \quad (21.53)$$

где $y_{\text{ст}}$ - перемещение системы под действием статически приложенного веса F колеблющегося груза; $A_{\text{в}}$ - амплитуда вынужденных колебаний.

Согласно (21.33)

$$y_{\max} = y_{\text{ст}} + y_{\max}^{\text{ст}} K_{\text{д}} \quad (21.54)$$

Так как напряжения пропорциональны деформациям, то условие прочности при колебаниях запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ст}}^F + \sigma_{\text{ст}}^{F_{\text{в}}} K_{\text{д}} \leq [\sigma], \quad (21.55)$$

где $\sigma_{\text{ст}}^F$ - напряжение от статически приложенного веса F колеблющегося груза; $\sigma_{\text{ст}}^{F_{\text{в}}}$ - напряжение от статически приложенного амплитудного значения $F_{\text{в}}$ возмущающей силы; $[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

Следовательно, при колебаниях переменные напряжения от действия возмущающей силы, равные $\sigma_{\text{ст}}^{F_{\text{в}}} K_{\text{д}}$, накладываются на постоянные напряжения $\sigma_{\text{ст}}^F$ от веса колеблющегося груза.

Таким образом, при расчете на усталостную прочность имеет цикл напряжений с параметрами $\sigma_{\text{м}} = \sigma_{\text{ст}}^F$ и $\sigma_{\text{а}} = \sigma_{\text{ст}}^{F_{\text{в}}} K_{\text{д}}$.

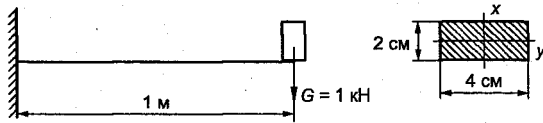


Рис. 21.13

Пример 21.1. Груз весом $G = 10 \text{ Н}$ подвешен на пружине, имеющей жесткость $C = 4 \text{ Н/см}$. Массой пружины пренебречь.

Решение. Вычислим статическую деформацию пружины под действием груза:

$$y_{\text{ст}} = G/C = 10/4 = 2,5 \text{ см.}$$

Частота свободных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{g/y_{\text{ст}}} = \sqrt{981/2,5} = 19,8 \text{ рад/с.}$$

Период свободных колебаний

$$T = 2\pi/\omega_0 = \frac{2 \cdot 3,14}{19,8} = 0,32 \text{ с.}$$

Пример 21.2. На конце консольной балки закреплен груз $G = 1 \text{ кН}$, сечение балки прямоугольное размером $4 \times 2 \text{ см}$. Определить частоту и период собственных колебаний балки (рис. 21.13).

Решение. Статический прогиб балки под действием груза

$$y_{\text{ст}} = \frac{Gl^3}{3El_z} = \frac{1000 \cdot 100^3 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 6 \cdot 2^3} = 6,2 \text{ см.}$$

Собственная круговая частота колебаний балки

$$\omega_0 = \sqrt{981/6,2} = 12,6 \text{ с}^{-1}.$$

Период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{12,6} = 0,498 \text{ с.}$$

Частота колебаний

$$\nu = 1/T = \omega_0/2\pi = 12,6/6,28 = 2 \text{ Гц.}$$

Пример 21.3. Определить собственную частоту крутильных колебаний вала диаметром $d = 2 \text{ см}$ и длиной $l = 100 \text{ см}$, несущее-

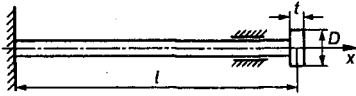


Рис. 21.14

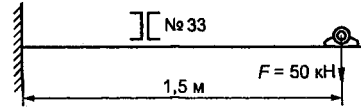


Рис. 21.15

го на конце диск диаметром $D = 60$ см и толщиной $t = 4$ см. Удельный вес металла $\gamma = 0,078$ Н/см³ (рис. 21.14).

Решение. Определяем момент инерции маховика относительно оси вращения, совпадающей с осью вала:

$$I_x = \frac{GD^2}{8g} = \frac{\pi D^2 \gamma D^2}{4 \cdot 8g} = \frac{3,14 \cdot 60^4 \cdot 4 \cdot 0,078}{4 \cdot 8 \cdot 981} = 40,4 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Коэффициент жесткости системы равен моменту, вызывающему угол закручивания вала в месте расположения диска, равный одному радиану:

$$C = \frac{m_k}{\varphi} = \frac{m_k G l_p}{m_k l} = \frac{G l_p}{l} = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 2^4}{32 \cdot 100} = 125\,600 \text{ Н} \cdot \text{см} / \text{рад}.$$

Собственная частота крутильных колебаний вала с диском

$$\omega_0 = \sqrt{C/I_x} = \sqrt{125\,600/40,4} = 55,8 \text{ рад/с}.$$

Пример 21.4. На конце консольной балки установлен двигатель весом $F = 50$ кН (рис. 21.15). Определить число оборотов двигателя, при котором наступит резонанс. Силы сопротивления и вес балки не учитывать.

Решение. Резонанс наступит тогда, когда выполнится равенство $\omega_0 = \omega_B$. Круговая частота вынужденных колебаний определяется скоростью вращения двигателя.

Статический прогиб балки от веса двигателя

$$y_{\text{ст}} = \frac{F l^3}{3EI_z} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 150^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 7980} = 0,176 \text{ см},$$

где по таблице сортамента $I_z = 2 \cdot 7980$ см⁴.

Критическая круговая частота

$$\omega_k = \omega_0 = \sqrt{g/y_{\text{ст}}} = \sqrt{981/0,176} = 74,6 \text{ рад/с}.$$

Критическое число оборотов двигателя

$$n_{кр} = 30 \frac{\omega_k}{\pi} = \frac{30 \cdot 74,6}{3,14} = 713 \text{ об/мин.}$$

Пример 21.5. По середине пролета из двух двутавровых балок длиной 3 м (рис. 21.16) установлен двигатель весом $F = 15 \text{ кН}$, делающий 2000 об/мин. Требуется подобрать номер двутавра, если центробежная сила инерции неуравновешенных вращающихся частей составляет $F_B = 1,5 \text{ кН}$, а также определить наибольшее напряжение, прогиб балки в сечении, где расположен двигатель.

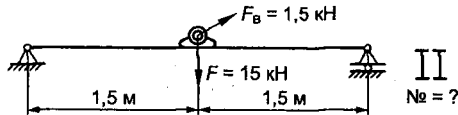


Рис. 21.16

Решение. Из условия отстройки от резонанса определяем необходимую собственную круговую частоту колебаний балки:

$$\omega_B \leq 0,7 \omega_0; \omega_0 = \omega_B / 0,7 = 1,43 \omega_0.$$

Частота вынужденных колебаний определяется частотой вращения двигателя:

$$\omega_B = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 2000}{30} = 209,3 \text{ рад/с.}$$

$$\text{Тогда } \omega_0 = 1,43 \cdot 209,3 = 299,3 \text{ рад/с.}$$

Статический прогиб балки от веса двигателя

$$y_{ст} = \frac{Fl^3}{48EI_z} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 300^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot I_z} = \frac{421,9}{I_z} \text{ см.}$$

Следовательно,

$$\omega_0 = \sqrt{g/y_{ст}} = \sqrt{\frac{981 \cdot I_z}{421,9}} = 299,3 \text{ рад/с.}$$

Откуда

$$I_z = \frac{299,3^2 \cdot 421,9}{981} = 38 \, 526 \text{ см}^4.$$

Осевой момент инерции одной двутавровой балки будет

$$I_z = I_z / 2 = 38\,526 / 2 = 19\,263 \text{ см}^4.$$

Из таблиц сортамента принимаем двутавр № 40:

$$I_z = 18\,930 \text{ см}^4; W_z = 947 \text{ см}^3.$$

Проверим собственную круговую частоту колебаний балки, так как двутавр № 40 имеет осевой момент инерции меньше требуемого:

$$y_{\text{ст}} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 300^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 18\,930} = 0,0111 \text{ см};$$

$\omega_0 = \sqrt{981/0,0111} = 297,3 \text{ рад/с}; \omega_b / \omega_0 = 209,3/297,3 = 0,73,$
что допустимо.

Проверим напряжения, возникающие в балке при колебаниях, по формуле (21.55). Напряжение от статически приложенного веса двигателя

$$\sigma_{\text{ст}}^F = \frac{M}{W_z} = \frac{Fl}{4W_z} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 300}{4 \cdot 2 \cdot 947} = 594 \text{ Н/см}^2 = 5,9 \text{ МПа}.$$

Напряжение от статически приложенного амплитудного значения возмущающей силы

$$\sigma_{\text{ст}}^{F_b} = \frac{F_b l}{4W_z} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 300}{4 \cdot 2 \cdot 947} = 59,4 \text{ Н/см}^2 = 0,59 \text{ МПа}.$$

Динамический коэффициент

$$K_d = \frac{1}{1 - (\omega_b / \omega_0)^2} = \frac{1}{1 - (209,3/297,3)^2} = 2,14.$$

Наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{ст}}^F + \sigma_{\text{ст}}^{F_b} K_d = 594 + 59,4 \cdot 2,14 = 721 \text{ Н/см}^2 = 7,2 \text{ МПа}.$$

В данном случае цикл напряжений имеет параметры $\sigma_m = 5,9 \text{ МПа}, \sigma_a = 1,26 \text{ МПа}.$

Согласно (21.54) прогиб балки в сечении под двигателем равен

$$y_{\text{max}} = y_{\text{ст}} + y_{\text{max}}^{\text{ст}} K_d = 0,0111 + 0,0011 \cdot 2,14 = 0,0135 \text{ см}.$$

Пример 21.6. Двигатель весом $F = 25$ кН, делающий $n = 540$ об/мин, установлен по середине двутавровой балки № 27 длиной $l = 3,0$ м. Центробежная сила инерции неуравновешенных вращающихся частей $F_B = 10$ кН. Найти амплитуду вынужденных колебаний, наибольшие динамические и максимальное напряжения в опасном сечении, а также построить цикл напряжений (рис. 21.17).

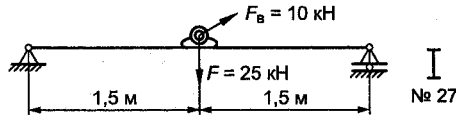


Рис. 21.17

Решение. Определяем частоту собственных колебаний:

$$y_{\text{ст}} = \frac{Fl^3}{48EI_z} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 300^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 5010} = 0,14 \text{ см.}$$

По таблице сортамента $I_z = 5010 \text{ см}^4$; $W_z = 371 \text{ см}^3$.

$$\omega_0 = \sqrt{g/y_{\text{ст}}} = \sqrt{981/0,14} = 83,7 \text{ рад/с.}$$

Частота вынужденных колебаний

$$\omega_B = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 540}{30} = 56,5 \text{ рад/с.}$$

Динамический коэффициент

$$K_d = \frac{1}{1 - (\omega_B/\omega_0)^2} = \frac{1}{1 - (56,5/83,7)^2} = 1,84.$$

Амплитуда вынужденных колебаний, согласно (21.33), будет

$$A_B = y_{\text{ст}}^{\text{ст}} K_d = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 300^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 5010} \cdot 1,84 = 0,056 \cdot 1,84 = 0,103 \text{ см.}$$

Напряжение от статически приложенного веса двигателя

$$\sigma_{\text{ст}}^F = \frac{Fl}{4W_z} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 300}{4 \cdot 371} = 5054 \text{ Н/см}^2 = 50,5 \text{ МПа.}$$

Напряжение от статически приложенного амплитудного значения возмущающей силы

$$\sigma_{\text{ст}}^F = \frac{F_B l}{4W_z} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 300}{4 \cdot 371} = 2022 \text{ Н/см}^2 = 20,2 \text{ МПа.}$$

Наибольшее динамическое напряжение

$$\sigma_{\text{д max}} = \sigma_{\text{ст}}^F K_d = 2022 \cdot 1,84 = 3720,5 \text{ Н/см}^2 = 37,2 \text{ МПа.}$$

Наибольшее и наименьшее напряжения цикла:

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{ст}}^F + \sigma_{\text{ст}}^F K_d = 5054 + 2022 \cdot 1,84 = 8774 \text{ Н/см}^2 = 87,7 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{\text{min}} = \sigma_{\text{ст}}^F - \sigma_{\text{ст}}^F K_d = 5054 - 2022 \cdot 1,84 = 1334 \text{ Н/см}^2 = 13,3 \text{ МПа.}$$

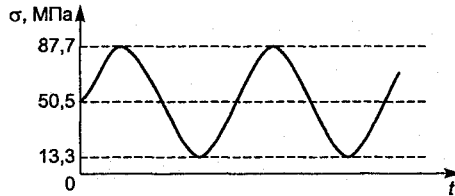


Рис. 21.18

Цикл напряжений показан на рис. 21.18.

Пример 21.7. Определить критическую скорость движения железнодорожного вагона, имеющего общий вес с грузом $F = 100$ кН. Вагон установлен на четырех рессорах; жесткость каждой рессоры $C = 47\,000$ Н/см. Длина рельса $l = 8$ м.

Решение. Определяем период свободных колебаний вагона:

$$y_{\text{ст}} = F/C = 100\,000/47\,000 = 2,13 \text{ см;}$$

$$T = 2\pi\sqrt{y_{\text{ст}}/g} = 2 \cdot 3,14\sqrt{2,13/981} = 0,293 \text{ с.}$$

Период возмущающей силы равен времени прохождения вагоном длины рельса:

$$T_B = l/v = 8,0/v \text{ с.}$$

Критическая скорость наступит тогда, когда $T = T_B$.

$$v_{\text{кр}} = 8/0,293 = 27,3 \text{ м/с} = 98,3 \text{ км/ч.}$$

Пример 21.8. Найти жесткость рессоры железнодорожного вагона, имеющего общий вес с грузом 85 кН, чтобы он мог двигаться со скоростью 120 км/час, не входя в резонанс с толчками на стыках рельсов, длина которых $l = 12$ м.

Решение. Определяем круговую частоту свободных колебаний вагона

$$\omega_0 = \sqrt{981/y_{\text{ст}}} \text{ рад/с.}$$

Период возмущающей силы равен

$$T_{\text{в}} = l/v = 12/33,3 = 0,36 \text{ с,}$$

где $v = 120\,000/3600 = 33,3$ м/с.

Круговая частота возмущающей силы

$$\omega_{\text{в}} = 2\pi/T = \frac{2 \cdot 3,14}{0,36} = 17,4 \text{ рад/с.}$$

Из условия отстройки от резонанса получим

$$17,4 = 0,7 \sqrt{981/y_{\text{ст}}}.$$

Откуда

$$y_{\text{ст}} = \frac{0,7^2 \cdot 981}{17,4^2} = 2,32 \text{ см.}$$

Жесткость рессоры

$$C = \frac{F}{4y_{\text{ст}}} = \frac{85\,000}{4 \cdot 2,32} = 9160 \text{ Н/см} = 9,2 \text{ кН/см.}$$

21.8. Колебания систем с несколькими степенями свободы

Во всех предыдущих примерах мы рассматривали системы, имеющие только одну степень свободы. Было показано фундаментальное значение частоты собственных колебаний, в зависимости от которой определяется возможность появления резонанса и величина напряжений при вынужденных колебаниях.

На практике постоянно встречаются системы с несколькими колеблющимися массами, являющиеся системами с несколькими степенями свободы. Определение частот собственных колебаний таких систем – трудоемкая операция, требующая больших вычислительных работ. Поэтому в инженерной

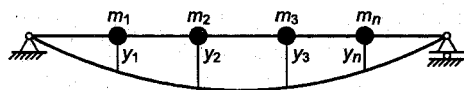


Рис. 21.19

практике более предпочтительным является приближенное решение, основанное на методе Рэлея.

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из балки, расположенной на двух опорах, с n закрепленными на ней массами, при этом может быть включена и масса самой балки (рис. 21.19).

Полагаем, что колебания всех масс происходят с одной частотой и находятся в одной фазе. Тогда можно принять, что закон движения i -й массы с координатой x_i в функции времени происходит по синусоидальному закону и описывается уравнением

$$y_i = a_i \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где ω_0 – частота свободных колебаний системы основной формы.

Будем считать, что кинетическая энергия системы обуславливается только поступательными перемещениями масс, а потенциальная энергия – только изгибом балки.

Скорость i -й массы получим, взяв производную по времени от y_i :

$$y'_i = a_i \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Максимальная скорость $y'_{\max} = a_i \omega_0$ имеет место в момент прохождения массами положения равновесия, когда $y_i = 0$.

Кинетическая энергия, соответствующая максимальной скорости,

$$T = \frac{\omega_0^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i a_i^2, \quad (21.56)$$

где a_i – амплитуда перемещения сечения балки в месте расположения массы m_i .

Потенциальная энергия деформации изгиба балки в положении равновесия равна нулю и имеет максимальное значение

в момент наибольшего отклонения системы от положения равновесия, когда кинетическая энергия равна нулю.

Выразим максимальное значение потенциальной энергии системы через U .

Приравняв, согласно закону сохранения энергии, выражение (21.56) величине потенциальной энергии U , получим

$$\frac{\omega_0^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i a_i^2 = U.$$

Откуда найдем основную формулу Рэлея для квадрата круговой частоты собственных колебаний системы:

$$\omega_0^2 = \frac{2U}{\sum_{i=1}^n m_i a_i^2}. \quad (21.57)$$

Чтобы подсчитать по формуле (21.57) частоту, нужно предполагать формой упругой линии балки. Поскольку точная форма упругой линии неизвестна, то по методу Рэлея определится круговая частота для упругой линии, приближающейся к точной. Однако, как показывают расчеты, частота, определенная по приближенной упругой линии, мало отличается от своего точного значения.

При выборе кривой упругой линии необходимо стремиться отразить, пусть приближенно, основную форму колебаний, а также обеспечить граничные условия (обычно это условия на опорах).

Задавшись формой упругой линии, найдем значение максимальной потенциальной энергии деформации изгиба балки при наибольшем отклонении:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z (y'')^2 dx. \quad (21.58)$$

В этом случае формула (21.57) принимает вид

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l EI_z (y'')^2 dx}{\sum_{i=1}^n m_i a_i^2}. \quad (21.59)$$

Часто на практике при пользовании формулой (21.58) задаются статической нагрузкой, соответствующей приложенным массам, и определяют форму упругой линии, которую затем принимают за основную форму колебаний. В этом случае потенциальная энергия деформации изгиба определится через работу внешних сил:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i y_i = \frac{1}{2} g \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad (21.60)$$

где y_i - прогибы под силами F_i .

Тогда формула (21.57) будет

$$\omega_0^2 = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i a_i^2}. \quad (21.61)$$

Полученные формулы справедливы и для других видов нагружения: кручения, растяжения, сжатия.

Пример 21.9. Определить круговую частоту собственных колебаний двутавровой балки № 12, лежащей на двух опорах, с закрепленными на ней четырьмя одинаковыми грузами массой $m=300$ кг (рис. 21.20).

Решение. Примем, что упругая линия при колебаниях представляет собой синусоидальную кривую и описывается уравнением

$$y = A \sin \frac{\pi}{l} x,$$

где $A = 0,3$ см - амплитуда определена как прогиб в середине пролета при статическом действии нагрузки, соответствующей приложенным массам, по способу Верещагина.

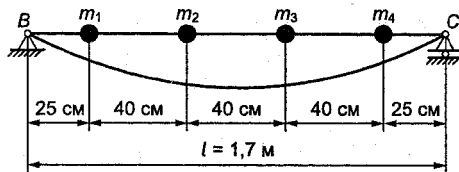


Рис. 21.20

Проверяем выполнение граничных условий:

при $x = 0, y_B = 0; x = l, y_C = 0$ - прогиб на опорах отсутствует;

при $x = 0, y_B'' = 0; x = l, y_C'' = 0$ - изгибающий момент на опорах отсутствует;

при $x = 0, y_B' \neq 0; x = l, y_C' \neq 0$ - угол поворота на опорах не равен нулю;

при $x = 0, y_B''' \neq 0; x = l, y_C''' \neq 0$ - поперечная сила на опорах не равна нулю.

Таким образом, граничные условия выполняются.

Вычислим числитель в формуле (21.59):

$$\int_0^l EI_z (y'')^2 dx = EI_z \int_0^l \left(-\frac{A\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x \right)^2 dx = EI_z \int_0^l \frac{A^2 \pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx =$$
$$\frac{A^2 \pi^4 EI_z}{l^4} \left(x - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{l} x \right) \Big|_0^l = \frac{A^2 \pi^4 EI_z}{2l^3} = \frac{0,3^2 \cdot 3,14^4 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 198}{2 \cdot 170^3} =$$

$$= 3526 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Вычислим величины перемещений сечений балки в местах расположения масс:

$$y_1 = a_1 = 0,3 \sin \left(\frac{\pi}{170} \cdot 25 \right) = 0,134 \text{ см};$$

$$y_2 = a_2 = 0,3 \sin \left(\frac{\pi}{170} \cdot 65 \right) = 0,280 \text{ см};$$

$$y_3 = a_3 = 0,3 \sin \left(\frac{\pi}{170} \cdot 105 \right) = 0,280 \text{ см};$$

$$y_4 = a_4 = 0,3 \sin \left(\frac{\pi}{170} \cdot 145 \right) = 0,134 \text{ см}.$$

Вычислим знаменатель формулы (21.59)

$$\sum_{i=1}^4 m a_i^2 = m (0,134^2 + 0,280^2 + 0,280^2 + 0,134^2) =$$

$$= 0,1927 \cdot 300 = 57,8 \text{ кг}\cdot\text{см}.$$

Подставляя величины в (21.59), находим круговую частоту свободных колебаний системы:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3526 \cdot 100}{57,8}} = 78 \text{ рад/с.}$$

Глава 22

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

22.1. Основные понятия

Рассмотренные ранее методы расчета элементов конструкций независимо от вида нагружения предполагали, что материал при действующих нагрузках подчиняется закону Гука. Однако на практике встречается круг задач, когда при действии нагрузок в элементах конструкции возникают пластические деформации и закон Гука становится неприменимым. Для решения таких задач необходимо располагать зависимостью между напряжениями и деформациями за пределом пропорциональности, получаемой экспериментальным путем из диаграммы растяжения или сжатия материала. Отсюда в соответствии с классом решаемых задач определились два метода расчета элементов конструкций на прочность: а) *по допускаемым напряжениям, когда деформация находится в пределах упругой зоны*; б) *по предельным нагрузкам или предельному состоянию, когда возникают пластические деформации*. В последнем случае пригодность конструкции оценивается по величине возникающих перемещений или по величине предельной нагрузки.

При расчетах по допускаемым напряжениям расчетные напряжения в опасном сечении, в опасной точке сравниваются с допускаемыми напряжениями для данного материала и, если они не превышают допускаемых напряжений, то прочность элемента конструкции считается обеспеченной. Таким образом, в этом методе предельным состоянием элемента конструкции является такое состояние, при котором наибольшее напря-

жение, хотя бы в одной точке, равнялось опасному – пределу текучести для пластичного материала или пределу прочности – для хрупкого. Но напряжения в отдельных точках, равные пределу текучести, не являются опасными для всей конструкции, которая при появлении местных пластических деформаций может еще сопротивляться внешним воздействиям и удовлетворять предъявляемым к ней эксплуатационным требованиям. Для исчерпания конструкцией несущей способности требуется дальнейшее увеличение нагрузки. Следовательно, расчет по допускаемым напряжениям не позволяет полностью использовать несущую способность конструкции, приводит к увеличению ее материалоемкости.

Расчет по предельным нагрузкам дает возможность более полно использовать несущую способность конструкции, тем самым достигнуть снижения ее материалоемкости.

Расчеты по предельным нагрузкам широко применяются при проектировании строительных конструкций из пластичных материалов при статическом нагружении. В последнее время они начинают также использоваться в расчетах машиностроительных конструкций.

Под *предельной нагрузкой* $F_{пр}$ будем понимать такую нагрузку, при которой конструкция перестает удовлетворять предъявляемым к ней эксплуатационным требованиям, т.е. теряет способность сопротивляться внешним воздействиям или получает недопустимые искажения геометрической формы за счет возникновения больших пластических деформаций.

Под *опасной нагрузкой* F_T будем понимать нагрузку, при которой напряжение в опасном сечении, в опасной точке равняется предельному – пределу текучести для пластичного материала или пределу прочности для хрупкого материала. Таким образом, при опасной нагрузке F_T несущая способность конструкции не исчерпывается, так как напряжения только в отдельных точках элемента достигнут предельных, а в остальной массе материала они будут меньше.

Величины предельной и опасной нагрузок определяются особенностями конструкции. Отношение предельной нагрузки к опасной $F_{пр}/F_T$ показывает возможность увеличения нагрузки на конструкцию. Отношение предельной нагрузки к рабочей называется **коэффициентом безопасности конструкции по предельной нагрузке**:

$$F_{\text{пр}} / F = n, \quad (22.1)$$

где $F_{\text{пр}}$ и F - соответственно предельная и действующая на конструкцию нагрузки; n - действительный коэффициент безопасности конструкции.

Рассмотрим консольную балку, нагруженную опасной нагрузкой F_T (рис. 22.1).

В этом случае напряжения только в верхних и нижних точках опасного сечения $B-B$ в защемлении будут равняться пределу текучести. Во всех остальных точках сечения напряжения будут меньше σ_T . Несущая способность конструкции будет исчерпана при нагрузке $F_{\text{пр}} > F_T$, при которой напряжения во всех точках сечения $B-B$ станут равными σ_T . Величина нагрузки $F_{\text{пр}}$ является предельной для данной конструкции.

При расчете по предельным нагрузкам, так как пластические деформации принимаются малыми, при составлении уравнений равновесия можно пользоваться **принципом неизменности начальных размеров**, т.е. принимать, что пластически деформированная система не отличается от недеформированной. Наоборот, пользоваться принципом независимости действия сил нельзя, так как при изменении порядка приложения сил деформации системы будут различными (рис. 22.2).

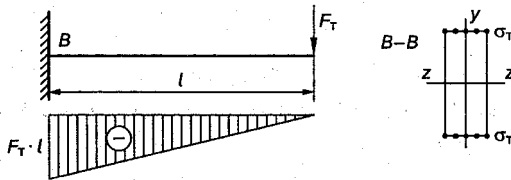


Рис. 22.1

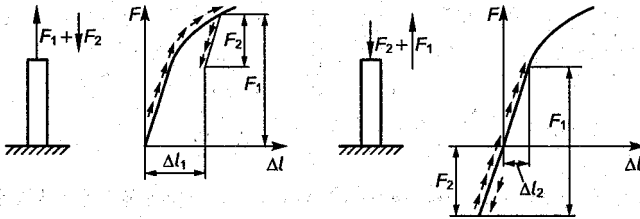


Рис. 22.2

На рис. 22.2 показаны величины удлинения стержня при прямой и обратной последовательности приложения сил F_1 и F_2 , причем сила F_1 по величине больше силы F_2 и достаточна, чтобы вызвать в стержне пластические деформации. Сравнивая удлинения стержня, видим, что $\Delta l_1 > \Delta l_2$, т.е. величина удлинения зависит от порядка приложения сил.

Если деформации не выходят за предел текучести, то результаты расчетов по допускаемым напряжениям и предельным нагрузкам совпадают и коэффициенты безопасности будут иметь одинаковые значения по обоим методам расчета.

Если деформации выходят за пределы упругости, то зависимость между напряжениями и деформациями становится нелинейной, результаты расчета по допускаемым напряжениям и предельным нагрузкам будут различными. Следует отметить, что возникающая в элементе конструкции за пределом упругости деформация является суммой чисто пластической, необратимой деформации и упругой деформации, исчезающей после снятия нагрузки. Такие деформации принято называть **упруго-пластическими**.

22.2. Схематизация диаграмм растяжения материалов

При расчете по предельным нагрузкам действительная диаграмма $\sigma = f(\epsilon)$ растяжения заменяется схематизированной. Схематизация диаграммы производится различными способами в зависимости от ее вида. На рис. 22.3 представлены типичные экспериментальные диаграммы растяжения для малоуглеродистых сталей (рис. 22.3, а), алюминия (рис. 22.3, б), чугуна (рис. 22.3, в), легированных сталей (рис. 22.3, г).

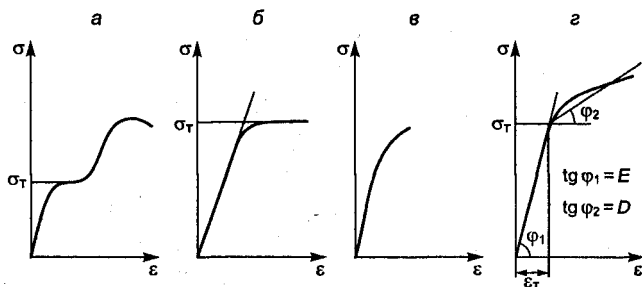


Рис. 22.3

Наиболее распространенным способом схематизации является замена участков диаграммы прямыми линиями.

Диаграммы для таких пластичных материалов, как малоуглеродистая сталь, алюминий, имеющих площадку текучести, могут быть представлены двумя прямыми линиями, проведенными на участке линейной упругости и через площадку текучести (см. рис. 22.3, а и б). В этом случае до предела текучести, принимаемого равным пределу пропорциональности ($\sigma_T = \sigma_P$), имеет место линейная зависимость между напряжениями и деформациями, а дальше напряжение становится равным пределу текучести и не зависит от деформации. Полученная схематизированная диаграмма называется **диаграммой идеальной пластичности** или **диаграммой Прандтля**³⁴. Материалы, свойства которых характеризуется подобной диаграммой, называются **идеально пластичными, не упрочняющимися**.

Диаграмма Прандтля считается симметричной для растяжения и сжатия относительно начала координат.

Из диаграммы идеальной пластичности следует, что при достижении в какой-либо точке элемента конструкции напряжения, равного пределу текучести, рост напряжений в этой точке прекращается, независимо от увеличения нагрузки, действующей на конструкцию. За предельную нагрузку при использовании такой диаграммы принимается нагрузка, при действии которой конструкция перестает сопротивляться возрастанию нагрузки, превращаясь в кинематически изменяемую систему. Диаграммы растяжения легированных сталей, не имеющие площадок текучести, также могут быть представлены в виде двух прямых (см. рис. 22.3, в). Уравнения участков будут:

$$\text{при } \varepsilon \leq \varepsilon_T \quad \sigma = E \cdot \varepsilon; \quad (22.2)$$

$$\text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_T \quad \sigma - \sigma_T = D \cdot (\varepsilon - \varepsilon_T),$$

где ε_T - деформация, соответствующая условному пределу текучести; E и D - модуль продольной упругости и модуль упрочнения, соответственно, представляющие собой угловые коэффициенты прямых; σ_T - условный предел текучести.

Величина D обычно много меньше E . Материалы, свойства которых описываются такой диаграммой, называются **идеально пластичными с упрочнением**. Для таких материалов, как чугун, отожженная медь и других, имеющих незначительный линейный участок, диаграмму удобно представлять аналитическими функциями. Первым аналитическим выражением для аппрок-

симации диаграмм был степенной закон, предложенный в 1729 г. Г.Б. Бюльфингером³⁵

$$\sigma = A\varepsilon^k, \quad (22.3)$$

где A - константа, имеющая размерность напряжения; k - показатель степени, безразмерная величина.

Достоинство формулы в ее простоте, в достаточной точности аппроксимации опытных кривых при больших деформациях, в ее универсальности. Так, при $k = 1$ и $A = E$ имеем закон Гука. Недостатком формулы является плохая аппроксимация опытных диаграмм при малых деформациях (при $\varepsilon = 0$; $A = E = \infty$).

Показатель степени k часто представляет собой дробное число, поэтому решение получается в виде системы нелинейных алгебраических уравнений с дробными показателями. Постоянные A и k подбираются из условий, чтобы пределы прочности и удельные энергии деформации по экспериментальной диаграмме и аппроксимирующей кривой были равны. Зависимость (22.3) находит широкое применение при решении задач ползучести. Позже рядом ученых - Ф. Герстером, Сен-Венаном, С.С. Соколовским и другими были также предложены аппроксимации, на которых мы останавливаться не будем из-за их узкого, специального применения. В отдельных случаях можно пренебречь упругими деформациями по сравнению с пластическими. Схематизированная диаграмма будет иметь следующий вид (рис. 22.4).

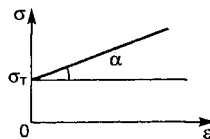


Рис. 22.4

До напряжения σ_T тело считается жестким, при $\sigma > \sigma_T$ - пластичным. Материал с такими свойствами называется **жестко-пластичным с упрочнением**. В дальнейшем ограничимся рассмотрением некоторых примеров расчета по предельной нагрузке конструкций из пластичных материалов, диаграмма растяжения которых схематизируется диаграммой Прандтля при действии статической нагрузки.

22.3. Растяжение и сжатие стержневых систем при наличии пластических деформаций

В *статически определимых* системах, элементы которых работают на растяжение или сжатие, предельная нагрузка определяется появлением пластических деформаций в любом одном элементе системы, так как в этом случае конструкция теря-

ет способность сопротивляться нагрузке и превращается в кинематически изменяемую систему. Поэтому у *статически определимых систем* расчет по предельным нагрузкам будет совпадать с расчетом по допускаемым напряжениям.

В *статически неопределимых* системах при возникновении пластических деформаций в одном элементе происходит перераспределение усилий между остальными стержнями. Как только в каком-либо элементе напряжения достигнут предела текучести, увеличение нагрузки вызовет быстрое возрастание напряжений в других стержнях. Предельная нагрузка статически неопределимой системы определяется таким предельным состоянием, когда вследствие развития пластических деформаций она теряет несущую способность и превращается в кинематически изменяемую систему.

Величина предельной нагрузки находится из условия равновесия системы, которое составляется для всех возможных вариантов потери конструкцией несущей способности. Наименьшая величина нагрузки принимается за предельную нагрузку $F_{пр}$ для данной конструкции.

Определим предельную нагрузку $F_{пр}$ для симметричной системы, состоящей из трех стержней, нижние концы которых соединены общим шарниром. Диаграмма растяжения материала схематизируется диаграммой Прандтля (рис. 22.5).

При малых значениях силы F во всех стержнях системы возникают упругие деформации. Усилия в стержнях определяются известными методами раскрытия статической неопределимости и будут равны

$$N_1 = N_3 = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad N_2 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad (22.4)$$

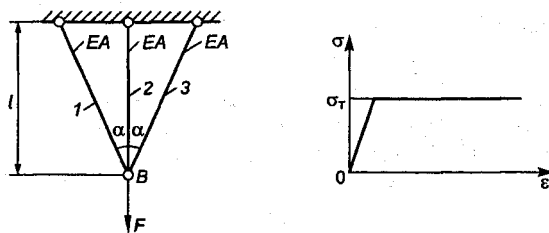


Рис. 22.5

где N_1 и N_3 - нормальная сила в стержнях 1 и 3; N_2 - нормальная сила в стержне 2.

Вычисленные значения усилий в стержнях будут сохраняться до тех пор, пока в наиболее нагруженном среднем стержне не возникнут пластические деформации. После наступления пластических деформаций, напряжение в среднем стержне, согласно диаграмме, сохраняется равным σ_T , а усилие остается постоянным:

$$N_2 = \sigma_T A.$$

Опасная нагрузка для конструкции определяется из (22.4):

$$F_T = A\sigma_T(1 + 2\cos^3\alpha). \quad (22.5)$$

Усилия в боковых стержнях найдутся при рассмотрении системы, как статически определимой, из условия равновесия узла B (рис. 22.6, а):

$$\sum Y = 0; \quad N_1 = N_3 = \frac{F - \sigma_T A}{2\cos\alpha}. \quad (22.6)$$

Несущая способность системы будет полностью исчерпана, когда во всех трех стержнях напряжения станут равными пределу текучести:

$$N_1 = \sigma_T A; \quad N_2 = \sigma_T A; \quad N_3 = \sigma_T A.$$

Предельная нагрузка $F_{пр}$ определится как сумма вертикальных составляющих трех сил и будет равна (рис. 22.6, б)

$$F_{пр} = \sigma_T A(1 + 2\cos\alpha). \quad (22.7)$$

К системе не может быть приложена сила больше предельного значения $F_{пр}$, так как она превращается в кинематически изменяемую, для которой условия равновесия не выполняются. Изменение усилий N_1, N_2, N_3 в зависимости от величины силы F показано на рис. 22.6, в.

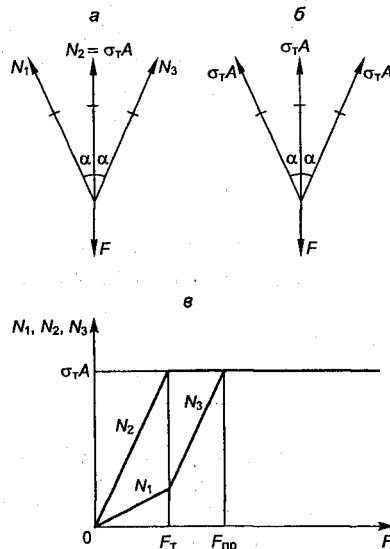


Рис. 22.6

Отношение предельной нагрузки $F_{\text{пр}}$ к опасной F_T показывает возможность увеличения нагрузки на конструкцию. Например, если принять $\alpha = 30^\circ$, получим

$$\frac{F_{\text{пр}}}{F_T} = \frac{(1+2\cos 30^\circ)}{(1+2\cos^3 30^\circ)} = 1,19,$$

т.е. нагрузка может быть увеличена на 19 %.

В качестве следующего примера определим предельную нагрузку для несимметричной конструкции из трех стержней, соединенных внизу общим шарниром. Диаграмма растяжения материала схематизируется диаграммой Прандтля (рис. 22.7).

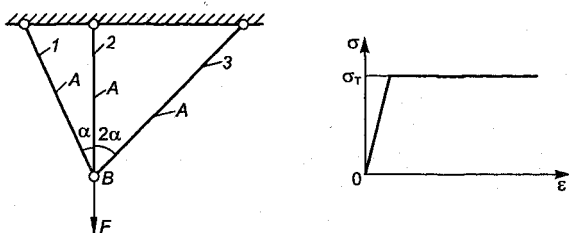


Рис. 22.7

Положим, что в предельном состоянии напряжения во всех стержнях равны пределу текучести σ_T и усилия в стержнях равны

$$N_1 = \sigma_T A; N_2 = \sigma_T A; N_3 = \sigma_T A.$$

Рассмотрим равновесие узла B (рис. 22.8, а).

Из уравнения проекций сил на ось x следует:

$$-\sigma_T A \sin \alpha + \sigma_T A \sin 2\alpha \neq 0,$$

так как

$$\sin \alpha \neq \sin 2\alpha.$$

Следовательно, при сделанном допущении шарнир не находится в равновесии, т.е. во всех трех стержнях напряжения одновременно не могут быть равны пределу текучести σ_T .

Появление в стержнях пластических деформаций постепенно уменьшает степень статической неопределимости системы, превращая конструкцию в статически определимую. Поэтому несущая способность системы будет исчерпана, когда в каких-либо двух стержнях напряжения достигнут предела текучести. Возможны следующие варианты:

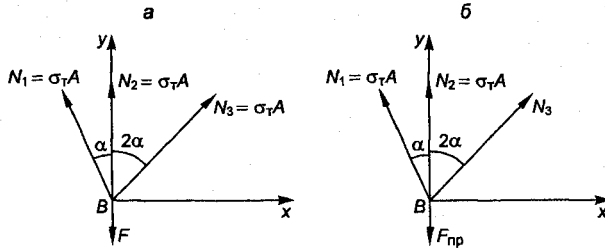


Рис. 22.8

- а) напряжения в 1-м и 3-м стержнях равны σ_T ;
- б) напряжения во 2-м и 3-м стержнях равны σ_T ;
- в) напряжения в 1-м и 2-м стержнях равны σ_T .

Анализ каждого из вариантов показывает, что равновесие узла возможно только для третьего случая, когда в 1-м и 2-м стержнях напряжения равны σ_T , а в 3-м - они меньше (см. рис. 22.8, б).

Спроектировав все силы на ось x , получим

$$\sigma_T A \sin \alpha + N_3 \sin 2\alpha = 0.$$

Откуда найдем усилие N_3 в 3-м стержне:

$$N_3 = \sigma_T A \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha}. \quad (22.8)$$

Предельная нагрузка определяется, как сумма проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\begin{aligned} F_{np} &= \sigma_T A \cos \alpha + \sigma_T A + \sigma_T A \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} \cos 2\alpha = \\ &= \sigma_T A (1 + \cos \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \sin \alpha). \end{aligned} \quad (22.9)$$

Изменение усилий N_1 , N_2 , N_3 в зависимости от силы F показано на рис. 22.9.

Рассмотренные примеры показывают, что расчет статически неопределимых систем по предельной нагрузке не требует раскрытия статической неопределимости систе-

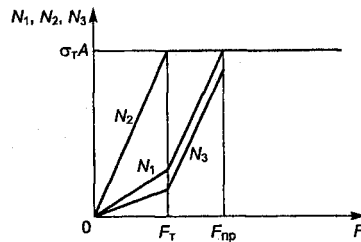


Рис. 22.9

мы и может быть выполнен с помощью уравнений равновесия статики, как для статически определимых систем. Допускаемая предельная нагрузка будет равняться предельной нагрузке, деленной на требуемый коэффициент безопасности:

$$[F] = F_{\text{пр}} / [n],$$

где $[n]$ - нормативный коэффициент безопасности, равный 1,7-2,5.

22.4. Уруго-пластическое кручение

При кручении прямого бруса круглого поперечного сечения в упругой области в поперечных сечениях возникают касательные напряжения, изменяющиеся по линейному закону вдоль радиуса. Наибольшее значение они имеют на контуре сечения и равны нулю в центре тяжести (рис. 22.10, а).

Напряжения в произвольной точке B сечения и на контуре сечения вычисляются по формулам

$$\tau_B = \frac{T\rho}{I_\rho}; \quad \tau_{\text{max}} = \frac{T}{W_\rho},$$

где I_ρ - полярный момент инерции сечения; W_ρ - полярный момент сопротивления.

С увеличением крутящего момента касательные напряжения растут пропорционально расстоянию точек сечения от оси стержня до тех пор, пока напряжения на контуре τ_{max} не достигнут значения τ_T - предела текучести при сдвиге. Пусть в условиях упруго-пластического кручения диаграмма сдвига материала, т.е. зависимость между касательным напряжением τ и углом сдвига γ , схематизируется диаграммой Прандтля (рис. 22.10, б).

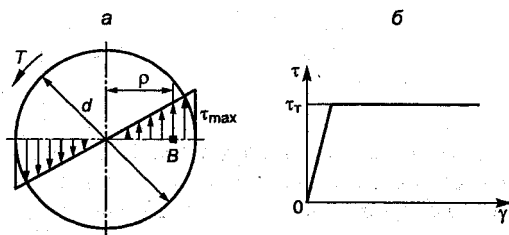


Рис. 22.10

Величина опасного крутящего момента будет равна:

$$T_T = \tau_T W_\rho = \tau_T \frac{\pi d^3}{16}, \quad (22.10)$$

где d – диаметр сечения.

При увеличении крутящего момента выше T_T напряжения, равные пределу текучести τ_T , возникнут в некоторой наиболее удаленной от оси области сечения в форме кольца (рис. 22.11, а), в остальных точках, образующих упругое ядро, напряжения будут меньше τ_T .

Таким образом, часть материала будет находиться в зоне пластических деформаций, а часть – в зоне упругих деформаций. В упругом ядре напряжения распределяются по линейному закону, в зоне пластических деформаций – равномерно.

При предельном значении крутящего момента $T_{пр}$ пластическая зона распространится на всю площадь поперечного сечения, а напряжения во всех точках сечения станут равными τ_T (рис. 22.11, б). В этом случае несущая способность стержня полностью исчерпывается, так как он может закручиваться без увеличения крутящего момента.

Выделим в сечении элементарную площадку в виде кольца шириной $d\rho$. Величина предельного крутящего момента

$$T_{пр} = \int_0^{d/2} 2\pi\rho r \tau_T d\rho = 2\pi\tau_T \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^{d/2} = \frac{\pi d^3}{12} \tau_T = \tau_T W_{\rho T}, \quad (22.11)$$

где $W_{\rho T} = \frac{\pi d^3}{12}$ – пластический полярный момент сопротивления.

Сравнивая $T_{пр}$ и T_T , получаем

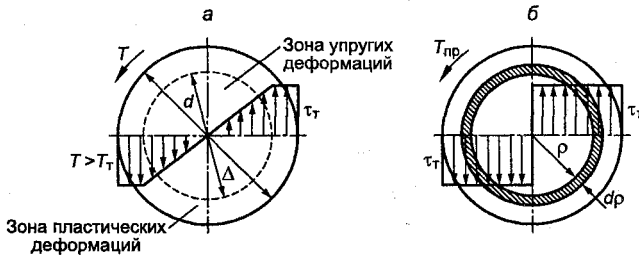


Рис. 22.11

$$\frac{T_{\text{пр}}}{T_T} = \frac{\pi d^3 \tau_T \cdot 16}{12 \pi d^3 \tau_T} = \frac{4}{3} \quad \text{или} \quad T_{\text{пр}} = \frac{4}{3} T_T = 1,33 T_T.$$

Таким образом, так как пластические деформации с ростом момента постепенно распространяются от крайних точек сечения к оси, то расчет по предельной нагрузке позволяет более рационально использовать материал даже в статически определенных системах.

Допускаемый крутящий момент находится делением предельного момента на коэффициент безопасности:

$$[T] = T_{\text{пр}} / [n],$$

где $[n]$ - нормативный коэффициент безопасности.

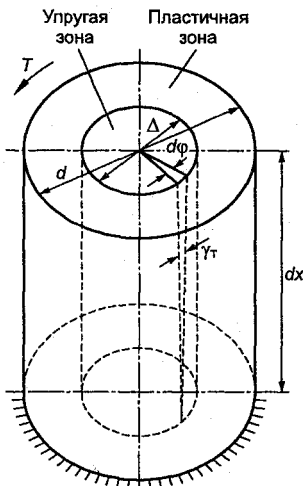


Рис. 22.12

Определим угол закручивания при наличии в сечении пластической и упругой зон, когда крутящий момент T на участке больше T_T , но меньше $T_{\text{пр}}$. Принимая справедливой гипотезу плоских сечений, получаем (рис. 22.12):

$$\frac{\Delta}{2} d\varphi = \gamma_T dx, \quad (22.12)$$

где Δ - диаметр упругой зоны; $d\varphi$ - угол закручивания в упругой зоне;

γ_T - угол сдвига в упругой зоне.

В пластической зоне зависимость угла закручивания и угла сдвига от крутящего момента определяются законами пластической деформации материала.

Из (22.12) находим

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma_T}{\Delta/2} = \frac{\tau_T}{G(\Delta/2)}. \quad (22.13)$$

Выразим предел текучести τ_T при сдвиге через опасный крутящий момент T_T :

$$\tau_T = \frac{T_T(d/2)}{I_\rho} \quad (22.14)$$

Подставляя (22.14) в (22.13), получим

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T_T(d/2)}{I_\rho G(\Delta/2)} = \frac{T_T d}{I_\rho G \Delta}$$

Откуда

$$d\varphi = \frac{T_T d}{I_\rho G \Delta} dx \quad (22.15)$$

При $T_T = \text{const}$ и $G I_\rho = \text{const}$ на участке будем иметь

$$\varphi = \frac{T_T dl}{I_\rho G \Delta} \quad (22.16)$$

где l – длина участка.

Из формулы (22.16) следует, что если $\Delta = d$, т.е. в поперечном сечении отсутствует пластическая зона, то получаем известную формулу угла закручивания для вала, работающего в пределах закона Гука; если $\Delta = 0$, то угол $\varphi = \infty$, т.е. стержень теряет способность сопротивляться возрастающему крутящему моменту. В этом случае крутящий момент равняется предельному значению.

22.5. Упруго-пластический изгиб

При изгибе балки в упругой области нормальные напряжения в поперечных сечениях распределяются по линейному закону: на нейтральной оси они равны нулю и имеют наибольшее значение σ_{\max} в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения (рис. 22.13) и представим, что диаграмма растяжения материала схематизируется диаграммой Прандтля.

Когда изгибающий момент достигнет определенной величины, нормальные напряжения в крайних точках сечения примут значения, равные пределу текучести σ_T материала при растяжении. Распределение напряжений по сечению показано на рис. 22.13, а.

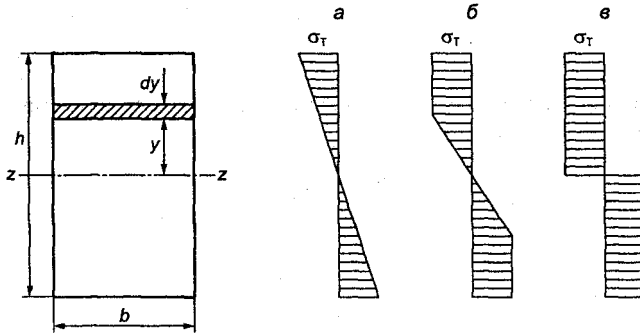


Рис. 22.13

Величина опасного изгибающего момента

$$M_T = \sigma_T W_z = \sigma_T \frac{bh^2}{6}, \quad (22.17)$$

где W_z - осевой момент сопротивления.

При возрастании изгибающего момента выше M_T напряжения, равные пределу текучести σ_T , возникнут в наиболее удаленных от нейтральной оси зонах сечения, в остальных точках, расположенных ближе к оси, напряжения будут меньше σ_T (рис. 22.13, б). Таким образом, одна часть материала будет испытывать пластические деформации, другая - в средней части сечения - упругие. При предельном значении изгибающего момента $M_{пр}$ пластические деформации распространяются на всю площадь поперечного сечения, а напряжения во всех точках сечения будут равны пределу текучести при растяжении σ_T (рис. 22.13, в). В этом состоянии несущая способность балки будет полностью исчерпана, так как в сечении образуется так называемый *пластический шарнир*, позволяющий частям балки свободно поворачиваться относительно друг друга. Образование пластического шарнира превращает конструкцию в механизм.

Выделим в сечении элементарную площадку $dA = bdy$. Величина предельного изгибающего момента будет равна

$$M_{пр} = 2 \int_0^{h/2} b \sigma_T y dy = 2b \sigma_T \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{h/2} = \frac{bh^2}{4} \sigma_T = \sigma_T W_{zT}, \quad (22.18)$$

где $W_{зт} = \frac{bh^2}{4}$ - *пластический осевой момент сопротивления*.

Отношение предельного изгибающего момента к опасному равно

$$\alpha = \frac{M_{пр}}{M_T} = \frac{\sigma_T W_{зт}}{\sigma_T W_z} = \frac{bh^2 \sigma_T 6}{4bh^2 \sigma_T 2} = \frac{3}{2} \text{ или } M_{пр} = 1,5M_T.$$

Таким образом, для балок, имеющих поперечное сечение в форме прямоугольника, предельный изгибающий момент на 50 % больше M_T , при котором начинается пластическая деформация. Допускаемый изгибающий момент получим, разделив предельный момент на нормативный коэффициент безопасности:

$$[M] = M_{пр} / [n],$$

где n - нормативный коэффициент безопасности.

Зная $[M]$, можно определить величину внешней допускаемой нагрузки.

Пластический момент сопротивления сложного поперечного сечения определяется по формуле

$$W_{зт} = S_1 + S_2,$$

где S_1 и S_2 - статические моменты сжатой и растянутой частей сечения относительно нейтральной оси z , делящей поперечное сечение на две равновеликие по площади части A_1 и A_2 (рис. 22.14). Значения S_1 и S_2 принимаются по абсолютной величине.

Статические моменты S_1 и S_2 следующие:

$$S_1 = A_1 y_1; \quad S_2 = A_2 y_2.$$

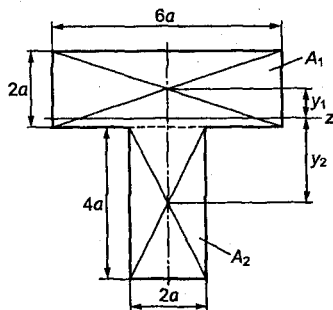
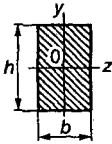
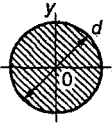
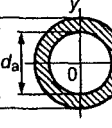

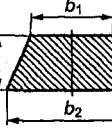
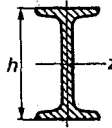


Рис. 22.14

Для несимметричных сечений нейтральная ось z может не совпадать с центральной осью, проходящей через центр тяжести. В табл. 22.1 приведены значения пластических моментов сопротивления и значения коэффициента α для некоторых форм поперечных сечений.

Пластические моменты сопротивления

	$W_T = S_1 + S_2 = \frac{bh^2}{4} \quad W_z = \frac{bh^2}{6}$ $W_T = 1,5W_z \quad \alpha = 1,5$
	$W_T = \frac{d^3}{6} \quad W_z = \frac{\pi d^3}{32} \quad \alpha = 1,7$
	$W_T = \frac{1}{6}(d_H^3 - d_B^3), \quad \alpha = 1,7 \cdot \frac{1-c^3}{1-c^4} \quad c = \frac{d_B}{d_H}$
	$W_T = \frac{bh^2}{6}(2 - \sqrt{2}) \approx 0,0977bh^2, \quad \alpha = 2,36$
	$W_T = \frac{h^2}{3(b_2 - b_1)} \left[b_1^3 + b_2 \frac{3}{2}(b_1^2 + b_2^2) \cdot \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \right]$
	$W_T = \frac{h}{I_z / S_z} = 2S_z, \quad \alpha = 1,14 - 1,18$

Для пояснения физической сущности понятия пластического шарнира рассмотрим балку, свободно лежащую на двух опорах и нагруженную в середине сосредоточенной силой F (рис. 22.15, а). Эпюра изгибающих моментов для рассматриваемой балки показана на рис. 22.15, б. Максимальный изгибающий момент возникает в среднем сечении и равен $M_{\max} = Fl/4$.

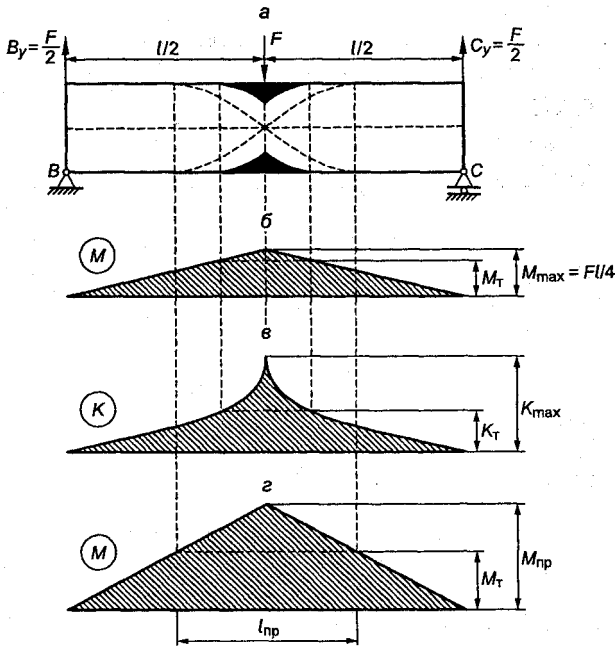


Рис. 22.15

При увеличении нагрузки, когда величина максимального изгибающего момента превысит значение опасного момента M_T , в верхних и нижних точках наиболее нагруженных сечений центральной части балки появятся ограниченные зоны пластических деформаций. На рис. 22.15, *a* начальные зоны пластических деформаций заштрихованы. Размеры пластических зон легко определяются по эпюре изгибающих моментов, влияние поперечных сил как незначительное не учитывается.

Кривизна балки на участках от концов балки до начала пластической зоны изменяется по линейному закону; в начале пластической зоны кривизна равна K_T , далее с переходом в пластическую зону она интенсивно возрастает и в середине балки достигает максимального значения K_{\max} . Естественно, максимальная кривизна будет оставаться конечной, пока в сечении, где имеет место максимальный изгибающий момент, сохраняется упругая зона.

Когда величина максимального изгибающего момента M_{\max} достигнет значения предельного момента $M_{\text{пр}}$, пластические зоны в середине балки сомкнутся, как показано пунктиром на рис. 22.15, а, и все сечение будет охвачено пластической деформацией. В этом случае в середине балки возникает неограниченное пластическое течение, кривизна становится очень большой, что приводит к большим поворотам концов балки в среднем сечении. Таким образом, балка становится подобной двум жестким стержням, соединенным пластическим шарниром, позволяющим этим стержням поворачиваться относительно друг друга под действием постоянного момента. В отличие от идеального шарнира, не воспринимающего момента, в пластическом шарнире действует постоянный момент $M_{\text{пр}}$. Пластический шарнир является одно-сторонним: он допускает взаимный поворот частей балки только в направлении действия предельного изгибающего момента. При приложении к балке момента, противоположного $M_{\text{пр}}$, т.е. при разгрузке балки, поворот становится невозможным.

Вычислим длину пластической зоны $l_{\text{пр}}$, примыкающей к пластическому шарниру (рис. 22.15, а, з). Изгибающий момент в начале зоны равен опасному $M_{\text{т}}$, который (согласно рис. 22.15, а, з) будет

$$M_{\text{т}} = \frac{F_{\text{пр}}}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{l_{\text{пр}}}{2} \right) \quad (22.19)$$

где $F_{\text{пр}}$ – максимальная нагрузка, соответствующая предельному изгибающему моменту $M_{\text{пр}}$.

Предельный изгибающий момент

$$M_{\text{пр}} = F_{\text{пр}} l / 4. \quad (22.20)$$

Подставив $F_{\text{пр}}$ из выражения (22.20) в (22.19), после простых преобразований найдем

$$l_{\text{пр}} = l \left(1 - M_{\text{т}} / M_{\text{пр}} \right) = l \cdot \left(1 - \frac{1}{M_{\text{пр}} / M_{\text{т}}} \right). \quad (22.21)$$

Например, для балки прямоугольного поперечного сечения отношение $M_{\text{пр}} / M_{\text{т}} = 1,5$, тогда из (22.21) получаем

$$l_{\text{пр}} = l \cdot \frac{1}{3} = 0,33l.$$

Несмотря на то что пластическая зона по длине балки распространяется на значительное расстояние, кривизна сосредоточивается в поперечном сечении, где действует предельный момент $M_{\text{пр}}$. Другими словами, пластический шарнир можно считать не имеющим протяженности в осевом направлении и рассматривать его следует расположенным в одном поперечном сечении балки.

Совершенно очевидно, что у статически определимых балок несущая способность исчерпывается при образовании одного пластического шарнира в сечении с максимальным изгибающим моментом, так как после образования шарнира балки превращаются в механизм, который может перемещаться под действием предельной нагрузки. У этих балок отношение предельной нагрузки к опасной всегда равняется отношению предельного изгибающего момента к опасному.

У статически неопределимых балок для потери несущей способности образование одного пластического шарнира недостаточно, требуется образование нескольких пластических шарниров, при этом отношение предельной нагрузки к опасной изменяется в зависимости от вида нагружения и типа балки.

Рассмотрим статически неопределимую балку, нагруженную сосредоточенной силой, приложенной в середине (рис. 22.16, а).

Эпюра изгибающих моментов при отсутствии пластических деформаций представлена на рис. 22.16, б. Максимальный изгибающий момент возникает в защемлении В:

$$M_{\text{max}} = \frac{3Fl}{16}. \quad (22.22)$$

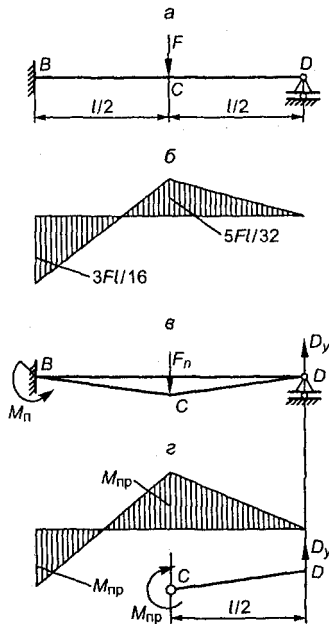


Рис. 22.16

Величина опасной нагрузки F_T , при которой начнутся пластические деформации в сечении B , из выражения (22.22) будет равна

$$F_T = \frac{16M_T}{3l}, \quad (22.23)$$

где M_T - опасный момент, действующий в сечении B .

При некотором значении силы $F > F_T$ начнутся пластические деформации в сечении C , а в сечении B образуется пластический шарнир и действует предельный изгибающий момент $M_{пр}$. Однако возникновение одного шарнира не исчерпывает несущую способность балки, которая теперь может рассматриваться как статически определимая, нагруженная силой F и моментом $M_{пр}$. При дальнейшем увеличении силы F изгибающий момент в сечении C достигнет предельного значения $M_{п}$ и в сечении C возникнет пластический шарнир (рис. 22.16, в, г). В этом состоянии нагрузка является предельной $F_{пр}$, так как наличие двух шарниров в сечениях B и C превращает балку в механизм и дальнейшее увеличение нагрузки невозможно.

Определить величину предельной нагрузки $F_{пр}$ можно, составляя уравнения равновесия сил, действующих на балку как на свободное тело. Реакция D_y определяется из уравнения моментов относительно точки B (рис.22.16, в):

$$\sum m_B = D_y l - \frac{F_{пр} l}{2} + M_{п} = 0.$$

Откуда

$$D_y = F_{пр} / 2 - M_{п} / l. \quad (22.24)$$

Теперь, рассматривая отдельно равновесие стержня CD , напишем уравнение моментов относительно точки C (рис. 22.16, г):

$$\sum m_C = \frac{D_y l}{2} - M_{п} = 0 \quad \text{или} \quad D_y = 2M_{п} / l. \quad (22.25)$$

Подставляя D_y из (22.25) в (22.24), находим значение предельной нагрузки:

$$F_{пр} = 6M_{п} / l. \quad (22.26)$$

Сравнивая $F_{\text{пр}}$ и F_T , получаем

$$\frac{F_{\text{пр}}}{F_T} = \frac{6M_{\text{п}} \cdot 3l}{1 \cdot 16M_T} = \frac{9}{8} \cdot \frac{M_{\text{п}}}{M_T} = 1,125 \frac{M_{\text{п}}}{M_T}.$$

Большее отношение предельной нагрузки к опасной у статически неопределимых балок по сравнению со статически определимыми объясняется перераспределением моментов между участками статически неопределимых балок при нагружении, что ведет к увеличению их несущей способности. Следует отметить, что у статически неопределимых систем для определения предельных нагрузок удобно пользоваться *принципом возможных перемещений*.

В том случае, когда у статически неопределимой системы возможны несколько вариантов потери несущей способности, необходимо отдельно рассмотреть каждый вариант и вычислить величину соответствующей предельной нагрузки. Наименьшая по величине нагрузка и будет являться предельной для данной конструкции.

Пример 22.1. Жесткая балка подвешена на трех стержнях (рис. 22.17, а), имеющих одинаковое поперечное сечение. Стержни изготовлены из стали с пределом текучести $\sigma_T = 240$ МПа. Определить из расчета на прочность по предельной нагрузке требуемые площади поперечных сечений стержней, если $[n]=2,0$, а $F = 200$ кН.

Решение. Несущая способность системы будет исчерпана, когда в каких-либо двух стержнях напряжение достигнет предела текучести. Возможны три

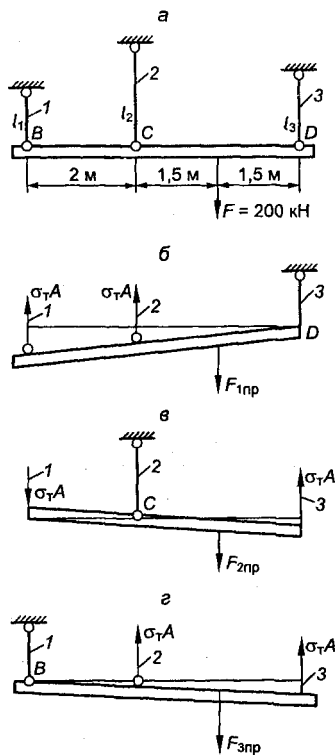


Рис. 22.17

варианта исчерпания несущей способности системы. Текучесть наступает в стержнях:

1) 1 и 2 (рис.22.17, б);

2) 1 и 3 (рис.22.17, в);

3) 2 и 3 (рис.22.17, г).

Составим для каждого случая уравнение предельного равновесия.

Вариант 1

$$\sum M_d = \sigma_T A \cdot 5 + \sigma_T A \cdot 3 - F_{1пр} \cdot 1,5 = 0,$$

откуда

$$F_{1пр} = \frac{8\sigma_T A}{1,5} = 5,33\sigma_T A.$$

Вариант 2

$$\sum M_c = \sigma_T A \cdot 2 + \sigma_T A \cdot 3 - F_{2пр} \cdot 1,5 = 0;$$

$$F_{2пр} = \frac{5\sigma_T A}{1,5} = 3,33\sigma_T A.$$

Вариант 3

$$\sum M_b = \sigma_T A \cdot 2 + \sigma_T A \cdot 5 - F_{3пр} \cdot 3,5 = 0;$$

$$F_{3пр} = \frac{7\sigma_T A}{3,5} = 2\sigma_T A.$$

Таким образом, несущая способность системы будет исчерпана в третьем варианте, когда текучесть возникает в стержнях 2 и 3. Предельная нагрузка будет равна наименьшей из полученных значений:

$$F_{пр} = F_{3пр} = 2\sigma_T A.$$

Условие прочности конструкции

$$n = F_{пр} / F = 2\sigma_T A / F \geq [n].$$

Откуда

$$A \geq \frac{F[n]}{2\sigma_T} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 24000} = 8,3 \text{ см}^2.$$

Пример 22.2. Стержень, защемленный по концам, нагружен скручивающим моментом $m = 18 \text{ кНм}$ (рис. 22.18). Определить из расчета на прочность по предельной нагрузке диаметр стержня, если предел текучести на сдвиг $\tau_T = 14\,000 \text{ Н/см}^2$, $[n]=2$.

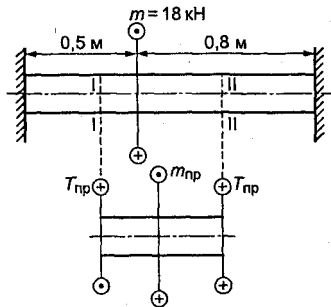


Рис. 22.18

Решение. Несущая способность стержня будет исчерпана, когда во всех поперечных сечениях обоих участков стержня напряжения будут равны τ_T . Двумя сечениями I-I и II-II выделим участок стержня.

В предельном состоянии на выделенный участок будут действовать предельный скручивающий момент $m_{пр}$ и предельные крутящие моменты в сечениях I и II.

Уравнение равновесия участка в предельном состоянии

$$2T_{пр} - m_{пр} = 0,$$

$$\text{или } m_{пр} = 2T_{пр} = 2\tau_T W_{рТ} = 2 \frac{\pi d^3}{12} \tau_T.$$

Из условия прочности $n = \frac{m_{пр}}{m} = \frac{\tau_T \pi d^3}{6m} \leq [n]$ получим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{6m[n]}{\tau_T \pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 18 \cdot 10^5 \cdot 2}{14000 \cdot 3,14}} \approx 7,8 \text{ см.}$$

При решении статически неопределимых задач по способу предельных нагрузок длины участков не имеют значения.

Пример 22.3. Двухопорная балка таврового сечения длиной 3 м нагружена посередине пролета силой F (рис. 22.19). Предел текучести материала $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, требуемый коэффициент безопасности $[n]=1,8$. Из расчета на прочность по предельной нагрузке определить допускаемую силу F .

Решение. Так как площадь полки равна площади стенки, $A_1 = A_2$, то нейтральная ось z пройдет по границе полки и стенки.

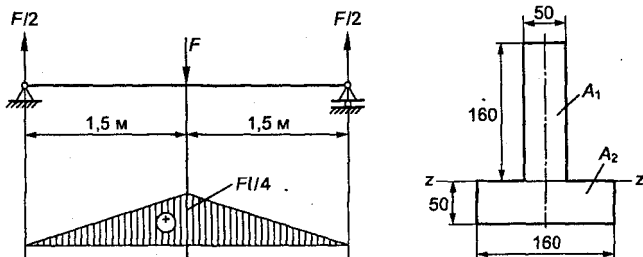


Рис. 22.19

Статические моменты относительно оси z

$$S_1 = 5 \cdot 16 \cdot 8 = 640 \text{ см}^3; \quad S_2 = 5 \cdot 16 \cdot 2,5 = 200 \text{ см}^3.$$

Пластический момент сопротивления балки

$$W_{\text{зт}} = S_1 + S_2 = 640 + 200 = 840 \text{ см}^3.$$

Предельный изгибающий момент

$$M_{\text{пр}} = \sigma_{\text{т}} W_{\text{зт}} = 24\,000 \cdot 840 = 2016 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Допускаемый изгибающий момент

$$[M] = \frac{M_{\text{пр}}}{[n]} = \frac{2016 \cdot 10^4}{1,8} = 112 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Максимальный изгибающий момент из эпюры

$$M_{\text{max}} = F_{\text{пр}} l / 4.$$

Приравняв максимальный изгибающий момент допускаемому, получаем

$$[M] = [F] \cdot l / 4.$$

Откуда

$$[F] = 4[M] / l = 4 \cdot 112 \cdot 10^5 / 300 = 149,3 \text{ кН}.$$

Пример 22.4. Для двутавровой балки № 18 (рис. 22.20) из расчета на прочность по предельной нагрузке определить допускаемую силу F . Предел текучести материала $\sigma_{\text{т}} = 240 \text{ МПа}$, требуемый коэффициент безопасности $[n] = 1,8$.

Решение. Несущая способность балки будет исчерпана при возникновении в сечениях *C* и *D* пластических шарниров (рис. 22.20, *б*). Эпюра изгибающих моментов, соответствующая предельному равновесию, представлена на рис. 21.20, *в*.

Предельное значение силы $F_{\text{пр}}$ найдем, составив выражения изгибающих моментов для сечений *C* и *D*.

Для сечения *C*

$$M_c = M_{\text{пр}} = B_y \cdot 2,$$

откуда

$$B_y = M_{\text{пр}} / 2.$$

Для сечения *D*

$$M_d = -M_{\text{пр}} = B_y \cdot 5 - F_{\text{пр}} \cdot 3 = \frac{M_{\text{пр}}}{2} \cdot 5 - F_{\text{пр}} \cdot 3,$$

откуда

$$F_{\text{пр}} = \left(\frac{5}{2} M_{\text{пр}} + M_{\text{пр}} \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{6} M_{\text{пр}}.$$

Предельный момент

$$M_{\text{пр}} = 2S_{\text{max}}\sigma_T = 2 \cdot 81,4 \cdot 24000 = 3907,2 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см} = 39,1 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

где $S_{\text{max}} = 81,4 \text{ см}^3$ (по таблице сортамента прокатной стали ГОСТ 8239-72).

Подставляя в выражение для $F_{\text{пр}}$ значение предельного момента, найдем величину предельной силы:

$$F_{\text{пр}} = \frac{7}{6} \cdot 39,1 = 45,6 \text{ кН}.$$

Допускаемая сила равна предельной силе, деленной на коэффициент безопасности:

$$[F] = F_{\text{пр}} / [n] = 45,6 / 1,8 = 25,3 \text{ кН}.$$

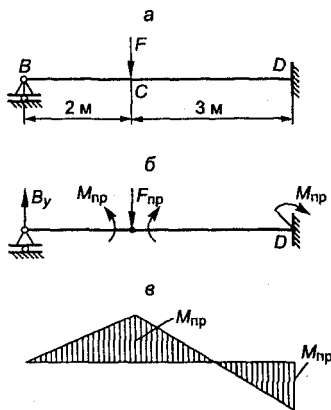


Рис. 22.20

22.6. Остаточные напряжения

Напряжения называются **остаточными**, если они сохраняются в теле после снятия внешней нагрузки или охлаждения нагретого тела до начальной температуры.

Остаточные напряжения оказывают существенное влияние на механические свойства пластичных материалов. Если напряжения от внешних сил и остаточные напряжения одного знака, то в результате их сложения прочность элемента конструкции снижается, если разных знаков – прочность увеличивается. Последний случай широко используется, например, для повышения несущей способности железобетонных балок и плит. Остаточные напряжения растяжения часто являются причиной образования трещин в сварных соединениях, фасонных отливках, при закалке деталей и так далее, особенно при действии переменных напряжений. Они вызывают коробление конструкций после сварки.

Основной технологической причиной образования остаточных напряжений является *остаточная деформация*. Для любого напряженного состояния образование остаточных деформаций связано с достижением напряжениями предела текучести.

Рассмотрим механизм образования остаточных напряжений. Пусть элемент балки прямоугольного поперечного сечения подвергается чистому изгибу внешними моментами M , действующими в вертикальной плоскости zy (рис. 22.21, а).

Опыты по пластическому деформированию показывают, что при чистом изгибе за пределом упругости напряженное состояние материала является одноосным и выполняется *гипотеза плоских сечений*. Если в наиболее удаленных точках от нейтральной оси z (в крайних точках сечения) напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma_T,$$

(где W_z – осевой момент сопротивления, σ_T – предел текучести), то в сечении возникают только упругие деформации.

Когда приложенный момент M достигнет значения

$$M_T = \sigma_T \cdot W_z,$$

тогда в крайних точках сечения появится пластическая деформация ε_T (ε_T – деформация, соответствующая пределу текучести) и

нормальные напряжения будут равны σ_T . При увеличении момента M эпюра распределения нормальных напряжений в сечении будет определяться диаграммой деформирования. Если диаграмма деформирования описывает пластическую зону без упрочнения (диаграмма Прандтля), то эпюра напряжений в пластической зоне будет постоянной, равной в растянутой части сечения σ_T , в сжатой части ($-\sigma_T$). В случае диаграммы деформирования с линейным упрочнением эпюра напряжений в пластической зоне будет линейной, уменьшающейся в направлении к нейтральной оси z . Для упрощения примем, что диаграмма деформирования материала не имеет упрочнения и представляет собой диаграмму Прандтля (рис. 22.21, б). Допустим, что при величине момента $M_z > M_T$ пластические деформации распространились

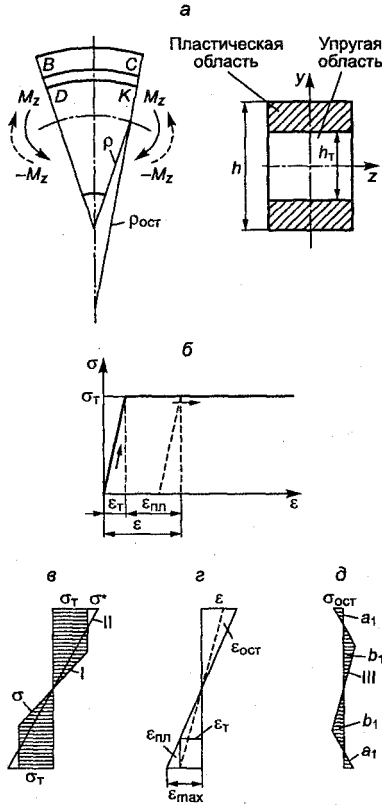


Рис. 22.21

от $\pm \frac{h}{2}$ до $\pm \frac{h_T}{2}$ (где $\frac{h_T}{2}$ - расстояние от нейтральной оси z до границы между упругой и пластической областями). В упругой области напряжения изменяются по линейному закону (рис. 22.21, в):

$$\sigma = \frac{2y}{h_T} \cdot \sigma_T, \quad (22.27)$$

где y - расстояние от нейтральной оси z до рассматриваемой точки.

В пластической области напряжения постоянны и равны $\sigma = \sigma_T$.

При нагружении в точках пластической области упругие деформации $\epsilon_{упр} = \epsilon_T$ складываются с пластическими деформациями $\epsilon_{пл}$. Суммарная деформация в точке будет (рис.22.21, б)

$$\epsilon = \epsilon_T + \epsilon_{пл}. \quad (22.28)$$

Максимальная суммарная деформация будет в крайних точках сечения (рис. 22.21, в).

Рассмотрим элемент балки в деформированном состоянии (см. рис. 22.21, а).

Выделим слой BC в пластической области сечения и слой DK в упругой области. Слои BC и DK принадлежат одному телу и при упругопластической деформации связаны гипотезой плоских сечений. После снятия внешней нагрузки балка будет выпрямляться. Слой BC , получивший пластическую деформацию, не вернется в исходное положение и сохранит некоторую остаточную деформацию (см. рис. 22.21, в). Слой DK , деформирующийся упруго, возвращаясь в первоначальное положение, вызовет сжатие слоя BC . Этот процесс будет происходить, пока не уравниваются внутренние силы в слоях. Таким образом, после разгрузки слои, расположенные в пластической области сечения, будут препятствовать слоям, расположенным в упругой области, восстанавливать свою первоначальную длину. Как результат, в сечении возникнут остаточные деформации и остаточные напряжения.

Определим распределение остаточных напряжений по поперечному сечению балки.

Согласно теореме о разгрузке обратная деформация является упругой, а эпюра уменьшения напряжений – линейной. Разгрузку можно представить как упругое нагружение балки моментом, равным по величине и обратным по знаку моменту при нагружении.

Напряжения при разгрузке определяются по формуле

$$\sigma^* = \frac{M_z y}{I_z}, \quad (22.29)$$

где y – расстояние от оси z до рассматриваемой точки; J_z – осевой момент инерции сечения относительно оси z .

Следовательно, остаточные напряжения (напряжения, остающиеся в балке после разгрузки) будут определяться как разность напряжений, возникающих в результате последовательного приложения момента нагрузки и противоположного и равного ему момента разгрузки:

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma - \sigma^* = \sigma - \frac{M_z}{I_z} y, \quad (22.30)$$

где σ - напряжения в поперечном сечении при нагружении;

σ^* - напряжения в сечении при разгрузке.

Остаточные напряжения вызываются в балке пластической деформацией.

Эпюра остаточных напряжений приведена на рис.22.21, δ (кривая III). Эпюра нормальных напряжений σ при упруго-пластическом изгибе представлена кривой I. Эпюра нормальных напряжений σ^* в предположении, что материал при разгрузке ведет себя как упругое тело представлена кривой II (см. рис. 22.21, ϵ). Из рис. 22.21, δ следует, что заштрихованные площади $a_1 - a_1$ и $b_1 - b_1$ образуют две противоположные пары сил, которые вызывают поворот плоских поперечных сечений на некоторый угол и изменение кривизны балки. Если при нагружении радиус кривизны обозначить через ρ , а остаточный радиус кривизны после разгрузки через $\rho_{\text{ост}}$, то остаточная кривизна

$$\frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{1}{\rho} - \frac{M_z}{EI_z}. \quad (22.31)$$

Так как в поперечном сечении после разгрузки продольная сила и изгибающий момент равны нулю, то остаточные напряжения в сечении создают систему внутренних самоуравновешенных сил. При повторном изгибе балки с остаточными напряжениями, моментами той же величины и направления, что и при первом изгибе, возникающие напряжения накладываются на остаточные напряжения, образуя распределение напряжений в сечении, одинаковое с исходным. Пластические деформации при повторном изгибе не происходят. Следовательно, остаточные напряжения, возникающие при первом изгибе, будут увеличивать внешний момент, который может выдер-

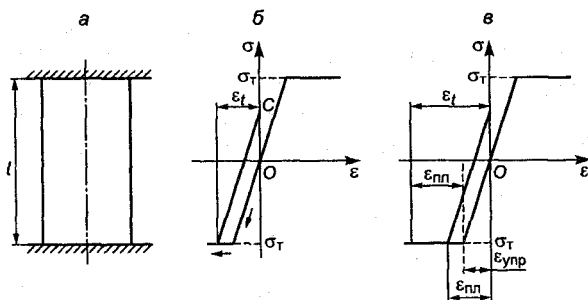


Рис. 22.22

жать балка в упругом состоянии при условии сохранения направления изгиба.

Рассмотрим процесс образования остаточных напряжений, вызываемых неравномерным нагревом или охлаждением стержня. Пусть стержень длиной l жестко зашпелен между двумя неподатливыми опорами (рис. 22.22, а) и нагревается от 0°C до температуры $t^\circ\text{C}$.

В свободном состоянии стержень при нагреве получил бы относительное температурное удлинение

$$\varepsilon_t = \alpha t, \quad (22.32)$$

где α - температурный коэффициент линейного расширения.

Так как стержень свободно удлиняться не может, то в нем возникнут напряжения сжатия, равные в пределах упругости $\varepsilon_t < \varepsilon_T$ (где ε_T - линейная деформация, соответствующая пределу текучести):

$$\sigma_T = \varepsilon_t \cdot E. \quad (22.33)$$

В этом случае при охлаждении стержень примет первоначальную длину и напряжения полностью исчезнут.

За пределом упругости $\varepsilon_t > \varepsilon_T$, согласно диаграмме деформирования (см. рис. 22.22, б), в стержне появятся пластические деформации сжатия. Напряжения сжатия будут равны ($-\sigma_T$).

При охлаждении, согласно теореме о разгрузке, в стержне под действием жесткой заделки концов возникнут напряжения растяжения, равные OC (см. рис. 22.22, в), так как в свободном

состоянии в результате остаточной деформации сжатия охлажденный стержень был бы короче своей первоначальной длины.

Определим пластическую деформацию стержня, считая, что модуль упругости E и коэффициент α у стали до температуры 300–400 °С при нагреве и охлаждении остаются постоянными.

Пусть стержень, закрепленный по концам, нагревается от 20 °С до 220 °С. Материал стержня имеет предел текучести

$$\sigma_T = 210 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/гр.}$$

Деформация сжатия в результате нагрева

$$\varepsilon_t = \alpha \cdot \Delta t = 12,5 \cdot 10^{-6} (220 - 20) = 0,0025 = 0,25 \%$$

Упругая деформация, соответствующая пределу текучести, будет

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{21000}{2 \cdot 10^7} = 0,001 = 0,1\%$$

Таким образом, при нагреве пластическая деформация стержня равна (рис. 22.22, в)

$$\varepsilon_{\text{пл}} = \varepsilon_t - \varepsilon_T = 0,0025 - 0,001 = 0,0015 = 0,15 \%$$

Вычислим остаточное напряжение растяжения в стержне. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{\varepsilon_{\text{упр}}}{\sigma_T} = \frac{\varepsilon_{\text{пл}}}{\sigma_T + OC}$$

Откуда остаточное напряжение растяжения (отрезок OC) равно

$$\sigma_{\text{ост}} = 10500 \text{ Н/см}^2 = 105 \text{ МПа.}$$

Знак остаточных напряжений всегда обратен знаку пластической деформации.

Постоянным источником возникновения остаточных напряжений в поверхностных слоях деталей является механическая обработка: фрезерование, точение, шлифование, поверхностное упрочнение и др.

При силовом воздействии режущего инструмента в поверхностном слое под снимаемой стружкой возникают пластические деформации растяжения (рис. 22.23).

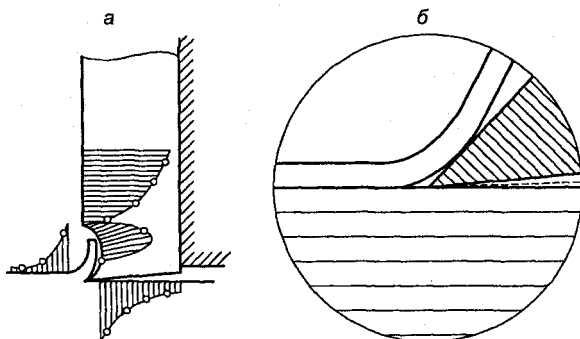


Рис. 22.23

После прохода инструмента если бы пластически деформируемый поверхностный слой не имел связи с нижележащим упругим материалом, то он получил бы остаточное удлинение. Связь с нижележащим упругим материалом препятствует удлинению, создавая в пластически деформированном поверхностном слое остаточные напряжения сжатия.

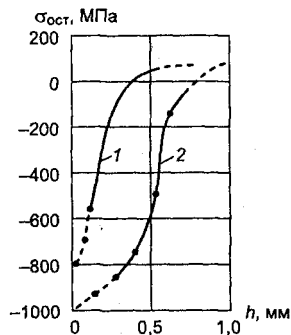


Рис. 22.24

Остаточные напряжения сжатия вызывают опускание поверхности обработки ниже движения лезвия реза (рис. 22.23, а, б)*. Остаточные напряжения сжатия могут достигать большой величины 200–800 МПа и распространяются на глубину 50–100 мкм. На рис. 22.24 показано распределение остаточных напряжений в поверхностном слое стального образца 42HRC после обдувки дробью.

Кривая 1 относится к дробь $d=0,6$ мм; давление воздуха $p=35$ МПа; кривая 2

относится к дробь $d=3,2$ мм и давлению воздуха $p=60$ МПа.

Из рис. 22.24 видно, что после обдувки дробью $d=3,2$ мм и давлении воздуха $p=60$ МПа, остаточные напряжения распро-

* Кокор, Э. Оптический метод исследования напряжений / Э. Кокор, Л. Файлон. Л.; М., 1936.

страняются на большую глубину и достигают большой величины. При скоростном точении и шлифовании происходит нагрев поверхностного слоя за счет пластической деформации и трения инструмента. Связь разогретого поверхностного слоя с нижележащим холодным материалом препятствует растяжению поверхностного слоя, что вызывает в слое пластическую деформацию сжатия, а после охлаждения приводит к возникновению остаточных напряжений растяжения.

На практике известны случаи, когда при интенсивном шлифовании высокопрочных сплавов растягивающие напряжения вызывали образование поверхностных трещин. Для снятия остаточных напряжений наибольшее распространение получил метод релаксации остаточных напряжений при повышенных температурах (при отжиге). Так, отжиг при 873 °К полностью снимает остаточные напряжения в любых сталях. Общим механическим методом определения остаточных напряжений является измерение упругой деформации стержня после снятия параллельно нейтральному слою тонкого слоя металла. Перераспределение напряжений в результате удаления тонкого слоя металла Δ вызывает удлинение и кривизну оси стержня. Измерив стрелу прогиба, можно вычислить остаточное напряжение в удаленном слое по формуле

$$\sigma = \frac{4Eh^2}{3l^2\Delta} \cdot f = -\sigma_{\text{ост}}, \quad (22.34)$$

где E - модуль упругости; h - высота поперечного сечения; l - длина участка стержня; f - стрела прогиба.

Остаточные напряжения также определяют рентгеновским методом по изменению межплоскостного расстояния Δa :

$$\sigma_{\text{ост}} = \frac{\Delta a}{a} \cdot E. \quad (22.35)$$

Для снятия тонких слоев металла применяют химические растворы, изменение кривизны измеряют оптическими методами. Имеются и другие механические методы определения остаточных напряжений.

22.7. Заневоливание валов

Типичным примером использования остаточных напряжений для повышения прочности валов является метод, называемый заневоливанием валов. Рассмотрим его сущность.

Если после приложения предельного крутящего момента $T_{пр}$ разгрузить вал, то в его поперечных сечениях возникнут некоторые остаточные напряжения, хотя крутящие моменты в них будут равны нулю. Определим величину остаточных напряжений.

Процесс разгрузки эквивалентен приложению крутящего момента, равного моменту нагрузки, но обратного ему по знаку. Следовательно, остаточные напряжения будут равны алгебраической сумме напряжений, возникающих в результате последовательного приложения момента нагрузки и противоположного и равного ему момента разгрузки.

Пусть диаграмма сдвига материала при нагрузке и разгрузке имеет одинаковый предел текучести $\tau_T = -\tau_T$ и схематизируется диаграммой Прандтля (рис. 22.25, а).

При действии предельного крутящего момента $T_{пр}$ касательные напряжения вдоль радиуса сечения равны пределу текучести τ_T . При разгрузке материал следует закону Гука и касательные напряжения вдоль радиуса будут изменяться по линей-

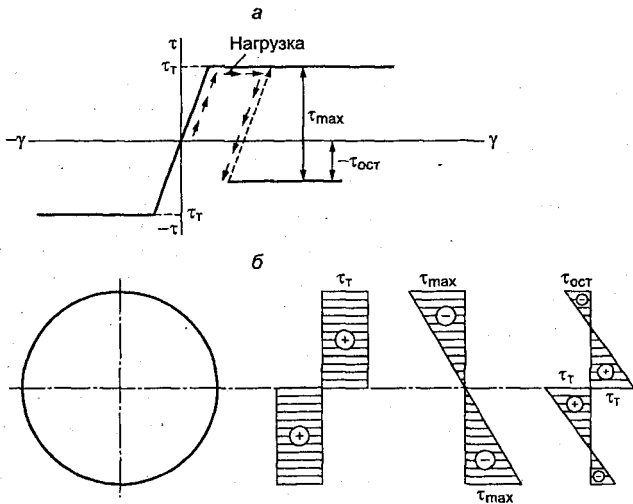


Рис. 22.25

ному закону (рис. 22.25, б). Величина τ_{\max} находится из того положения, что прямоугольное и треугольное распределения напряжений должны создавать крутящие моменты одной и той же величины $T_{\text{пр}}$, но имеющие противоположное направление.

Крутящий момент $T_{\text{пр}}$, соответствующий *прямоугольной эпюре*, согласно (22.25), равен

$$T_{\text{пр}} = \frac{\pi d^3}{12} \tau_T,$$

а крутящий момент, соответствующий *треугольной эпюре*, вычислим, подставляя в выражение (22.10) τ_{\max} вместо τ_T :

$$T_{\text{пр}} = -\tau_{\max} \frac{\pi d^3}{16}.$$

Приравнивая моменты, получаем

$$\tau_T \frac{\pi d^3}{12} = -\tau_{\max} \frac{\pi d^3}{16} \quad \text{и} \quad \tau_{\max} = -\frac{4}{3} \tau_T. \quad (22.36)$$

Алгебраически вычитая из прямоугольной эпюры треугольную, получим эпюру остаточных напряжений, состоящую из двух треугольников разных знаков (см. рис. 22.25, б). На поверхности вала остаточные напряжения равны

$$\tau_{\text{ост}} = \tau_T - \frac{4}{3} \tau_T = -\frac{1}{3} \tau_T,$$

а у центра вала $\tau_{\text{ост}} = \tau_T$.

Рассмотренный метод позволяет снизить рабочее напряжение на поверхности вала и тем самым повысить внешний скручивающий момент. Это явление называется **заневоливанием валов**.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

1. *Де Сен-Венан Барре* (1797–1386) – французский ученый, член Французской академии наук. Основными научными результатами являются: вывод основных уравнений теории упругости; разработка теории изгиба и кручения балок; создание теории пластических деформаций и теории колебаний. Он считал, что критерием для назначения допускаемых напряжений является наибольшая деформация. Сформулировал принцип, носящий его имя, используемый для решения задач сопротивления материалов.

2. *Коши Огюст* (1789–1857) – член Французской академии наук. Внес большой вклад в развитие математической теории упругости, дал соотношение между шестью компонентами напряжения и шестью компонентами деформации для изотропного тела, впервые в 1882 г. сформулировал и ввел понятие главных напряжений и деформаций, исследовал кручение прямоугольного стержня и показал, что поперечные сечения при кручении не остаются плоскими, а коробятся.

3. *Гук Роберт* (1636–1703) – английский ученый, современник Ньютона, член Лондонского Королевского общества. Научные работы Гука охватывают многие области естествознания. Изучая давление воздуха, он разработал теорию капиллярности, усовершенствовал воздушный насос; изучая распространение света, высказал мысль, что «свет представляет собой весьма короткие колебательные движения, совершающиеся в поперечных направлениях к линии распространения»; объяснил явление Ньютоновых колец, высказал идею Закона всемирного тяготения, разработал способы повышения точности хода часов, открыл Закон пропорциональности между силой, приложенной к упругому телу, и его деформацией, явившийся фундаментом, на котором получила развитие механика упругих тел. Автор многих изобретений.

4. *Юнг Томас* (1773–1829) – английский ученый, член Лондонского Королевского общества. Ему принадлежат основополагающие работы по теории зрения, звука, открытие интерференции света; является основоположником изучения удара, решения задач при внецентренном растяжении и сжатии прямоугольного бруса; впервые показал, что продольные деформации всегда сопровождаются изменением поперечных размеров, дал оценку величины молекулы, вычислил величину модуля упругости стали, успешно участвовал в расшифровке египетских иероглифов; много сделал для развития теории сопротивления материалов.

5. *Навье Луи Мари Анри* (1785–1836) – французский ученый и инженер, член Французской академии наук, автор первой книги по сопротивлению материалов. Им положены основы математической теории упругости, дано современное определение модуля упругости как отношения напряжения к деформации, внесен существенный вклад в теорию балок,

пластин и оболочек, в теорию изгиба кривых брусьев, в теорию колебаний, в теорию расчета висячих мостов. Им выведено дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, разработан общий метод решения статически неопределимых задач.

6. *Пуассон Симеон Дени* (1781–1840) – член Французской академии наук. Ему принадлежат важные работы по теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории вероятности, теории изгиба пластин со свободно опертыми и с жестко защемленными краями; выведены уравнения для продольных, крутильных и поперечных колебаний стержней, получено значение коэффициента Пуассона при простом растяжении призматического стержня.

7. *Понселе Жан-Виктор* (1788–1867) – французский ученый, член Французской академии наук, основоположник геометрической науки – проективной геометрии. Его главные работы по механике посвящены изучению механических свойств и динамической прочности материалов. Он использовал диаграммы растяжения для сравнения различных сортов стали, выбора допускаемых напряжений; также занимался исследованиями явления усталости.

8. *Герстнер Франтишек Йосеф* (1756–1832) – чешский инженер. Основные труды посвящены механике. Существенный вклад в сопротивление материалов внес, изучая влияние остаточной деформации на свойства образцов, подвергнутых растяжению. Он установил, что упругие деформации при растяжении за пределами упругости всегда следуют закону Гука, и первый предложил материалы для висячих мостов подвергать предварительному растяжению до определенного предела (наклепу). Им проведено первое исследование линий влияния при проектировании висячих мостов.

9. *Галилей Галилео* (1564–1642) – итальянский ученый. Занимался исследованиями в области математики, механики, астрономии, заложил основы динамики, дал описание поверхности Луны, обнаружил спутники Юпитера, наблюдал фазы Венеры, описал пятна на Солнце, подтвердил теорию Коперника. В 1633 г. Галилей был осужден инквизицией за астрономические работы. После отречения ему запретили заниматься астрономией, обязали поселиться на его вилле Арцетри возле Флоренции, где он стал заниматься сопротивлением материалов. Им были высказаны положения о прочности бруса при растяжении и изгибе и сделаны попытки установления безопасных размеров элементов сооружений. Его работы являются началом науки о сопротивлении материалов.

10. *Ренкин Уильям Джон Макуорн* (1820–1872) – английский ученый, член Английского Королевского общества. Ему принадлежат многие работы по теории упругости, строительной механике, в частности исследования поведения арок и подпорных стен, исследование усталостных разрушений, исследования по молекулярной физике и термодинамике.

11. *Мариотт Эдм* (1620–1684) – французский физик, член Французской академии наук. Ему принадлежат: открытие закона Бойля – Мариотта, изобретение баллистического маятника, проект трубопровода для водоснабжения Версальского дворца. Он предложил теорию изгиба с учетом упругих свойств материала; показал, что разрушение наступает тогда, когда удлинение достигает определенного значения, исследовал влияние, оказываемое на прочность балки заделкой ее концов, вывел формулу для прочности труб на разрыв.

12. *Кулон Шарль Огюстен* (1736–1806) – выдающийся французский ученый, член Французской академии наук. Ему принадлежат работы по электричеству и магнетизму, вязкости жидкости, трению, изгибу балок, расчету подпорных стенок и арок, кручению и крутильным колебаниям. Им получено соотношение между крутящим моментом и углом закручивания для стержня круглого поперечного сечения, проводились исследования прочности материалов при различных видах нагружения.

13. *Губер М.Т.* – польский ученый. Основные труды посвящены разработке теории анизотропных пластин. Его работы по проектированию и применению железобетонных плит, деревянных досок и брусьев легли в основу книг «Проблемы статики ортотропных пластинок, имеющих значение в технике», Варшава, 1929 г., и «Теория упругости», т.1 и 2, Краков, 1948, 1950, посвященных вопросам практического использования анизотропных материалов.

14. *Мор Отто Кристиан* (1835–1918) – немецкий ученый. Его основные научные работы посвящены расчету статически неопределимых конструкций. Им предложены графические методы определения напряжений и деформаций в точке; уравнение трех моментов с учетом разности высоты опор; метод определения прогибов. Используя метод графического представления напряжений, он предложил теорию прочности, не имеющую в своей основе никакого критерия разрушения.

15. *Бернулли Даниил* (1700–1782) – швейцарский ученый, член Российской академии наук с 1725 г. Основные труды посвящены гидродинамике, кинетической теории газов, теории колебаний балок, теории упругих кривых. Он первый вывел дифференциальное уравнение поперечных колебаний призматического бруса, дал анализ частных случаев колебаний, много занимался экспериментальными работами. В сопротивлении материалов им была сформулирована и предложена гипотеза плоских сечений.

16. *Тимошенко Степан Прокофьевич* (1878–1972). Оказал большое влияние на развитие инженерного дела и высшего технического образования в мире. Член Академии наук Украины, член-корреспондент АН СССР. С 1922 по 1960 г. жил в США, был профессором Мичиганского и Стэнфордского университетов. С 1960 по 1972 г. жил в ФРГ, г. Вупперталь. Научные работы посвящены теории упругости, теории удара и теории

колебаний, расчету пластин и оболочек, теории устойчивости упругих и неупругих систем. Он первым исследовал изгиб и кручение тонкостенных стержней, определил центр изгиба балки.

17. *Журавский Дмитрий Иванович* (1821–1891) – русский ученый и инженер. Впервые провел исследование касательных напряжений при поперечном изгибе и предложил формулу для приближенного определения их величины. Точная теория распределения касательных напряжений была предложена Сен-Венаном, однако ее применение оказалось возможным только в отдельных случаях. Д.И. Журавским спроектировано и построено ряд мостов и других металлических конструкций, в том числе металлический шпиль Петропавловского собора в Петербурге.

18. *Крылов Алексей Николаевич* (1863–1945). Лауреат Государственной премии СССР, Герой Социалистического труда. Им разработаны теория колебаний мостов при движении постоянной и импульсивной нагрузки, теория вибрации корабля, метод расчета балок на упругом основании, проведены глубокие исследования упругой линии сжатого стержня при больших прогибах, выполнен перевод с латинского на русский язык «Начал» Ньютона, разработана теория приближенных вычислений для практического пользования инженерами.

19. *Кастилиано Карло Альберте* (1847–1884). Родился в бедной семье, в Италии. Теорему об определении перемещений он, будучи студентом, сформулировал в дипломной работе на получение звания инженера-строителя в Политехническом институте Турина. Умер в возрасте 37 лет в самом расцвете творческих сил. Им сформулировано большое число концепций и принципов расчета конструкций; был доказан «принцип наименьшей работы».

20. *Верещагин А.Н.* Разработал и предложил способ вычисления интегралов от произведения двух функций, из которых одна – линейная. Этот способ он предложил в 1925 г., будучи студентом Московского института инженеров транспорта, и опубликовал в журнале «Строительная промышленность» (№ 9. 1925).

21. *Давиденков Н.Н.* Академик. Основные труды относятся к теории прочности. Им предложена объединенная гипотеза для хрупких материалов, разработан способ определения остаточных напряжений в деталях конструкций, выполнены экспериментальные исследования по определению влияния размеров образцов на предел прочности.

22. *Гадолин Аксель Вильгельмович* (1828–1892). Академик. Основные труды относятся к теории упругости. Им разработана теория расчета составных толстостенных цилиндров, находящихся под внутренним давлением, разработаны основы расчета кривых стержней.

23. *Головин Х.С.* (1844–1904). Основные труды относятся к области расчета статически неопределимых стержневых систем, провел исследования деформаций и напряжений круговых арок постоянной толщины;

установил, что в условиях чистого изгиба круговых арок материал находится в плоском напряженном состоянии, показал существование напряжений, действующих в радиальном направлении; вычислил перемещения в кривом брус. Головин доказал, что точность элементарной теории расчета кривых брусьев вполне достаточна для практических целей. Выполненные им исследования фактически представляют первую попытку применения теории упругости в изучении напряжений в кривых брусках.

24. *Бетти Энрико* (1823–1892) – итальянский математик и инженер, дал общее доказательство теоремы о взаимности работ. Позже лорд Рэлей распространил теорему о взаимности работ на колебания упругих систем.

25. *Максвелл Джеймс Клерк* (1831–1879) – английский математик и физик. Родился в Эдинбурге. Ему принадлежат важные работы в области расчета конструкций. Предложил метод единичной нагрузки для определения перемещения в упругих фермах; сформулирована теорема взаимности перемещений; разработан метод податливостей для определения лишних неизвестных сил в статически неопределимых фермах; полностью разработан метод анализа напряжений в поляризованном свете, нашедший широкое применение в исследовании двумерных задач, а также используемый в трехмерной фотоупругости. Максвеллом, задолго до Губера, еще в 1856 г. в письмах к Вильяму Томсону (лорду Кельвину) была высказана мысль, что разрушение элемента тела начинается, когда энергия формоизменения достигает определенного предела. Он писал: «У меня имеются веские основания думать, что когда энергия искажения формы достигает известного предела, элемент выходит из строя...» и «Я первый берусь писать на эту тему». Однако эти работы не были опубликованы и стали известны лишь после издания писем Максвелла. Наибольшую известность приобрели его работы по оптике, кинетической теории газов, теории электричества и магнетизму.

26. *Вёлер А.* (1819–1914). Основоположник научного изучения усталости материалов, создатель первых машин для испытаний на сопротивление усталости, впервые разработал технические условия на материалы, поступающие для использования на железных дорогах, впервые изучал влияние концентрации напряжений на усталость.

27. *Серенсен С.В.* (1905–1977). Лауреат Государственной премии СССР, академик АН УССР, ведущий ученый в области прочности и анализа разрушения конструкций. Разработал критерии усталостной прочности материалов и несущей способности элементов конструкции с учетом характера цикла напряжений, вида напряженного состояния и конструктивно-технологических факторов. Один из основоположников в СССР науки о сопротивлении усталости элементов конструкций.

28. *Д'Аламбер Жан Лерон* (1717–1783) – французский математик и философ. В 13 лет поступил в колледж имени Мазарини, по окончании которого получил звание бакалавра искусств. После колледжа закончил двух-

годовую академию юридических наук, но по своему характеру не смог работать адвокатом, поэтому начал изучать медицину, философию, литературу. За литературную деятельность в 23 года был избран членом Французской академии искусств. В 1843 г. в возрасте 26 лет дал общее решение задачи о нахождении динамических реакций связей несвободной материальной системы, получившей позже название принципа Д'Аламбера. Принцип Д'Аламбера является одним из важнейших общих принципов динамики несвободных материальных систем, который, превращая динамические задачи в статические, значительно упрощает их решение. В 1754 г. избирается членом Французской академии наук. Кроме механики, он доказал существование воздушных приливов, дал решение дифференциального уравнения второго порядка с частными производными, обосновал признак сходимости рядов. В 1764 г. Д'Аламбер был избран членом Петербургской академии наук.

29. *Лорд Рэлей (Джон Уильям Стретт)* (1842–1919). Родился в Лэнгфорд-Грове, близ Терлинга. В 1864 г. окончил Тринити-колледж в Кембридже. Главные научные труды посвящены распространению звука и света, теории электричества. Им впервые дано объяснение, почему небо имеет голубой цвет. Он исследовал колебания струн, стержней, мембран, пластинок и оболочек, ввел понятие обобщенных сил и обобщенных координат, разработал способ определения частоты колебаний сложных систем путем перевода сложной системы к системе с одной степенью свободы. Метод получил широкое применение в решении задач теории упругости, теории сооружений и т.д. Научные труды Рэрея составили 6 томов. Рэрей принимал активное участие в общественной жизни. В 1887 г. он избирается профессором натуральной философии в Королевском научном институте, был президентом Консультативного комитета по авиации с момента его организации в 1909 г.; с 1905 по 1908 г. – президент Лондонского Королевского общества, с 1908 г. – президент Кембриджского университета. Был награжден орденом «За заслуги», в 1904 г. получил Нобелевскую премию по физике за открытие первого инертного газа – аргона.

30. *Эйлер Леонард* (1707–1783). Родился близ Базеля (Швейцария). С 1730 г. – член Российской академии наук, где показал себя выдающимся математиком. Внес огромный вклад в развитие математики и механики. В работах по механике, используя аналитические методы, он показал, как можно выводить дифференциальные уравнения движения частицы, как путем интегрирования этих дифференциальных уравнений может быть выяснено движение тела. Эйлером написано 886 книг и статей, рукописи, оставшиеся после его смерти, публиковались Российской академией наук в течение 47 лет в своих анналах. В 1735 г. он ослеп на один глаз, а в 1766 г. полностью утратил зрение. За период с 1766 по 1783 г. им опубликовано свыше 400 научных работ. В сопротивлении материалов он вывел формулу для критической нагрузки стержня при продольном сжатии, провел об-

следования формы упругих линий изгиба при различных условиях загрузки упругих тонких стержней, рассматривал вопросы колебания балок и пластин. Им выполнены большие исследования по небесной механике, динамике, гидромеханике, получены выдающиеся результаты в области математики, вариационного исчисления и многих других разделов. Ньютон называл Эйлера героем математики.

31. *Ясинский Феликс Станиславович* (1856–1899). Профессор Петербургского института инженеров путей сообщения. Видный ученый в области устойчивости стержней и стержневых систем. Он исследовал точное решение дифференциального уравнения продольного изгиба и доказал справедливость формулы Эйлера, полученной на основе приближенного уравнения, ввел понятие «приведенной» длины стержня. Провел большую работу по оптимизации прокатных профилей, глубокие исследования по теории пространственных ферм. Им спроектирован и построен ряд крупных сооружений для Петербургско-Варшавской и Петербургско-Московской железных дорог.

32. *Лаплас Пьер Симон* (1749–1827) – французский ученый, астроном, физик, математик, механик, член Петербургской академии наук. Основные работы относятся к разработке небесной механики, объяснению движения и формы небесных светил. Название *небесная механика* введено им в 1798 г. В своих работах он стремился теорию, связанную с движением тел Солнечной системы, привести к полному совпадению с наблюдениями, ликвидировать противоречие между теорией тяготения и наблюдаемыми явлениями, им выполнен ряд работ по исследованию теплоты и электричества, по чистой математике и физике, астрофизике, теории вероятностей, теории капиллярности, теории распространения звука и света. Лаплас был председателем и главным руководителем Метрической комиссии по установлению единообразной системы мер и весов.

33. *Ламе Габриэль* (1795–1870) – французский ученый. После окончания в 1818 г. Парижской политехнической школы и в 1820 г. школы горных инженеров был приглашен в Петербург для преподавания прикладной математики и физики в Институте инженеров путей сообщения. Принимал участие в проектировании большого висячего моста через Неву длиной пролета в 306 м. Им положено начало механических испытаний материалов, для чего была спроектирована и построена специальная машина. Ламе уделял много внимания решению проблем практического значения. В связи со строительством Исаакиевского собора в Петербурге он занимался исследованием устойчивости и расчета арок. Основные работы Ламе посвящены теории прочности. Им доказано, что напряжения в точке образуют эллипсоид напряжений, получены формулы для напряжений и перемещений, возникающих в стенках толстостенных цилиндров; впервые при изучении круговых цилиндров применены цилиндрические координаты; в 1852 г. была опубликована первая книга по теории

упругости под названием «Лекции по математической теории упругости твердых тел», дано полное решение задачи о деформации сферической оболочке. В связи с июльской революцией 1830 г. и связанным с этим событием ухудшением взаимоотношений между Россией и Францией Ламе в 1831 г. был уволен с русской службы и вернулся во Францию, где работал сначала профессором Политехнической школы, а затем профессором Сорбонны. В 1843 г. он был избран членом Французской академии наук.

34. *Прандтль Людвиг* родился в 1875 г. во Фрейзинге, вблизи Мюнхена. С 1904 г. - директор Института прикладной механики Геттингенского университета. Круг научных интересов очень широк. Им разработаны модель образования поверхностей скольжения при растяжении, модель, объясняющая гистерезисные петли; изучая явления разрушения, он указал на два типа: хрупкое разрушение (отрывом) и разрушение от сдвига; обосновал принцип мембранной аналогии в задачах кручения; дал строгое решение задачи чистого изгиба кривого бруса, развил теорию изгиба круглых пластинок; заложил основы теории поперечной устойчивости балок и кривых брусьев, теории устойчивости плоской формы изгиба. Прандтлем проведены значительные работы в области аэродинамики. Исследуя вопросы пластичности, предложил диаграмму схематизации пластичных материалов.

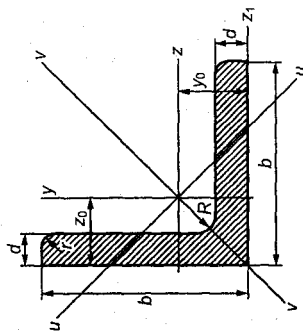
35. *Бюльфингер Герман-Бернгард* (1693-1750). С 1725 г. был членом Петербургской академии наук и первым ее профессором физики. Организовал первый в России физический кабинет. Основные работы относятся к теории изгиба, нашел правильное положение нейтральной оси при изгибе балок, предложил аналитическую зависимость между напряжениями и деформациями. В 1731 г. покинул Россию, но сохранил связь с академией, публикуя в ее сборниках свои работы.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1

Сталь прокатная угловая равнополочная (ГОСТ 8509-72)

- b – ширина полки;
- I – момент инерции;
- d – толщина полки;
- i – радиус инерции;
- R – радиус внутреннего закругления;
- y_0, z_0 – расстояние от центра тяжести до полки;
- r – радиус закругления полки



Номер профиля	Размеры, мм					Площадь сечения, см ²	Масса 1 м длины, кг	I_{z^2} , см ⁴	i_{z^2} , см	I_{y^2} , см ⁴	i_{y^2} , см	I_{y^2} , см ⁴	i_{y^2} , см	I_{z^1} , см ⁴	i_{z^1} , см	I_{z^1} , см ⁴	i_{z^1} , см
	b	d	R	r	r												
1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	15	15
4,5	45	3	5,0	1,7	1,7	2,65	2,08	5,12	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	9,04	1,21
4,5	45	4	5,0	1,7	1,7	3,43	2,73	6,63	1,38	10,52	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26	12,1	1,26
4,5	45	5	5,0	1,7	1,7	4,29	3,37	8,03	1,37	12,74	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30	15,3	1,30
5,0	50	3	5,5	1,8	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	12,4	1,33
5,0	50	4	5,5	1,8	1,8	3,89	3,05	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	16,6	1,38
5,0	50	5	5,5	1,8	1,8	4,80	3,77	11,20	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	20,9	1,42

Продолжение табл. П.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	3,44	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
5,6	56	5	6,0	2,0	5,41	4,25	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	7,0	2,3	4,69	3,90	18,86	1,95	29,00	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
6,3	63	5	7,0	2,3	6,13	4,81	23,10	1,94	36,80	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
6,3	63	6	7,0	2,3	7,28	5,72	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	50	1,78
7,0	70	4,5	8,0	2,7	6,20	4,87	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	51	1,88
7,0	70	5	8,0	2,7	6,86	5,38	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	56,7	1,90
7,0	70	6	8,0	2,7	8,15	6,39	37,58	2,16	59,64	2,71	15,22	1,39	68,4	1,94
7,0	70	7	8,0	2,7	9,42	7,39	42,98	2,16	68,19	2,69	17,77	1,39	80,1	1,99
7,0	70	8	8,0	2,7	10,67	8,37	48,16	2,16	76,35	2,68	19,97	1,39	91,9	2,02
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	5,80	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	69,6	2,02
7,5	75	6	9,0	3,0	8,78	6,89	46,57	2,3	73,87	2,9	19,28	1,48	93,9	2,06
7,5	75	7	9,0	3,0	10,15	7,96	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	98,3	2,10
7,5	75	8	9,0	3,0	11,50	9,02	59,84	2,28	94,89	2,87	24,80	1,47	113	2,15
7,5	75	9	9,0	3,0	12,83	10,07	66,10	2,27	104,72	2,86	27,48	1,45	127	2,18
8,0	80	5,5	9,0	3,0	8,63	6,78	52,68	2,47	83,56	3,11	21,80	1,59	93,2	2,17
8,0	80	6	9,0	3,0	9,38	7,36	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	102	2,19
8,0	80	7	9,0	3,0	10,85	8,51	65,31	2,45	130,60	3,09	26,97	1,58	119	2,23
8,0	80	8	9,0	3,0	12,30	9,65	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	137	2,27
9,0	90	6	10	3,3	10,61	8,33	82,10	2,78	130,00	3,5	33,97	1,79	145	2,43
9,0	90	7	10	3,3	12,28	9,64	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	169	2,47
9,0	90	8	10	3,3	13,93	10,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	194	2,51
9,0	90	9	10	3,3	15,60	12,20	118,00	2,75	186,00	3,46	48,60	1,77	219	2,55

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	100	100	6,5	12	4,0	12,82	10,06	122,10	3,09	193,46	3,88	50,73	1,99	214	2,68
10	100	100	7	12	4,0	13,75	10,79	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	231	2,71
10	100	100	8	12	4,0	15,60	12,25	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	265	2,75
10	100	100	10	12	4,0	19,24	15,10	178,95	3,05	283,83	3,84	74,08	1,96	333	2,83
10	100	100	12	12	4,0	22,80	17,90	208,90	3,03	330,95	3,81	86,84	1,95	402	2,91
10	100	100	14	12	4,0	26,28	20,63	237,15	3	374,98	3,78	99,32	1,94	472	2,99
10	100	100	16	12	4,0	29,68	23,30	263,82	2,98	416,04	3,74	111,61	1,94	542	3,06
11	110	110	7	12	4,0	15,15	11,89	175,61	3,4	278,54	4,29	72,68	2,19	308	2,96
11	110	110	8	12	4,0	17,20	13,50	198,17	3,39	314,51	4,28	81,83	2,18	353	3,00
12,5	125	125	8	14	4,6	19,69	15,46	294,36	3,87	466,76	4,87	121,98	2,49	516	3,36
12,5	125	125	9	14	4,6	22,0	17,30	327,48	3,86	520,00	4,86	135,88	2,48	582	3,40
12,5	125	125	10	14	4,6	24,33	19,10	359,82	3,85	571,04	4,84	148,59	2,47	649	3,45
12,5	125	125	12	14	4,6	28,89	22,68	422,23	3,82	670,02	4,82	174,43	2,46	782	3,53
12,5	125	125	14	14	4,6	33,37	26,20	481,76	3,8	763,90	4,78	199,62	2,45	916	3,61
12,5	125	125	16	14	4,6	37,77	29,65	538,56	3,78	852,84	4,75	224,29	2,44	1051	3,68
14	140	140	9	14	4,6	24,72	19,41	465,72	4,34	739,42	5,47	192,03	2,79	818	3,78
14	140	140	10	14	4,6	27,33	21,45	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	911	3,82
14	140	140	12	14	4,6	32,49	25,50	602,49	4,31	956,98	5,43	248,01	2,76	1097	3,90
16	160	160	10	16	5,3	31,43	24,67	774,24	4,96	1229,10	6,25	319,38	3,19	1356	4,30
16	160	160	11	16	5,3	34,42	27,02	844,21	4,95	1340,06	6,24	347,77	3,18	1494	4,35
16	160	160	12	16	5,3	37,39	28,35	912,89	4,94	1450,00	6,23	375,78	3,17	1633	4,39
16	160	160	14	16	5,3	43,57	33,97	1046,47	4,92	1662,13	6,2	430,81	3,16	1911	4,47
16	160	160	16	16	5,3	49,07	38,52	1175,19	4,89	1865,73	6,17	484,64	3,14	2191	4,55
16	160	160	18	16	5,3	54,79	43,01	1290,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	3,13	2472	4,63
16	160	160	20	16	5,3	47,44	47,44	1418,85	4,85	2248,26	6,1	549,43	3,12	2756	4,70

Окончание табл. П.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
18	180	11	16	5,3	38,60	30,47	1216,44	5,6	1933,10	7,06	499,78	3,59	2128	4,85
18	180	12	16	5,3	42,19	33,12	1316,42	5,59	2092,78	7,04	540,45	3,58	2324	4,89
20	200	12	18	6,0	47,10	36,97	1822,78	6,22	2896,16	7,84	749,40	3,99	3182	5,37
20	200	13	18	6,0	50,85	39,92	1960,77	6,21	3116,18	7,83	805,35	3,98	3452	5,42
20	200	14	18	6,0	54,60	42,80	2097,00	6,2	3333,00	7,81	861,00	3,97	3722	5,46
20	200	16	18	6,0	61,98	48,65	2362,57	6,17	3755,39	7,78	969,74	3,96	4264	5,54
20	200	20	18	6,0	76,54	60,08	2871,47	6,12	4560,42	7,72	1181,9	3,93	5355	5,70
20	200	25	18	6,0	94,29	74,02	3466,21	6,06	5494,04	7,63	1438,4	3,91	6733	5,89
22	220	14	21	7,0	60,38	47,40	2814,36	6,83	4470,15	8,6	1158,6	4,38	4941	5,91
22	220	16	21	7,0	60,58	53,83	3175,44	6,81	5045,37	8,58	1305,5	4,36	5661	6,02
25	250	16	24	8,0	78,40	61,55	4717,10	7,76	7492,10	9,78	1942,1	4,98	8286	6,75
25	250	18	24	8,0	87,72	68,86	5247,24	7,73	8336,69	9,75	2157,8	4,96	9342	6,83
25	250	20	24	8,0	96,96	76,11	5764,87	7,71	9159,73	9,72	2370,0	4,94	1146	6,91
25	250	22	24	8,0	106,1	83,31	6270,32	7,69	9961,60	9,69	2579,0	4,93	1306	7,00
25	250	25	24	8,0	119,7	93,97	7006,39	7,65	11125,5	9,64	2887,3	4,91	1467	7,11
25	250	28	24	8,0	133,1	104,5	7716,86	7,61	12243,8	9,59	3189,9	4,90	1575	7,23
25	250	30	24	8,0	142,0	111,4	8176,52	7,59	12964,7	9,56	3389,0	4,89	1575	7,31
													3	

Продолжение табл. П.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
5/3,2	50	32	3	6	1,8	2,42	1,90	6,18	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,7	0,403
5/3,2	50	32	4	6	1,8	3,17	1,59	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	4	6	2,0	3,58	2,81	11,37	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
5,6/3,6	56	36	5	6	2,0	4,41	3,46	13,82	1,77	4,48	1,01	29,2	1,87	7,91	0,88	2,65	0,78	0,404
6,3/4	63	40	4	7	2,3	4,04	3,17	16,33	2,01	5,16	1,13	33	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
6,3/4	63	40	5	7	2,3	4,98	3,91	19,91	2	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
6,3/4	63	40	6	7	2,3	5,90	4,63	23,31	1,99	7,29	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
6,3/4	63	40	7	7	2,3	7,68	6,03	29,60	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,86	0,386
7/4,5	70	45	5	8	2,7	5,59	4,39	27,76	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	4,79	34,81	2,39	12,47	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
7,5/5	75	50	6	8	2,7	7,25	5,69	40,92	2,38	14,60	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
7,5/5	75	50	8	8	2,7	9,47	7,43	52,38	2,35	18,52	1,4	112	2,52	34,2	1,29	10,87	1,06	0,430
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,49	41,64	2,56	12,68	1,41	84,6	2,60	20,8	1,13	7,57	1,09	0,387
8/5	80	50	6	8	2,7	7,55	5,92	48,89	2,55	14,85	1,4	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	9	3,0	7,86	6,17	65,28	2,88	19,67	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,77	1,22	0,384
9/5,6	90	56	6	9	3,0	8,54	6,70	70,58	2,88	21,22	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,70	1,22	0,384
9/5,6	90	56	8	9	3,0	11,18	8,77	90,87	2,85	27,08	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,29	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,58	7,53	98,29	3,2	30,58	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,20	1,38	0,393
10/6,3	100	63	7	10	3,3	11,09	8,70	112,86	3,19	34,99	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,83	1,37	0,392

Продолжение табл. П.2

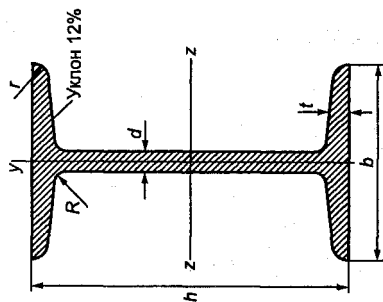
10/6,3	100	2	63	8	10	3,3	12,57	9,87	126,96	3,18	39,21	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,38	1,36	0,391
10/6,3	100	63	100	10	10	3,3	15,47	12,14	153,95	3,15	47,18	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,34	1,35	0,387
11/7	110	70	110	7	10	3,3	11,45	8,98	142,42	3,53	45,61	2	286	3,55	74,3	1,58	26,94	1,53	0,402
11/7	110	70	110	8	10	3,3	13,93	10,93	171,54	3,51	54,64	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,31	1,52	0,400
12,5/8	125	80	125	7	11	3,7	14,06	11,04	226,53	4,01	73,73	2,29	452	4,01	119	1,80	43,40	1,76	0,407
12,5/8	125	80	125	8	11	3,7	15,98	12,58	225,62	4	80,95	2,28	518	4,05	137	1,84	48,82	1,75	0,406
12,5/8	125	80	125	10	11	3,7	19,70	15,47	311,61	3,98	100,47	2,26	649	4,14	173	1,92	59,33	1,74	0,404
12,5/8	125	80	125	12	11	3,7	23,36	18,34	364,79	3,95	116,84	2,24	781	4,22	210	2,00	69,47	1,72	0,400
14/9	140	90	140	8	12	4,0	18,00	14,13	363,68	4,49	119,79	2,58	727	4,49	194	2,03	70,27	1,98	0,411
14/9	140	90	140	10	12	4,0	22,24	17,46	444,45	4,47	145,54	2,56	911	4,58	245	2,12	85,51	1,96	0,409
16/10	160	100	160	9	13	4,3	22,87	17,96	605,97	5,15	186,03	2,85	1221	5,19	300	2,24	110,40	2,20	0,391
16/10	160	100	160	10	13	4,3	25,28	19,58	666,69	5,13	204,09	2,84	1359	5,23	335	2,28	121,16	2,19	0,390
16/10	160	100	160	12	13	4,3	30,04	23,58	784,22	5,11	238,75	2,82	1634	5,32	405	2,36	142,14	2,18	0,388
16/10	160	100	160	14	13	4,3	34,72	27,26	897,29	5,08	271,60	2,8	1910	5,40	477	2,43	162,49	2,16	0,385
18/11	180	110	180	10	14	4,7	28,33	22,20	952,38	5,8	276,37	3,12	1993	5,88	444	2,44	165,44	2,42	0,376
18/11	180	110	180	12	14	4,7	33,69	26,40	1122,7	5,77	324,09	3,1	2324	5,97	537	2,52	194,28	2,40	0,374
20/12,5	200	125	200	11	14	4,7	34,80	27,37	1449,0	6,45	446,36	3,58	2920	6,50	718	2,79	263,84	2,75	0,392
20/12,5	200	125	200	12	14	4,7	37,89	29,74	1568,2	6,43	481,93	3,57	3189	6,54	786	2,83	285,04	2,74	0,392
20/12,5	200	125	200	14	14	4,7	43,87	34,43	1800,8	6,41	550,77	3,54	3726	6,62	922	2,91	326,54	2,73	0,390
20/12,5	200	125	200	16	14	4,7	49,77	39,07	2026,1	6,38	616,66	3,52	4264	6,71	1061	2,99	366,99	2,72	0,388

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
25/16	250	160	12	18	6,0	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,41	
25/16	250	160	16	18	6,0	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408	
25/16	250	160	18	18	6,0	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407	
25/16	250	160	20	18	6,0	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405	

Таблица П.3

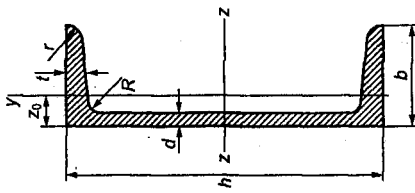
Сталь прокатная – балки двутавровые (ГОСТ 8239-72)

- h – высота балки;
- b – ширина малой полки;
- d – толщина полки;
- t – средняя толщина полки;
- R – радиус внутреннего закругления полки;
- r – радиус наружного закругления полки;
- I – момент инерции;
- i – радиус инерции;
- W – момент сопротивления;
- S – статический момент полусечения



Номер профиля	Масса 1 м длины, кг	Размеры, мм						Площадь сечения, см ²		I _z , см ⁴	W _z , см ³	i _z , см	S _z , см ³	I _{yp} , см ⁴	W _{yp} , см ³	i _{yp} , см
		h	b	d	t	R	r	9	8							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	114	18,4	1,88	
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	1430	159	7,51	98,8	114	22,8	2,12	
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184	8,28	104	155	23,1	2,07	
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	2030	203	8,37	114	157	28,2	2,32	
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232	9,13	131	206	28,6	2,27	
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	2790	254	9,22	143	198	34,3	2,50	
24	27,3	240	125	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	9,97	163	260	34,5	2,37	
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	
40	57,0	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	
45	66,5	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	
50	78,5	500	170	10	15,2	17,0	7,0	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	
55	92,6	550	180	11	16,5	18,0	7,0	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	
60	108	600	190	12	17,8	20,0	8,0	138,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	
65	120	650	200	12	19,2	22	9	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77	
70	138	700	210	13	20,8	24	10	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94	
70a	158	700	210	15	24	24	10	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01	
706	184	700	210	18	28,2	24	10	234	175770	5010	27,4	2940	3910	373	4,09	

Сталь прокатная – балки двутавровые (ГОСТ 8239-72)



- h – высота балки;
- b – ширина полки;
- d – толщина полки;
- t – средняя толщина полки;
- R – радиус внутреннего закругления полки;
- r – радиус наружного закругления полки;
- I – момент инерции;
- i – радиус инерции;
- W – момент сопротивления;
- S – статический момент полусечения;
- z_0 – расстояние от оси y - u до наружной грани стенки

Номер профиля	Масса 1 м длины, кг	Размеры, мм							Площадь сечения, см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	I_y , см	z_0 , см
		h	b	d	t	R	r										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	

Окончание табл. П.4

1	2	3	4	5...	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,48	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Таблица П.5

**Механические характеристики углеродистых
качественных сталей, Н/см²**

Марка стали	σ_B не менее	σ_T не менее	τ_T	σ_{-1}	τ_{-1}	σ_{-1p} (при растяжении - сжатии)
10	34000	21000	14000	16000-22000	8000-12000	12000-15000
20	42000	25000	16000	17000-22000	10000-13000	11000-16000
25	48000	28000	-	19000-25000	-	-
30	50000	30000	17000	20000-27000	11000-14000	17000-21000
35	43000	32000	19000	22000-30000	13000-18000	17000-22000
40	53000	34000	-	23000-32000	14000-19000	18000-24000
45	61000	36000	22000	25000-34000	15000-20000	19000-25000
50	64000	38000	-	27000-35000	16000-21000	20000-26000
55	66000	39000	-	-	-	-
60	69000	41000	-	31000-38000	18000-22000	22000-28000
20Г	46000	28000	-	-	-	-
30Г	55000	32000	-	22000-32000	-	-
50Г	66000	40000	-	29000-36000	-	-

Примечание. Данные приведены для сталей в нормализованном состоянии, получены на образцах $d = 6-12$ мм с полированной поверхностью. При пользовании таблицей можно принимать соответствие: сталь 3 стали 20; сталь 4 - стали 25; сталь 5 - стали 35; сталь 6 - стали 45.

Таблица П.6

**Механические характеристики легированных
конструкционных сталей, Н/см²**

Марка стали	σ_B не менее	σ_T не менее	τ_T не менее	σ_{-1}	σ_{-1p}	τ_{-1}
20Х	80000	65000	-	31000-38000	-	17000-23000
40Х	100000	80000	-	32000-48000	24000-34000	21000-26000
45Х	105000	85000	-	40000-50000	37000	23000
30ХМ	25000	75000	-	31000-41000	37000	23000
35ХМ	100000	85000	-	47000-51000	-	-
40ХН	100000	80000	39000	46000-60000	31000-42000	-
50ХН	110000	90000	-	55000	-	-
40ХФА	90000	75000	-	38000-49000	-	-
38ХМЮА	100000	85000	-	42000-55000	-	-
12ХНЗА	95000	70000	40000	42000-64000	-	22000-30000
20ХНЗА	95000	75000	-	43000-65000	-	24000-31000
30ХНЗА	100000	80000	-	53000-70000	-	32000-40000
40ХНЗА	110000	95000	-	50000-70000	-	27000-38000
30ХГСА	110000	85000	-	48000-70000	-	28000-40000

Примечание. Данные приведены для термически обработанных образцов, пределы выносливости получены на образцах $d = 6-12$ мм с полированной поверхностью.

Таблица П.7

Механические характеристики чугуна, Н/см²

Марка чугуна	$\sigma_{вр}$ при растяжении	$\sigma_{вс}$ при сжатии	$\sigma_{ви}$ при изгибе	$\tau_{в}$ при кручении	$\sigma_{-1р}$ при изгибе	τ_{-1} при кручении
СЧ 12	12000	50000	28000	—	—	—
СЧ 15	15000	65000	32000	24000	7000	5000
СЧ 18	18000	70000	36000	—	—	—
СЧ 21	21000	95000	40000	28000	10000	8000
СЧ 24	24000	100000	44000	30000	12000	10000
СЧ 28	28000	110000	48000	35000	14000	11000
СЧ 32	32000	120000	52000	39000	14000	11000
СЧ 35	35000	120000	56000	40000	15000	11500
СЧ 38	38000	140000	60000	46000	15000	11500

Примечание. Данные получены на образцах $d = 40$ мм.

Таблица П.8

Значения σ_T , $\sigma_{ш}$, a , b , $\lambda_{пред}$ и λ_T

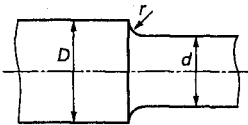
Материал	σ_T ($\sigma_{0,2}$)	$\sigma_{ш}$	a	b	c	$\lambda_{пред}$	λ_T
Н/см ²							
Сталь 2	22000	19000	26400	70	—	105	62
Сталь 3	24000	20000	31000	114	—	100	61
Сталь 20, Ст. 4	26000	22000	32800	111	—	96	60
Сталь 25, Ст. 5, 35Л	28000	24000	35000	115	—	92	57
Сталь 35, 45Л	32000	27000	39800	143	—	90	55
Сталь 45	36000	30500	44900	167	—	85	52
Сталь 50, 55Л	38000	32000	47300	187	—	82	50
Сталь 10Г2СЛ, 14Г2, 15ГС, 14ХГС, 15ХСНД	35000	30000	42900	152	—	83	50
Сталь 30ХМА, 35 ХМФА, 30ГСА, 40ХНМА	85000	70000	100000	557	—	55	28
Дюралюминий Д16Т	32000	25500	40600	283	—	53	30
Дюралюминий Д6Т	28000	22000	30000	143	—	57	15
Сосна, ель	—	—	2930	194	—	70	—
Чугун	—	—	77600	120	5,38	80	—

Таблица П.9

Значения коэффициента φ продольного изгиба

Гибкость λ	Сталь марок			Чугун марок		Дюралюминий Д16Т	Дерево (сосна, ель)
	Ст.3 Ст.4	Ст.5	14Г2 15ГС 10Г2С 10Г2СД 15ХСНД	СЧ 12 СЧ 15 СЧ 18 СЧ 21	СЧ 24 СЧ 28		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97
30	0,95	0,93	0,92	0,8	0,75	0,835	0,93
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31
110	0,52	0,43	0,39	—	—	0,142	0,25
120	0,45	0,37	0,33	—	—	0,119	0,22
130	0,40	0,32	0,29	—	—	0,101	0,18
140	0,36	0,28	0,25	—	—	0,087	0,16
150	0,32	0,25	0,23	—	—	0,076	0,14
160	0,29	0,23	0,21	—	—	—	0,12
170	0,26	0,21	0,19	—	—	—	0,11
180	0,23	0,19	0,17	—	—	—	0,10
190	0,21	0,17	0,15	—	—	—	0,09
200	0,19	0,15	0,13	—	—	—	0,08
210	0,17	0,14	0,12	—	—	—	—
220	0,16	0,13	0,11	—	—	—	—

Таблица П.10

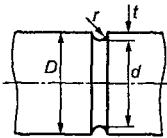


Эффективные коэффициенты концентрации напряжений для валов и осей с галтелями

D/d	r/d	Коэффициент концентрации напряжений при изгибе для деталей из стали, имеющих σ_B , Н/см ²			Коэффициент концентрации напряжений при кручении для деталей из стали, имеющих σ_B , Н/см ²		
		50·10 ³	80·10 ³	100·10 ³	50·10 ³	80·10 ³	100·10 ³
1	2	3	4	5	6	7	8
	0,02	1,70	1,82	2,05	1,24	1,29	1,33
	0,05	1,48	1,57	1,63	1,15	1,18	1,20

1	2	3	4	5	6	7	8
1,05	0,10	1,28	1,33	1,36	1,08	1,10	1,12
	0,15	1,20	1,23	1,25	1,06	1,08	1,09
	0,20	1,15	1,20	1,22	1,05	1,06	1,07
1,1	0,02	2,00	2,24	2,47	1,40	1,52	1,62
	0,05	1,64	1,70	1,75	1,25	1,28	1,30
	0,10	1,37	1,42	1,45	1,12	1,16	1,18
	0,15	1,27	1,31	1,34	1,09	1,12	1,14
	0,20	1,20	1,24	1,27	1,06	1,08	1,10
1,25	0,02	2,12	2,68	3,10	1,64	1,73	1,80
	0,05	1,81	1,97	2,10	1,40	1,45	1,48
	0,10	1,47	1,54	1,60	1,20	1,27	1,32
	0,15	1,35	1,40	1,43	1,15	1,20	1,24
	0,20	1,30	1,32	1,34	1,09	1,13	1,16
1,5	0,02	2,42	-	-	1,76	1,97	2,14
	0,05	1,91	2,06	2,20	1,48	1,56	1,62
	0,10	1,53	1,61	1,67	1,24	1,32	1,35
	0,15	1,38	1,44	1,48	1,19	1,25	1,29
	0,20	1,33	1,36	1,38	1,10	1,18	1,24

Таблица П.11



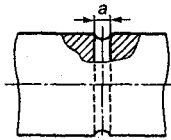
Эффективные коэффициенты концентрации напряжений для валов и осей с выгочками

t/r	r/d	Коэффициент концентрации напряжений при изгибе для деталей из стали, имеющих σ_B , Н/см ²			Коэффициент концентрации напряжений при кручении для деталей из стали, имеющих σ_B , Н/см ²		
		$\leq 50 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$	$\geq 100 \cdot 10^3$	$\leq 50 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$	$\geq 100 \cdot 10^3$
		1	2	3	4	5	6
0,05	0,02	1,77	2,02	2,22	1,46	1,61	1,73
	0,05	1,72	1,87	1,98	1,43	1,52	1,60
	0,10	1,59	1,69	1,77	1,36	1,42	1,46
	0,15	1,45	1,53	1,59	1,27	1,32	1,36
	0,20	1,37	1,41	1,45	1,22	1,25	1,27

1	2	3	4	5	6	7	8
1,0	0,02	1,85	2,12	2,35	1,51	1,67	1,81
	0,05	1,80	1,95	2,10	1,48	1,58	1,66
	0,10	1,65	1,76	1,85	1,39	1,47	1,51
	0,15	1,50	1,58	1,65	1,30	1,35	1,39
	0,20	1,45	1,48	1,50	1,27	1,29	1,30
2,0	0,02	1,92	2,21	2,41	1,56	1,73	1,87
	0,05	1,86	2,03	2,99	1,51	1,62	1,71
	0,10	1,70	1,82	1,76	1,42	1,50	1,56
	0,15	1,54	1,63	1,52	1,33	1,38	1,42
	0,20	1,48	1,52	1,40	1,29	1,30	1,32

Примечание. Значения K_{σ} могут быть использованы при расчетах на растяжение (сжатие).

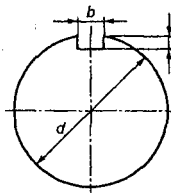
Таблица П.12



Эффективные коэффициенты концентрации напряжений для цилиндрических деталей с поперечными отверстиями

Характер нагрузки	a/d	Предел прочности материала σ_B , Н/см ²			
		$50 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$
Изгиб K_{σ}	0,05-0,10	1,94	1,95	2,05	2,15
	0,15-0,25	1,74	1,77	1,86	1,95
Кручение K_{τ}	0,05-0,25	1,75	1,78	1,83	1,92

Таблица П.13



Эффективные коэффициенты концентрации напряжений для валов и осей с одной и двумя шпоночными канавками

Характер нагрузки	Предел прочности материала вала σ_B , Н/см ²					
	$50 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$	$70 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$	$90 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$
Изгиб K_{σ}	1,50	1,60	1,72	1,80	1,90	2,0
Кручение K_{τ}	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90

Таблица П.14

**Эффективные коэффициенты концентрации напряжений
для шлицевых (зубчатых) участков вала**

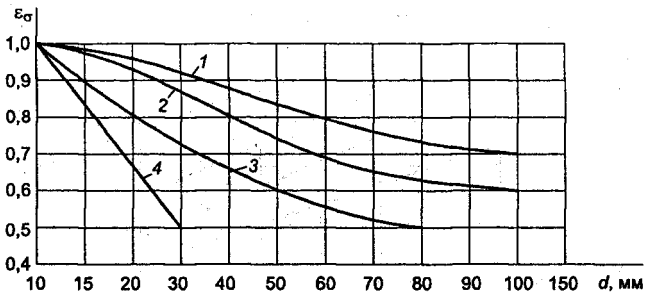
Характер нагружения	Предел прочности материала σ_B , Н/см ²							
	40·10 ³	50·10 ³	60·10 ³	70·10 ³	80·10 ³	90·10 ³	100·10 ³	120·10 ³
Прямоугольные шлицы по ГОСТ 1130-53 изгиб K_σ кручение K_τ	1,35	1,45	1,55	1,60	1,65	1,70	1,72	1,75
	2,40	2,25	2,35	2,45	2,55	2,65	2,70	2,80
Эвольвентные шлицы по ГОСТ 6033-51 изгиб K_σ кручение K_τ	1,35	1,45	1,55	1,60	1,65	1,70	1,72	1,75
	1,40	1,43	1,46	1,49	1,52	1,55	1,58	1,60

Таблица П.15

Значения масштабного фактора $\epsilon_\sigma = \epsilon_\tau$ в зависимости от диаметра детали

Материал	d , мм							
	10	20	30	40	50	70	100	120
Углеродистая сталь $\sigma_B = (40-50) \cdot 10^3$ Н/см ²	0,98	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	0,63
Углеродистая и легированная сталь $\sigma_B = (50-80) \cdot 10^3$ Н/см ²	0,97	0,89	0,85	0,81	0,78	0,73	0,68	0,61
Легированная сталь $\sigma_B = (50-120) \cdot 10^3$ Н/см ²	0,95	0,86	0,81	0,77	0,74	0,69	0,65	0,59
Легированная сталь $\sigma_B = (120-140) \cdot 10^3$ Н/см ²	0,94	0,83	0,77	0,73	0,70	0,66	0,62	0,57

**Масштабный коэффициент при изгибе и кручении валов
в зависимости от диаметра**



- 1 - углеродистая сталь при отсутствии концентрации напряжений;
- 2 - легированная сталь при отсутствии концентрации напряжений и углеродистая сталь при наличии умеренной концентрации напряжений;
- 3 - легированная сталь при наличии концентрации напряжений;
- 4 - стали при большой концентрации напряжений

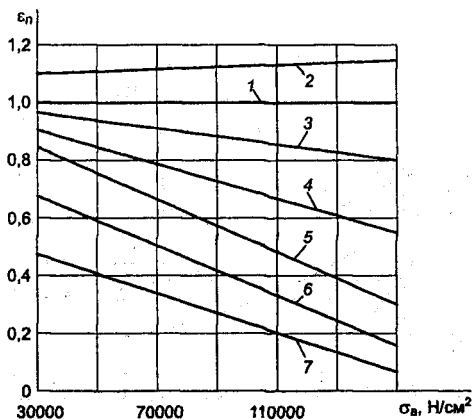
Таблица П.16

**Минимальные значения коэффициента β
при поверхностном упрочнении деталей**

Материал, способ поверхностного упрочнения и тип деталей	$\beta_{упр}$
Углеродистая и легированная сталь; поверхностная закалка токами высокой частоты; деталь без концентраторов напряжений	1,2
То же с концентраторами напряжений	1,5
Сталь; азотирование; деталь без концентраторов напряжений	1,1
То же с концентраторами напряжений	1,3
Сталь малоуглеродистая; цементация; деталь без концентраторов напряжений	1,1
То же с концентраторами напряжений	1,2
Углеродистая и легированная сталь; обкатка роликами; деталь без концентраторов напряжений	1,1
То же с концентраторами напряжений	1,3
Углеродистые и легированные стали; обдувка дробью (независимо от наличия концентраторов напряжений)	1,1

Таблица П.17

**Значения коэффициента качества поверхности различных сталей
в зависимости от их предела прочности и вида механической обработки**



1 - прямая для шлифованных образцов; 2 - прямая для образцов с полировочной поверхностью; 3 - обработка резцом; 4 - мелкая насечка; 5 - после проката; 6, 7 - для поверхностей, корродированных в пресной и морской воде

Таблица П.18

Изменение коэффициента коррозии в зависимости от предела прочности стали при различной выдержке образцов в условиях коррозии до испытания на усталость

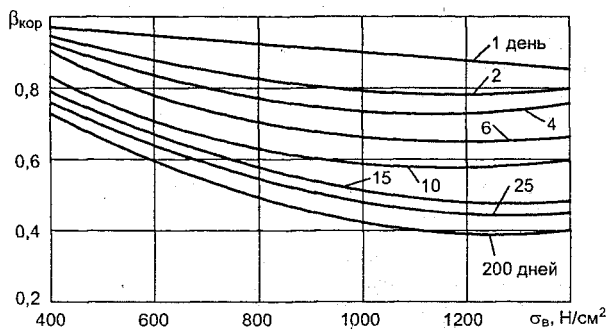


Таблица П.19

Влияние поверхностной закалки токами высокой частоты (данные соответствуют случаю изгиба с вращением, толщина закаленного слоя 0,9-1,5 мм)

Материал	Тип образца	Диаметр в мм	$\beta_{упр}$
Углеродистые и легированные	Без концентрации напряжений	7-20	1,3-1,6
		30-40	1,2-1,5
Конструкционные стали	С концентрацией напряжений	7-20	1,6-2,8
		30-40	1,5-2,5
Чугун	Гладкие образцы и образцы с концентрацией напряжений	20	1,2

Таблица П.20

Влияние химико-термической обработки на предел выносливости

Вид обработки	Тип образца	Диаметр, мм	$\beta_{упр}$
Азотирование при глубине 0,1-0,4 мм	Без концентрации напряжений	8-15 30-40	1,15-1,25 1,10-1,15
	С концентрацией напряжений	8-15 30-40	1,9-2,0 1,3-2,0
Цементация при толщине слоя 0,2-0,6 мм	Без концентрации напряжений	8-15 30-40	1,2-2,1 1,10-1,15
	С концентрацией напряжений	8-15 30-40	1,5-2,5 1,2-2,0
Цианирование при толщине слоя 0,2 мм	Без концентрации напряжений	10	1,8

Таблица П.21

Влияние поверхностного наклепа на предел выносливости

Материал	Способ обработки	Тип образца	Диаметр, мм	$\beta_{упр}$
Углеродистые и легированные стали	Обкатка роликами	Без концентрации напряжений	7-20 30-40	1,2-1,4 1,1-1,25
		С концентрацией напряжений	7-20 30-40	1,5-2,2 1,3-1,8
	Обдувка дробью	Без концентрации напряжений	7-20 30-40	1,1-1,3 1,1-1,2
		С концентрацией напряжений	7-20 30-40	1,4-1,5 1,1-1,5
Алюминиевые и магниевые сплавы	То же	Без концентрации напряжений	8	1,05-1,15

Значения коэффициентов Φ_m для сталей марок Ст. 0, Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4

λ m	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	140	160	180	200
0	0,960	0,940	0,920	0,890	0,860	0,880	0,750	0,690	0,600	0,450	0,360	0,290	0,230	0,190
0,2	0,794	0,779	0,754	0,731	0,696	0,655	0,609	0,560	0,510	0,413	0,330	0,264	0,217	0,179
0,4	0,683	0,669	0,647	0,625	0,596	0,562	0,525	0,487	0,447	0,371	0,303	0,249	0,206	0,173
0,6	0,599	0,588	0,568	0,549	0,529	0,487	0,465	0,434	0,402	0,339	0,283	0,234	0,196	0,166
0,8	0,535	0,524	0,508	0,480	0,469	0,445	0,420	0,393	0,366	0,313	0,264	0,223	0,188	0,160
1,0	0,483	0,473	0,459	0,444	0,426	0,406	0,383	0,360	0,338	0,292	0,249	0,211	0,180	0,155
1,2	0,440	0,432	0,419	0,406	0,390	0,372	0,353	0,333	0,314	0,273	0,235	0,201	0,173	0,149
1,4	0,403	0,397	0,388	0,358	0,359	0,345	0,328	0,311	0,293	0,257	0,224	0,193	0,167	0,145
1,6	0,374	0,367	0,357	0,348	0,334	0,321	0,306	0,291	0,275	0,244	0,213	0,185	0,161	0,140
1,8	0,347	0,342	0,334	0,324	0,314	0,301	0,287	0,275	0,260	0,231	0,203	0,178	0,155	0,136
2,0	0,325	0,320	0,312	0,304	0,294	0,284	0,271	0,258	0,247	0,220	0,194	0,171	0,151	0,132
2,5	0,279	0,276	0,269	0,263	0,256	0,247	0,237	0,228	0,218	0,196	0,177	0,157	0,139	0,124
3,0	0,245	0,242	0,238	0,232	0,226	0,220	0,211	0,203	0,195	0,178	0,162	0,145	0,130	0,116
3,5	0,219	0,216	0,213	0,208	0,202	0,196	0,191	0,185	0,175	0,164	0,149	0,134	0,120	0,109
4,0	0,197	0,195	0,192	0,188	0,184	0,175	0,174	0,168	0,163	0,150	0,138	0,126	0,104	0,103
5,0	0,167	0,163	0,161	0,158	0,156	0,152	0,148	0,143	0,140	0,130	0,121	0,111	0,103	0,093
7,0	0,124	0,123	0,122	0,120	0,118	0,116	0,114	0,111	0,109	0,103	0,096	0,091	0,085	0,078
10,0	0,090	0,090	0,090	0,089	0,088	0,086	0,085	0,084	0,083	0,079	0,076	0,071	0,067	0,063
20,0	0,048	0,048	0,048	0,047	0,047	0,047	0,046	0,046	0,045	0,044	0,044	0,041	0,041	0,039
30,0	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,032	0,031	0,031	0,030	0,029	0,028
40,0	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,023	0,023	0,023	0,022
50,0	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,018	0,018
и >														

Значения коэффициентов Φ_m для дерева

λ m	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	140	160	180	200
0	0,970	0,950	0,870	0,800	0,710	0,600	0,480	0,380	0,310	0,220	0,160	0,120	0,100	0,080
0,2	0,818	0,794	0,755	0,692	0,604	0,508	0,419	0,346	0,288	0,206	0,154	0,119	0,095	0,077
0,4	0,695	0,669	0,629	0,575	0,509	0,439	0,373	0,315	0,267	0,196	0,149	0,116	0,093	0,076
0,6	0,806	0,581	0,546	0,506	0,447	0,392	0,339	0,291	0,250	0,187	0,144	0,113	0,091	0,075
0,8	0,538	0,516	0,485	0,446	0,402	0,356	0,312	0,271	0,234	0,180	0,139	0,110	0,089	0,073
1,0	0,484	0,464	0,437	0,404	0,367	0,328	0,290	0,255	0,223	0,172	0,135	0,108	0,087	0,072
1,2	0,440	0,423	0,399	0,370	0,338	0,304	0,271	0,240	0,212	0,166	0,131	0,105	0,086	0,071
1,4	0,404	0,388	0,367	0,342	0,314	0,284	0,255	0,227	0,207	0,160	0,127	0,103	0,084	0,070
1,6	0,373	0,359	0,340	0,318	0,293	0,267	0,241	0,216	0,193	0,154	0,124	0,101	0,083	0,069
1,8	0,347	0,334	0,318	0,298	0,275	0,252	0,229	0,206	0,185	0,149	0,120	0,098	0,081	0,068
2,0	0,324	0,313	0,298	0,280	0,260	0,239	0,217	0,197	0,178	0,144	0,117	0,096	0,080	0,067
2,5	0,278	0,270	0,258	0,244	0,228	0,211	0,194	0,178	0,162	0,134	0,110	0,092	0,077	0,065
3,0	0,244	0,237	0,228	0,216	0,203	0,190	0,176	0,162	0,149	0,125	0,104	0,087	0,074	0,063
3,5	0,217	0,212	0,204	0,194	0,184	0,173	0,161	0,149	0,138	0,117	0,099	0,083	0,071	0,061
4,0	0,196	0,191	0,185	0,177	0,168	0,158	0,148	0,138	0,129	0,110	0,094	0,080	0,068	0,059
5,0	0,164	0,160	0,156	0,150	0,143	0,136	0,129	0,121	0,113	0,099	0,085	0,074	0,064	0,055
7,0	0,123	0,121	0,118	0,115	0,111	0,106	0,102	0,097	0,092	0,082	0,072	0,064	0,056	0,050
10,0	0,090	0,089	0,087	0,085	0,083	0,080	0,078	0,075	0,072	0,065	0,059	0,053	0,048	0,043
20,0	0,047	0,047	0,047	0,046	0,045	0,044	0,044	0,043	0,042	0,039	0,037	0,035	0,032	0,030
30,0	0,032	0,032	0,032	0,032	0,031	0,031	0,031	0,030	0,030	0,028	0,027	0,026	0,024	0,023
40,0	0,025	0,024	0,024	0,024	0,024	0,024	0,023	0,023	0,023	0,022	0,021	0,020	0,020	0,019
50,0	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,018	0,018	0,018	0,017	0,016	0,016
и >														

Таблица П.24

**Расчетные сопротивления сварных соединений
в строительных конструкциях, МПа**

Тип шва	Род усилия	Классы стали						
		С 38/23	С 44/29	С 46/33	С 52/40	С 60/45	С 70/60	С 85/75
Стыковой	Сжатие, $R_c^{св}$	210	260	290	340	380	440	530
	Растяжение							
	автоматическая сварка, полуавтоматическая и ручная с физическим контролем качества, $R_p^{св}$	210	260	290	340	380	440	530
	полуавтоматическая и ручная сварка, $R_p^{св}$	180	220	250	-	-	-	-
	Срез, $R_{ср}^{св}$	130	150	170	200	230	260	310
Угловой	Срез (условный) металл шва, $R_{уп}^{св*}$	180	200	200	210	240	280	340
	металл границы сплавления, $R_{ус}^{св*}$	180	200	210	230	270	300	360

Расчетные сопротивления R , МПа, швов алюминиевых сплавов

Тип шва	Род усилий	АМц	АМг	АМг6	АВТ1	В92Т
Стыковой	Сжатие и растяжение	40	70	140	110/90	170/150
Стыковой	Срез	30	50	105	70	120
Угловой	»	25	45	80	50	90

Примечание. Цифры, указанные в числителе, относятся к сварке плавящимся электродом, в знаменателе - вольфрамовым.

Таблица П.25

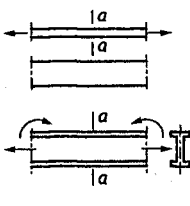
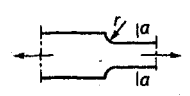
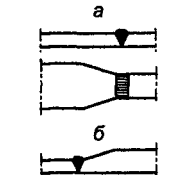
Коэффициенты a , b и c

Класс стали	Группа соединения	a	b	с при числе циклов N				
				$5 \cdot 10^5$	10^6	$2 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
С 38/23	1	1,20	0,60	1,2	1,1	1,0	0,95	0,9
	2	1,30	0,70					
	3	1,55	0,95	1,3	1,0	0,95	0,85	
	4	1,85	1,25					
	5	2,10	1,50	1,4	1,2	0,95	0,85	
	6	2,75	2,15					
	7	3,50	2,90	1,4	1,2	0,95	0,85	
	8	4,80	4,20					

1	2	3	4	5	6	7	8	9
С 44/29 С 46/33	1	1,25	0,65	1,2	1,1	1,0	0,95	0,95
	2	1,45	0,85					
	3	1,80	1,20					
	4	2,40	1,80	1,4	1,2			
	5	2,75	2,15					
	6	3,80	3,20					
	7	4,80	4,20	1,6	1,3			
	8	6,00	5,40					0,85

Таблица П.26

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений K_2 по нормам Минтяж-маша для краностроения

Схема соединения и расположение расчетного сечения $a-a$	Характеристика сечения	Группа элемента или соединения	K_2
1	2	3	4
	<p>Основной металл с необработанной прокатной поверхностью и с прокатными, обрезанными или обработанными механическим путем кромками в сечениях вне сварных швов, заклепок и болтов</p> <p>То же, но с кромками, обрезанными газовой резкой:</p> <p>машинной</p> <p>ручной</p>	1 2 4	1,0/1,0 1,2/1,2 1,8/1,4
	<p>Основной металл с необработанной прокатной поверхностью и обработанными механическим путем кромками при разной ширине в радиусе перехода:</p> <p>$r = 200$ мм</p> <p>$r = 10$ мм</p>	1 4	1,0/1,0 2,0/1,6
	<p>Основной металл в месте перехода к необработанному стыковому шву с усилением, имеющим достаточно плавный переход:</p> <p>а) при стыковании листов одинаковой толщины и ширины</p> <p>б) при стыковании листов разной ширины или листов разной толщины с плавным переходом</p>	4 5	1,8/1,4 2,5/2,0

1	2	3	4
	<p>Основной металл в месте перехода к поперечному (лобовому) угловому шву:</p> <p>а) при передаче усилия через швы без механической обработки при отношении катетов 1:1,5 (при направлении большего катета вдоль усилия)</p> <p>то же, при механической обработке перехода от шва к основному металлу</p> <p>б) без механической обработки при передаче усилия через основной металл</p> <p>то же, при зачистке зоны перехода от шва к основному металлу</p>	<p>7</p> <p>4</p> <p>6</p> <p>4</p>	<p>3,2/2,5</p> <p>-</p> <p>1,6/1,2</p> <p>-</p>
	<p>Фасонки прямоугольной и трапециевидной формы, привариваемые к поясам балок внахлестку с обваркой по контуру нахлестки, без механической обработки зон концентрации напряжений</p>	<p>7</p>	<p>-</p>
	<p>Фасонки трапециевидной формы, привариваемые двумя фланговыми и двумя косыми швами (с соотношением катетов 1:1 для фланговых и 1:1,5 для косых швов), при механической обработке швов на концах фасонки</p>	<p>5</p>	
	<p>Основной металл в соединениях с фланговыми швами, работающими на срез от осевой силы, в местах перехода от элемента к концам фланговых швов независимо от обработки:</p> <p>а) с двумя фланговыми швами</p> <p>б) с фланговыми и лобовыми швами</p> <p>в) при передаче усилия через основной металл</p> <p>г) щеки анкеров для крепления стальных канатов</p>	<p>8</p> <p>8</p> <p>8</p> <p>8</p>	<p>4,0/3,2</p> <p>-</p> <p>2,0/1,6</p> <p>-</p>

1	2	3	4
	<p>Фасонки прямоугольной формы, привариваемые встык или втавр к элементам конструкций, без механической обработки перехода от фасонки к элементу</p>	8	2,8/2,0
	<p>Фасонки, привариваемые встык или втавр к стенкам и поясам балок, а также к элементам ферм, при плавной криволинейной форме и механической обработке перехода от фасонки к элементу конструкции, при полном проваре на всю толщину фасонки</p>	4	1,4/1,2

Примечание. В числителе даны значения K_3 для сталей С 44/29, С 46/33, С 52/40, в знаменателе - для стали С 38/23.

Таблица П.27

Коэффициенты K_3 для сварных швов

Характеристика расчетного сечения	Коэффициенты K_3 для стали		Схемы соединения и расположения расчетного сечения $a - a$
	углеродистой	низколегированной	
1	2	3	4
<p>Стыковые швы (по оси шва) с полным проваром корня шва:</p> <p>а) при автоматической сварке</p> <p>б) при ручной сварке</p>	1,2 1,4	1,4 1,6	
<p>Стыковые швы (по оси шва) с неполным проваром корня шва или при отсутствии обратной подварки</p>	2,5-3,2	3,2-4,0	

1	2	3	4
<p>Угловые швы: а) поперечные (лобовые) швы по расчетному сечению шва: при автоматической сварке при ручной сварке б) продольные (фланговые) швы по расчетному сечению, проходящему по длине шва при ручной сварке</p>	<p>1,6 2,5 3,0</p>	<p>2,5 3,2 4,0</p>	

Таблица П.28

Пределы выносливости $[\sigma]_r$, МПа, для элементов конструкций из стали класса С 38/23 ($\sigma_B = 380$ МПа, $\sigma_T = 230$ МПа) в зависимости от эффективного коэффициента концентрации напряжений K_3 и характеристики шкала г

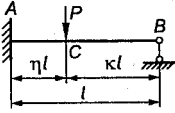
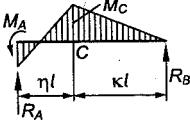
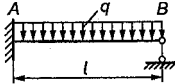

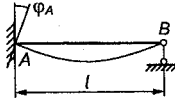
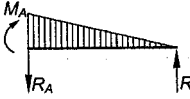
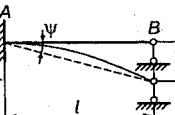
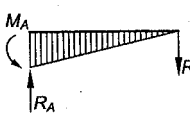
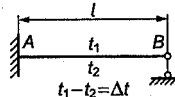

K_3	Сжатие							Растяжение										
	$\sigma_{0,6}$	$\sigma_{0,4}$	$\sigma_{0,2}$	σ_0	$\sigma_{-0,2}$	$\sigma_{-0,4}$	$\sigma_{-0,6}$	$\sigma_{-0,8}$	σ_{-1}	$\sigma_{-0,8}$	$\sigma_{-0,6}$	$\sigma_{-0,4}$	$\sigma_{-0,2}$	σ_0	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{0,4}$	$\sigma_{0,6}$	$\sigma_{0,8}$
1	-	-230	-230	-230	-230	-208	-175	-151	134	145	159	175	196	222	230	230	230	230
1,2	-	-230	-230	-230	-208	-171	-145	-125	111	121	133	148	166	190	212	229	230	230
1,4	-	-230	-230	-222	-175	-145	-123	-107	95	104	115	128	145	166	186	212	230	230
1,6	-	-230	-230	-190	-151	-126	-107	-94	83	91	101	113	128	148	166	190	222	230
1,8	-	-230	-222	-166	-133	-111	-95	-83	74	81	90	101	115	133	150	173	203	230
2,0	-	-230	-183	-132	-103	-85	-71	-62	55	61	68	78	90	107	123	144	173	216
2,2	-	-230	-162	-117	-92	-76	-64	-55	49	55	62	70	82	97	112	131	159	200
2,5	-	-207	-137	-100	-79	-65	-55	-48	43	48	54	61	71	85	98	116	141	178
2,8	-	-177	-119	-88	-69	-57	-49	-42	38	42	47	54	63	76	88	104	127	162
3,2	-	-148	-101	-75	-59	-49	-42	-36	32	36	41	47	55	66	76	91	112	144
3,6	-228	-127	-87	-65	-52	-43	-37	-32	29	32	36	41	48	58	68	81	100	129
4,0	-196	-111	-77	-57	-46	-38	-33	-28	25	28	32	37	43	52	61	73	90	117

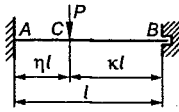
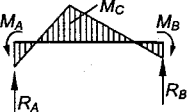
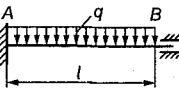

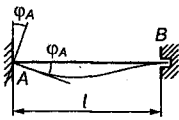
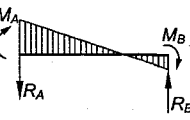
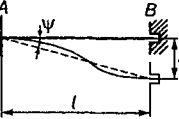
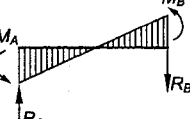
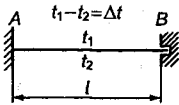

Примечание. За предел выносливости условно принято предельное напряжение при $N = 2 \cdot 10^6$ циклов нагружений, если $K_3 < 2$, и при $N = 5 \cdot 10^6$, если $K_3 \geq 2$.

Значение коэффициента ζ при числе циклов нагружения N

K_s	$N = 5 \cdot 10^4$							$N = 8 \cdot 10^5$							$N = 2 \cdot 10^6$						
	Характеристика цикла																				
	-1	-0,6	0	0,4	0,8	-1	-0,6	0	0,4	0,8	-1	-0,6	0	0,4	0,8	-1	-0,6	0	0,4	0,8	
2,0	2,7	2,4	1,9	1,6	1,3	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	
2,2	2,9	2,5	2,0	1,7	1,3	2,1	1,9	1,6	1,4	1,2	1,5	1,5	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	
2,5	3,1	2,7	2,1	1,8	1,4	2,2	2,0	1,7	1,5	1,3	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	
2,8	3,3	2,9	2,3	1,9	1,5	2,3	2,1	1,8	1,6	1,3	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,3	1,2	1,1	1,1	1,1	
3,2	3,6	3,2	2,4	2,0	1,6	2,4	2,2	1,9	1,7	1,4	1,7	1,6	1,4	1,3	1,2	1,3	1,2	1,2	1,2	1,1	
3,6	3,8	3,4	2,6	2,2	1,7	2,6	2,3	2,0	1,7	1,4	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,3	1,2	1,2	1,2	1,1	
4,0	4,1	3,6	2,8	2,3	1,8	2,7	2,5	2,0	1,8	1,5	1,8	1,7	1,5	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,2	1,1	

Таблица П.30

Схема нагрузки	Эпюры $M_{изг}$ и реакции	Формулы
1	2	3
		$M_A = -\frac{Pl}{2}\kappa(1-\kappa^2)$ $M_C = \frac{Pl}{2}\eta^2\kappa(3-\eta)$ $R_A = \frac{P\kappa}{2}(3-\kappa^2)$ $R_B = \frac{P\eta^2}{2}(3-\eta)$
		$M_A = -\frac{ql^2}{8}$ $R_A = \frac{5}{8}ql$ $R_B = \frac{3}{8}ql$
		$M_A = \frac{3EJ}{l}\varphi_A$ $-R_A = +R_B = +\frac{3EJ}{l^2}\varphi_A$
		$M_A = -\frac{3EJ}{l^2}\Delta = -\frac{3EJ}{l^2}\varphi$ $R_A = -R_B = \frac{3EJ}{l^3}\Delta = \frac{3EJ}{l^2}\varphi$
		$M_A = \frac{3EJ(\Delta t)\alpha}{2h},$ <p>где h - высота поперечного сечения;</p> $-R_A = R_B = \frac{3EJ\alpha(\Delta)}{2hl}$

1	2	3
		$M_A = -\eta\kappa^2 Pl$ $M_B = -\eta^2\kappa Pl$ $M_C = 2\eta^2\kappa^2 Pl$ $R_A = \kappa^2(1+2\eta)P$ $R_B = \kappa^2(1+2\kappa)P$
		$M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$ $M_C = +\frac{ql^2}{24}$
		$M_A = -\frac{4EJ}{l}\varphi_A$ $M_B = -\frac{2EJ}{l}\varphi_A$ $R_B = -R_A = \frac{6EJ}{l^2}\varphi_A$
		$M_B = -M_A = \frac{6EJ}{l^2}\Delta = -\frac{6EJ}{l}\varphi$ $R_A = -R_B = \frac{12EJ}{l^3}\Delta = \frac{12EJ}{l^2}\varphi$
		$M_A = M_B = \frac{EJ(\Delta t)\alpha}{h}$ $R_A = R_B = 0$

ЛИТЕРАТУРА

- Безухов, Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. М., 1968.
- Биргер, И.А.* Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. М., 1986.
- Болотин, В.В.* Статистические методы в строительной механике / В.В. Болотин. М., 1965.
- Вентцель, Е.С.* Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. М., 1969.
- Гусев, А.С.* Сопротивление усталости и живучести конструкций при случайных нагрузках / А.С. Гусев. М., 1989.
- Гусев, А.С.* Расчет конструкций при случайных воздействиях / А.С. Гусев, В.А. Светлицкий. М., 1984.
- Золоторевский, В.С.* Механические свойства металлов / В.С. Золоторевский. М., 1983.
- Когаев, В.П.* Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность (справочник) / В.П. Когаев [и др.]. М., 1985.
- Лихарев, К.К.* Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов» / К.К. Лихарев, Н.А. Сухова. М., 1980.
- Любощиз, М.И.* Справочник по сопротивлению материалов / М.И. Любощиз, Г.М. Ицкович. Минск, 1969.
- Малинин, Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. М., 1968.
- Мороз, Л.С.* Механика и физика деформаций и разрушения материалов / Л.С. Мороз. Л., 1984.
- Немировский, Ю.В.* Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю.В. Немировский, Б.С. Резников. Новосибирск, 1986.
- Николаев, Г.А.* Сварные конструкции (прочность сварных соединений и деформации конструкций) / Г.А. Николаев [и др.]. М., 1982.
- Пановко, Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. М., 1980.
- Писаренко, Г.С.* Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко [и др.]. Киев, 1986.
- Подскребко, М.Д.* Сопротивление материалов / М.Д. Подскребко. Минск, 1998.
- Подскребко, М.Д.* Сопротивление материалов (лабораторный практикум) / М.Д. Подскребко [и др.]. Минск, 2001.
- Работнов, Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. М., 1988.
- Светлицкий, В.А.* Статистическая механика и теория надежности / В.А. Светлицкий. М., 2002.
- Серенсен, С.В.* Расчеты на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени / С.В. Серенсен. М., 1971.
- Спицына, Д.Н.* Строительная механика стержневых машиностроительных конструкций / Д.Н. Спицына. М., 1977.

Тимошенко, С.П. История науки о сопротивлении материалов / С.П. Тимошенко. М., 1957.

Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. М., 1967.

Тимошенко, С.П. Сопротивление материалов: в 2 т. / С.П. Тимошенко. М., 1965.

Тимошенко, С.П. Механика материалов / С.П. Тимошенко, Дж. Гере. М., 1976.

Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. М., 1986.

Шишкин, В.Е. Продольный и продольно-поперечный изгиб / В.Е. Шишкин. М., 1964.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Глава 1. Основные понятия и определения.....	5
1.1. Основные понятия.....	5
1.2. Основные критерии работоспособности элементов конструкций.....	7
1.3. Расчетная модель.....	9
1.4. Метод сечений. Определение внутренних силовых факторов через внешние силы.....	14
1.5. Эпюры внутренних силовых факторов.....	18
1.6. Соотношение между нагрузкой, нормальной и поперечной силами, изгибающим моментом при растяжении стержней, изгибе балок и криволинейных брусев.....	19
1.7. Напряжения.....	58
1.8. Перемещения и деформации.....	61
1.9. Связь перемещений и деформаций.....	65
1.10. Относительная линейная деформация в произвольном направлении.....	69
Глава 2. Теория напряженного состояния.....	74
34 2.1. Напряженное состояние в точке.....	74
2.2. Плоское и линейное напряженные состояния.....	78
2.3. Исследование напряженного состояния в точке.....	79
2.4. Касательные напряжения.....	85
2.5. Обзор различных видов напряженных состояний.....	87
2.6. Уравнение равновесия элемента тела в случае линейного неоднородного напряженного состояния.....	93
Глава 3. Основные законы и константы упругих свойств материала.....	99
3.1. Закон Гука при растяжении и сжатии.....	99
3.2. Коэффициент Пуассона.....	100
3.3. Обобщенный закон Гука.....	103
3.4. Закон Гука при сдвиге.....	106
3.5. Объемная деформация.....	108
3.6. Потенциальная энергия деформации.....	109
Глава 4. Механические характеристики материалов.....	119
4.1. Испытание материалов на растяжение.....	119
4.2. Испытание материалов на сжатие.....	131
4.3. Работа деформации.....	135
4.4. Оценка предела прочности материала по показателю твердости... ..	137
4.5. Понятие о наклепе.....	140
4.6. Влияние различных факторов на механические характеристики материала.....	141
4.7. Допускаемые напряжения.....	145
4.8. Композиционные материалы.....	148
4.9. Механические характеристики композитов.....	150
Глава 5. Критерии прочности, или критерии предельных напряженных состояний.....	153

353	1. Сущность теорий прочности.....	153
	5.2. Классические критерии прочности.....	156
	5.3. Критерий прочности Мора.....	160
	Глава 6. Геометрические характеристики плоских сечений	166
	6.1. Основные определения.....	166
	6.2. Центр тяжести сложных сечений.....	170
	6.3. Параллельный перенос осей.....	178
	6.4. Поворот осей координат.....	180
	6.5. Главные оси и главные моменты инерции.....	182
	Глава 7. Растяжение и сжатие	198
	7.1. Определение напряжений в поперечных сечениях стержня.....	198
	7.2. Определение перемещений сечений стержня.....	200
147	7.3. Условие прочности и жесткости при растяжении и сжатии.....	202
	7.4. Гибкие нити.....	213
	7.5. Расчет биметаллических проводов.....	222
	Глава 8. Кручение	231
	8.1. Напряжения в поперечных сечениях прямого круглого бруса.....	231
	8.2. Определение углов закручивания сечений бруса при кручении.....	235
328	8.3. Условия прочности и жесткости при кручении. Допускаемые напряжения.....	236
	8.4. Напряжения при кручении прямых брусьев некруглого поперечного сечения.....	239
333	8.5. Расчет валов по заданной мощности и числу оборотов.....	242
	Глава 9. Статически неопределимые системы при растяжении (сжатии) и кручении	249
	9.1. Составление уравнений перемещения и расчет статически неопределимых систем.....	249
	9.2. Начальные (монтажные) и температурные напряжения.....	259
	Глава 10. Сдвиг	273
	10.1. Практические расчеты на срез и смятие.....	273
	10.2. Допускаемые напряжения для сварных, болтовых и заклепочных соединений.....	286
	Глава 11. Изгиб	296
28	11.1. Виды изгибов.....	296
	11.2. Напряжения в поперечных сечениях балки при частом изгибе.....	297
	11.3. Напряжения в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе.....	302
	11.4. Касательные напряжения при поперечном изгибе.....	303
30	11.5. Расчет балок на прочность при изгибе.....	315
	11.6. Балки переменного сечения.....	318
	11.7. Рациональные формы поперечных сечений балок при изгибе.....	328
	11.8. Концентрация напряжений.....	332
	Глава 12. Перемещения при изгибе	342
	12.1. Дифференциальное уравнение упругой линии балки.....	342
	12.2. Метод начальных параметров.....	349
	12.3. Расчет на жесткость при изгибе.....	355
	12.4. Влияние поперечных сил на изгиб балок.....	355

Глава 13. Перемещения в брус при произвольной нагрузке	361
13.1. Потенциальная энергия деформации бруса в общем случае нагружения	361
13.2. Теорема Кастилиано. Теорема Лагранжа	367
13.3. Интегралы Максвелла - Мора для определения перемещений	373
13.4. Способ Верещагина	382
13.5. Вариационные методы расчета конструкций	394
Глава 14. Сложное нагружение	404
14.1. Особенности расчета брусьев при сложном нагружении	404
14.2. Косой изгиб.....	404
14.3. Изгиб с кручением.....	424
14.4. Расчет цилиндрических винтовых пружин растяжения – сжатия.....	434
14.5. Внецентренное растяжение и сжатие брусьев большой жесткости.....	443
14.6. Изгиб с растяжением (сжатием).....	450
14.7. Изгиб плоских кривых брусьев	458
14.8. Перемещения в брусьях большой кривизны.....	467
Глава 15. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил	474
15.1. Общие понятия о статически неопределимых стержневых системах.....	474
15.2. Определение степени статической неопределимости системы	476
15.3. Метод сил. Выбор основной системы	481
15.4. Теоремы о взаимности работ и перемещений	482
15.5. Канонические уравнения метода сил	484
15.6. Определение перемещений в статически неопределимых системах.....	490
15.7. Особенности расчета симметричных систем	490
15.8. Расчет статически неопределимых балок	495
15.9. Метод перемещений. Канонические уравнения метода перемещений.....	520
Глава 16. Расчет на прочность при циклически изменяющихся напряжениях	529
16.1. Понятие об усталостном разрушении	529
16.2. Типы циклов напряжений и их параметры	535
16.3. Кривая усталости. Предел выносливости при симметричном цикле	537
16.4. Факторы, влияющие на сопротивление усталости деталей	540
16.5. Диаграмма усталостной прочности, или диаграмма Хейга	545
16.6. Схематизация диаграммы усталостной прочности	547
16.7. Расчет на выносливость при линейном напряженном состоянии.....	548
16.8. Расчет на выносливость при чистом сдвиге.....	551
16.9. Расчет на выносливость при плоском напряженном состоянии... ..	552
16.10. Пути повышения сопротивления усталости конструкций.....	553
16.11. Понятие о малоцикловой усталости	562

Глава 17. Динамические нагрузки	575
17.1. Динамические нагрузки, вызывающие движение тела с ускорением	575
17.2. Ударная нагрузка	578
17.3. Вычисление коэффициента η приведения массы	583
17.4. Анализ формулы динамического коэффициента	587
17.5. Условие прочности при ударе и некоторые рекомендации к проектированию элементов конструкций	592
Глава 18. Продольный и продольно-поперечный изгиб прямых стержней	598
18.1. Понятие об устойчивости равновесия упругих тел	598
18.2. Определение критической силы. Формула Эйлера	600
18.3. Влияние закрепления концов стержня на величину критической силы	605
18.4. Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского	607
18.5. Расчет на устойчивость сжатых стержней по коэффициенту снижения допускаемых напряжений	611
18.6. Выбор рациональной формы поперечных сечений для сжатых стержней	613
18.7. Энергетический метод (метод Ритца) определения критической силы	621
18.8. Продольно-поперечный изгиб	626
Глава 19. Расчет тонкостенных оболочек вращения	636
19.1. Особенности расчетной схемы тонкостенной оболочки вращения	636
19.2. Определение напряжений в осесимметричной оболочке по безмоментной теории	636
19.3. Частные случаи расчета оболочек по безмоментной теории	641
19.4. Определение радиальной распределенной нагрузки, действующей на распорное кольцо в оболочках	645
Глава 20. Расчет толстостенных цилиндров	653
20.1. Определение напряжений в толстостенном цилиндре при действии внутреннего и наружного давления	653
20.2. Определение перемещений в толстостенном цилиндре при действии внутреннего и наружного давления	657
20.3. Анализ частных случаев нагружения толстостенных цилиндров $\sigma_x = 0$	659
20.4. Расчет посадок с гарантированным натягом	668
20.5. Определение напряжений в составных трубах	672
Глава 21. Механические колебания упругих линейных систем	681
21.1. Основные положения теории колебаний	681
21.2. Общее дифференциальное уравнение колебаний упругих линейных систем с одной степенью свободы	684
21.3. Свободные колебания линейных систем	685
21.4. Вынужденные колебания линейных систем	691
21.5. Учет собственного веса системы при колебаниях	700
21.6. Методы отстройки систем от резонанса	703
21.7. Условие прочности при колебаниях	704
21.8. Колебания систем с несколькими степенями свободы	711

Глава 22. Расчет конструкций по предельной нагрузке	716
22.1. Основные понятия.....	716
22.2. Схематизация диаграмм растяжения материалов	719
22.3. Растяжение и сжатие стержневых систем при наличии пластических деформаций.....	721
22.4. Упруго-пластическое кручение.....	726
22.5. Упруго-пластический изгиб	729
22.6. Остаточные напряжения.....	742
22.7. Заневоливание валов.....	750
Историческая справка.....	752
Приложения.....	760
Литература.....	791

Учебное издание

Подскребко Михаил Данилович

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебник

Редактор *А.В. Новикова*

Художественный редактор *В.А. Ярошевич*

Технический редактор *Л.И. Счисленок*

Корректоры *Т.В. Кульнис, Е.В. Савицкая, В.И. Аверкина, Т.К. Хваль*

Компьютерная верстка *Н.В. Шабуни*

Подписано в печать 30.08.2007. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Гарнитура «Нимбус». Офсетная печать. Усл. печ. л. 42,0. Уч.-изд. л. 35,72.
Тираж 2700 экз. Заказ 2312.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
ЛИ № 02330/0131768 от 06.03.2006. 220048, Минск, проспект Победителей, 11.
<http://vshph.com>

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Белорусский Дом печати”».
220013, Минск, проспект Независимости, 79.

Издательство «Вышэйшая школа»



**Книги по издательской цене
(с доставкой, оптом и в розницу)
можно приобрести по адресу:**

РУП «Издательство «Вышэйшая школа»»

пр. Победителей, 11

220048, Минск, Республика Беларусь

Тел.: (+375-17) 203-67-38, 203-99-35

Факс: (+375-17) 203-54-15

<http://vshph.com>

e-mail: market@vshph.com

Мы рады работать для Вас!

Издательство «Вышэйшая школа»

**Наши партнеры на территории
Российской Федерации**

Издательско-книготорговая компания «Техническая книга»

ул. Шоссе Энтузиастов, 56
111123, Москва, Российская Федерация
Тел.: (+7-495) 778-92-27, 8-916-812-73-12
e-mail: tbook@lit.by

Магазин-салон «Новая техническая книга»

Измайловский пр., 29
191167, Санкт-Петербург, Российская Федерация
Тел.: (+7-812) 251-41-10
e-mail: trade@techkniga.com

ООО «Издательские компьютерные системы "ИКС"»

Представительство в Москве
Промзона, корп. 48
142700, г. Видное, Ленинский р-н, Московская обл.
Российская Федерация
Тел: (+7-495) 933-32-74, 777-80-96
e-mail: bhv@bhvm.ru